

數學與可信推理

原著者 By G. Polay

譯著者 林聰源

國立編譯館主編
國曉園出版社印行

版權所有・翻印必究

初 版

1988年2月第一次印刷發行

數學與可信推理

定價：新臺幣 300 元 港幣 100 元

原著者：By G. Polay

譯著者：林

聰

源

發行人：黃

旭

政

發 行 所：曉 園 出 版 社 有 限 公 司
HSIAO-YUAN PUBLICATION COMPANY LIMITED

臺 北 市 青 田 街 7 巷 5 號

電 話：3 9 4 - 9 9 3 1 三 線

郵 撥：1 0 7 5 7 3 4 - 4 號

台 大 店：臺 北 市 新 生 南 路 三 段 9 6 號 之 三

電 話：3 9 1 7 0 1 2 3 9 4 7 3 7 5

重 南 店：臺 北 市 重 慶 南 路 一 段 1 1 5 號

電 話：3 3 1 3 3 6 0 3 1 4 9 5 8 0

工 專 店：臺 北 市 新 生 南 路 一 段 6 之 9 號

電 話：三 九 六 八 六 六 四

逢 甲 店：臺 中 市 西 屯 區 文 華 路 1 1 3 號

電 話：2 5 1 2 7 5 9 2 5 4 6 6 6 3

淡 江 店：臺 北 縣 淡 水 鎮 英 專 路 7 1 號

電 話：六 二 一 七 八 四 〇

香港藝文：九 龍 又 一 村 達 之 路 30 號 地 下 後 座

圖書公司 電 話：3 - 8 0 5 8 0 7 3 - 8 0 5 7 0 5

印 刷 所：遠 大 印 刷 廠

臺 北 市 武 成 街 3 6 巷 1 6 弄 1 5 號

出 版 登 記：局 版 臺 業 字 第 1244 號

著 作 執 照：臺 內 著 字 第 號

譯 序

大家都看過（或至少知道）Polya的「如何解題」這本書吧！對於想認真學習數學的人來說，“數學與可信推理”這本書比該書更有用千百倍。這是我從事教育工作十幾年來的一點看法。Polya實在太棒了，很可惜我當學生的時候沒有讀他的書。希望本書之翻譯能使更多的學生學到他們在課堂上學不到的好東西。

本書原名為“Mathematics and Plausible reasoning”，其中“plausible”一字的意思是“合乎情理的”、“說得通的”，為使譯文簡潔，我把書名譯作“數學及可信推理”，在書中內文則譯作“似真推理”，希望這些字眼能表達原文之含義而又不造成誤解。

林 聰 源
于台灣大學
1988年2月

第一部 引言

這本書有多種目的，彼此緊密相連。首先，這本書要以一種重要的經常被忽略的方式來為數學老師、學生服務。不過就某種意義而言，這本書也是一篇哲學論說。它也是一種延續，並且需要有人來延續它。我將一一加以說明。

1. 嚴格地說，我們所有在數學及演繹邏輯（事實上是數學的一支）以外的知識是由猜測所組成的。當然了，猜測無窮無盡。有些猜測很可信賴很有份量，像是物理科學中的某些一般定律。也有一些猜測，既沒份量又不可信，當你在報紙上看到時氣得半死。介於這兩個極端之前，有形形色色的猜測。

我們用演繹推理來捉住數學知識，但我們用似真推理來支持我們的猜測。數學的證明是演繹推理，但物理學家的演繹證據、律師的情況證據、歷史學家的文件證據，以及經濟學家的統計證據都屬於似真推理。

介於兩種推理之間的差異是巨大而多樣的。演繹推理是安全的，毫無爭論餘地的、最終的。似真推理正好相反。演繹推理不能得到我們周遭世界的新知識。我們了解到的有關這世界的新東西都牽涉到似真推理，這也是我們日常生活中唯一的推理方法。演繹推理有固定的標準，受形式邏輯的理論所支配。似真推理的標準是流動的，沒有理論來規範。

2. 關於這兩種推理還有一點值得我們注意。每個人都知道數學提供了一個學習演繹推理的絕佳機會，但我也敢說在學校的一般課程中沒有一科能有相同的機會學習似真推理。我對各種年級對數學有興趣的學生總是這麼說：當然了，我們要學證明，但我們也要學猜想。

這好像有點矛盾，為免誤會起見我必須強調幾點。

數學被認為是一門演繹的科學。然而這只是它的一面。以完整的形式展現的數學外表是純粹演繹的，只包含證明。然而數學的形成與其他人類

知識的形成沒有兩樣。在你證明一個數學定理之前你須先猜到它；在你完成證明的細節之前你先要猜猜如何證明。你必需把觀察結果組合起來，依循類比；你必需一試再試。數學家的創意，工作的成果是演繹推理的，即證明；但證明是用似真推理，即猜想，發現的。數學的學習若要反映一點數學的發明，猜想及似真推理必須佔一位置。

如我們所說過的，推理有兩種：演繹推理及似真推理。我們先來看一下它們並不矛盾；正好相反地，它們相得益彰。但證明與猜想，正確的證明與不正確的嘗試之間必需分辨清楚。

正經學習數學，有意作為他的終生事業的學生，必須學習演繹推理；這是他的職業，他的學科的獨特標誌。但要真正成功他必須也學似真推理；他的創意工作有賴於此。

一般的、業餘的學生也應該對演繹推理有點了解：他可能不會有機會直接用到它，但這對他在現代生活中的種種體驗會有所幫助。似真推理更是不時都會用得上。

3. 我不相信學習猜測有什麼絕佳的方法。我們必須用模仿及實踐來學習。我所能做的只不過是提供可模仿的例子以及實踐的機會。

以下我將不時討論到大大小小的數學發現。我無法說出發現如何發生的真相，因為沒有人了解。但我還是想試著用一個可能的相近的經過來作為彌補。我將強調在發現後面的動機，導致它的似真推理，簡而言之，任何值得模仿的事情。當然了，我會讓讀者們印象深刻，這是我作為教師及作者的職責。不過我會完全誠實地只談真正有關的事，不譁眾取寵。

每一章之後都有例子及註解。本文中太技術性或太細膩的觀點以及離主旨稍遠者都收入附註之中。有些在本文中只大略提到的東西，習題提供了讀者一個再次考慮細節的機會。然而大多數的習題讓讀者自己提出似真的結論。在作每章末所提較難的問題之前，讀者應先讀該章中相關的部分並且看一看前後的問題；其中可能有線索。為了提出（但又適當地隱藏）這些線索，我著實花費了不少苦心來安排。

為了讓廣大的讀者能了解，每一要點我盡量都用一個基本的例子來說明。有時我也提出了有歷史興趣的例子，有真正數學美感的例子，以及說

明在其他科學中，在日常生活中平行的程序的例子。

本書是教學相長的成果。運用了我在研究及教學上的所有經驗以使讀者有機會作智慧的模仿，自我訓練。

4. 本書所收集的似真推理的例子也可另作他用：研究歸納法的哲學問題。關鍵性的問題是：歸納法有沒有規則？有些哲學家說有，大多數科學家說沒有。

生物學家要去研究某一般問題時，譬如說遺傳，很重要的一點是他必需選擇某一種特別的植物或動物，作為實驗的對象。化學家研究某一般問題時，譬如說化學反應的速率，他得選定某種物質。用歸納法研究任何問題時選擇適當的實驗材料是無比重要的。我覺得數學在好幾方面來看，是研究歸納推理最適當的實驗材料。

5. 「數學與可信推理」這本書我認為是一體的，自然地分成兩部：數學中的歸納與類比（第一部），以及似真推理的樣式（第二部）。第一部與第二部完全無關，讀者應先仔細讀第一部。它包含了作品中比較多的數學的血肉，提供了第二部中研究歸納法的“資料”。比較有數學基礎的讀者可直接讀第二部。

本書是「如何解題」的延續。有興趣的讀者可以兩本都讀，但先後次序沒有關係。由於「如何解題」的篇幅小，程度比較基本，本書提供了許多在該書中無法討論的習題及更進一步的說明。

本書與我和 Szegő 所寫的「分析問題集」也有關連。該書中所收集的問題都經細心編排，環環相扣，本書也遵循這一方式。

本書大部分都在我的講課中講過，有些講了好幾次。有些地方我還保留了說話的口氣。

6. 第二部的最後一章處理發現與教學，銜接了我以往的工作並指出可能的後續方向。

有效地運用似真推理在解題中扮演了一個主要的角色。本書以許多實例嘗試著說明此點。

本書不是一本教科書，但我希望對於一般寫教科書的方式以及題目的

選擇會發生一些影響力。

7. 最後我要感謝普林斯頓大學出版社的細心印刷，以及飛劍太太的打字和八龍博士的校稿。

：

喬治·波利雅

史坦福大學

1953 年五月

第二部 引言

歸納法引起各種對立的哲學觀點的爭論，至今尚無定論。讀過本書第一部的讀者可能注意到了兩件事。第一是歸納及類比推理在數學發現上扮演了一個主要角色。第二是歸納及類比推理兩者都是似真推理的特例。我覺得與其考慮孤立的特例不如考慮一般想法來得合乎哲理。本書第二部想要樹立似真推理的某些模式，探討它們和機率演算的關係，檢視在什麼意義下它們可視為似真推理的“法則”。

當然了，先讀第一部再讀第二部是很自然的，前者的例子供給我們很多實驗資料以及豐富的背景以便後者之用。不過兩者的內容之間並無明顯的關連，即使不讀第一部亦不妨害對第二部的了解。

我所提出來的觀點不見得就是無可更易的了。但我相信主要的方向是對的，而這些討論，特別是這些例子，將有助於釐清似真推理兼具“客觀的”與“主觀的”兩種面目的真相。

喬治·波利雅

史坦福大學

1953年五月

對讀者之提示

第七章第二節在第七章中被引用時，記成第 2 節，而在其他章中引用時，記成 7.2 節。同理，第十四章第五節的第(3)小節，分別記成 5 (3)節及 14. 5 (3)節。第十四章的例題 26 則記為 26 題或 14.26 題。

只要具備一些基本的代數及幾何的知識即足以閱讀本書之大部分。再加上解析幾何以及微積分（包括極限及無窮級數）即足以了解幾乎全部書上的文章、例題及習題。只有幾個比較困難的習題需要更高深的知識。

讀者們不要看到某些部分似乎太簡單而跳過不讀，這樣可能會有所遺漏。初學者可略去一些較難的部分不看。

有些（不太困難的）證明常被省略。讀者們可自行補上。

習題中較困難者有提示寫在方括弧 [] 內。前後的題目也可能有所提示。

讀者應該誠實認真地做完習題後才看答案。

下了苦功之後，即使沒有解出來，對你還是很有用的。你可以參考答案，找出重點所在，放下書本，再自己做一遍。

書中給了不少的附圖及推導過程。目的是使讀者看清楚圖形或公式演化的過程，譬如圖 16.1 ~ 16.5。然而沒有一本書能有足夠的圖及例子。建議你準備好紙筆，一面讀一面畫圖推導。這樣必有助於你的了解而且不會忘掉。

目 錄

第 一 部.....	1
第一章 歸納法.....	3
1. 經驗與信念	4
2. 暗示的接觸點	4
3. 支持的接觸點	6
4. 歸納的態度	8
例題與評註.....	9
第二章 一般化、特性化、類推.....	13
1. 一般化、特殊化、類推、歸納	13
2. 一般化	13
3. 特殊化	14
4. 類推.....	14
5. 一般化、特殊化、類推	16
6. 使用類推的發現	18
7. 類推與歸納	23
例題與評註.....	24
第三章 立體幾何中的歸納.....	39
1. 多面體	39
2. 第一個支持點	42
3. 更多的支持點	43
4. 嚴厲的考驗	43

5. 驗證、再驗證	45
6. 一個非常不同的實例	46
7. 類 同	47
8. 空間的分割	48
9. 修飾問題	49
10. 一般化、特殊化、類同	49
11. 一個類同的問題	49
12. 一系列的類同問題	51
13. 問題愈多可能愈容易	52
14. 一個猜測	53
15. 預測和驗證	54
16. 精益求精	55
17. 歸納暗示了演繹；特例暗示了一般證明	56
18. 更多的猜想	57
例題與評註	57

第四章 歸納法在數論上的應用..... 67

1. 整數直角三角形	67
2. 平方和	70
3. 四個奇平方之和	72
4. 仔細看一個例子	72
5. 列出觀察結果	74
6. 規則是什麼	74
7. 歸納發現的本質	77
8. 歸納證據的本質	78
例題與評註	80

第五章 歸納法的一些例子..... 87

1. 展 開	87
2. 近 似	89

3. 極 限	91
4. 嘗試反證它	92
5. 嘗試證明它	93
6. 歸納階段的功用	96
例題與評註	97
第六章 一個較一般的陳述	105
1. 尤 拉	105
2. 尤拉的論文集	105
3. 轉變成更一般的觀點	114
4. 尤拉論文的系統大綱	115
例題與評註	116
第七章 數學歸納法	125
1. 歸納階段	125
2. 證明階段	127
3. 細看轉換過程	128
4. 數學歸納法的技術	129
例題與評註	135
第八章 極大與極小	141
1. 模 式	141
2. 例 題	142
3. 正切水準線之模式	144
4. 例 子	146
5. 部分變動模式	149
6. 算術及幾何平均數定理及其第一個結論	151
例題與評註	153
第九章 物理數學	167

1. 光學上的解釋·····	167
2. 力學上的解釋·····	172
3. 重新解釋·····	175
4. 白努利關於捷線之發現·····	178
5. 阿基米得關於積分學之發現·····	181
例題與評註·····	185
第十章 等周問題·····	197
1. 笛卡兒的歸納推理·····	197
2. 潛在的推理·····	198
3. 物理的推理·····	199
4. 雷利的歸納推理·····	199
5. 推導出結論·····	200
6. 驗證結論·····	203
7. 非常接近了·····	207
8. 等周定理的三個形式·····	208
9. 應用及問題·····	210
例題與評註·····	211
第十一章 其他的似真推理·····	221
1. 猜測再猜測·····	221
2. 用相關情況來判斷·····	221
3. 用一般情況來判斷·····	223
4. 寧可猜測簡單一點·····	225
5. 背景·····	228
6. 無窮盡·····	230
7. 通常的啓發式的假設·····	231
例題與評註·····	232
最後的評註·····	245

第 二 部 247

第十二章 若干顯著的模式 249

1. 結論之驗證 249
2. 若干結論之逐項驗證 251
3. 似不可信的結論之驗證 253
4. 類推之推論 255
5. 類推之深入 257
6. 蒙昧的類推推論 259
- 例題與評註 259

第十三章 其他模式及其第一連鎖 267

1. 檢驗結論 267
2. 檢驗可能之基礎 268
3. 檢驗一牴觸之猜測 269
4. 邏輯用語 270
5. 似真推論模式間的邏輯聯繫 272
6. 漸變之推論 273
7. 表 275
8. 簡單模式的結合 275
9. 由類推之推論 277
10. 有條件的推論 278
11. 關於逐步驗證 281
12. 關於對立猜測 281
13. 法官的證明 283
- 例題與評註 287

第十四章 運氣，永遠出現的對立猜測 305

1. 隨機大量現象 305

2. 概率的概念	307
3. 球與球之使用	310
4. 概率計算統計假設	313
5. 單刀直入預測頻率	314
6. 現象之解釋	320
7. 統計假設之判斷	324
8. 統計假設間之取捨	328
9. 非統計推測之判斷	334
10. 數學猜測之判斷	345
例題與評註	348
第十五章 概率演算與似真推理邏輯	359
1. 似真推理法則	359
2. 演繹推理之一面	361
3. 似真推理之對應方面	363
4. 概率演算之一面：困難	366
5. 概率演算之一面：嘗試	367
6. 結論之檢驗	368
7. 可能基礎之檢驗	372
8. 抵觸推測之檢驗	373
9. 一連串檢驗若干結論	375
10. 關於間接證據（情況證據）	377
例題與評註	379
第十六章 發明及教學中之似真推理	391
1. 本章之目的	391
2. 一則小發現的故事	391
3. 解題之過程	394
4. 神來之筆	396
5. 啓發式證明	397

6. 另一個發現的故事	398
7. 若干典型的指示.....	403
8. 發明中的歸納.....	404
9. 敬告教師	408
例題與評註	410
題 解	419
參考資料	523

第一部