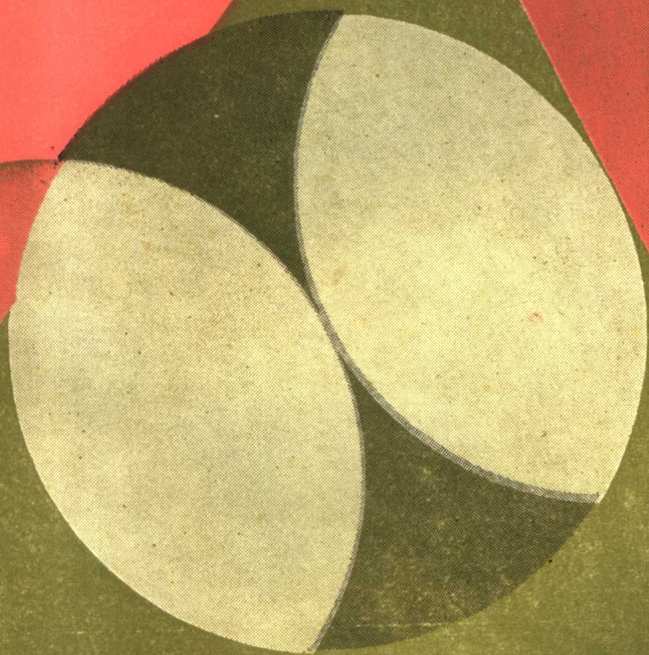




中学数学丛书

高培丰

解三角形



ZHONGXUE SHUXUE CONGSHU

湖北教育出版社

解 三 角 形

高 培 丰

湖 北 教 育 出 版 社 ·

中学数学丛书
解 三 角 形
高培丰

湖北教育出版社出版 湖北省新华书店发行
孝感地区印刷厂印刷

787×1092毫米32开本 5.75印张 1插页 129,000字
1984年11月第1版 1984年11月第1次印刷
印数：1—26,000

统一书号：7306·126 定价：0.75元

内 容 提 要

本书以初中代数“解三角形”一章为基础，系统地阐述了三角形中各元素间的相互关系，深入地介绍了各类三角形的解法，及其在几何、测量、物理和三角恒等变形中的应用。

本书叙述通俗易懂、系统完整、讨论详尽、例题丰富、配有较多习题，并附有答案或提示。除部分恒等变形应用了高中三角公式外，大都可为初中三年级学生课外阅读。是中学生和中学数学教师较好的参考读物。

编 者 的 话

为了帮助广大中学生学习数学基础知识，一九八一年秋，湖北人民出版社委托我们湖北省暨武汉市数学学会推荐介绍作者，组织编写了《逻辑代数初步》、《线性代数初步》、《概率统计初步》、《微积分初步》四本小册子，分别介绍中学数学教材中有关高等数学的初步知识。这一工作，得到大中学校教师的热情支持，并希望以中学生为主要对象，编辑出版一套《中学数学丛书》。根据读者的要求和老师们的意见，出版社约请我会在此基础上主编一套《中学数学丛书》。我们认为这个工作是很有意义的。于是，发动高等院校及中学的广大数学教师以及数学研究工作者共同讨论，决定了二十几个选题，结合出版社组稿的四种，制定了《中学数学丛书》选题计划。

《中学数学丛书》的编写，围绕中学数学教学大纲和全国统编数学教材，从中学生的学习实际出发，对中学数学知识适当作了拓宽和加深。编写这套书的目的，是为了帮助中学生巩固基础知识，加强基本训练，熟练掌握基本技能，培养分析和解决数学问题的能力，提高学习质量。

参加这套丛书编写的，有大专院校的老师 and 数学研究工作者，以及教学经验丰富的中学教师。编写中充分注意中学生的实际，考虑到他们的实际水平和接受能力，力求写得深入浅出，通俗易懂，使一般水平的学生都能看懂，且学有所得。

《中学数学丛书》共计三十余册，多数小册子内容是和教材相对应的，几本综合性的小册子，是为了帮助同学们掌握数学

概念，学会分析与归纳，寻找解题途径并掌握较好的解题方法而编写的。丛书中每本小册子既相对独立又互相联系。同学们既可系统阅读，也可以根据自己的情况有选择地使用。学习中哪一方面比较薄弱，哪一方面存在疑难，更可选择其中的有关部分阅读。另外，丛书各册编有丰富的练习题、复习题，并附有答案与提示，便于同学们自学，同时，对中学教师亦有一定的参考作用。

这套丛书出版以后，欢迎读者提出批评与建议，以便我们组织力量进一步修改再版，把这套丛书编好。同时，希望读者对进一步编好中学生课外读物提出宝贵意见。

湖北省暨武汉市数学学会

一九八二年五月

目 录

开头语.....	1
第一章 解直角三角形.....	4
§ 1. 直角三角形中基本元素之间的关系.....	4
§ 2. 直角三角形的解法.....	9
§ 3. 用三角函数对数表解直角三角形.....	19
§ 4. 解直角三角形的应用.....	21
习题一.....	26
第二章 任意三角形中各元素间的关系.....	30
§ 1. 任意三角形中基本元素之间的关系.....	30
§ 2. 任意三角形中基本关系式的进一步讨论.....	42
§ 3. 用三角形的基本元素表示三角形的非基本元素.....	54
习题二.....	75
第三章 解任意三角形.....	80
§ 1. 解任意三角形的基本情形.....	80
§ 2. 解任意三角形的非基本情形	100
习题三	114
第四章 解三角形的应用	119
§ 1. 在几何方面的应用	119
§ 2. 在测量方面的应用	135
§ 3. 在物理和化学方面的应用	139

§ 4. 证明三角恒等式和三角不等式	145
习题四	163
习题答案与提示	171

开 头 语

在三角学中，通常把一个三角形的边、角、高、中线、角平分线、内切圆半径、外接圆半径和面积等等，叫做三角形的元素，其中的边和角，叫做三角形的基本元素，而其它元素叫做三角形的非基本元素。

为了今后书写和叙述简便起见，在不会发生混淆的情况下，我们常常用同一个字母来表示一个元素和这个元素的量数，例如字母 A ，既表示三角形 ABC 中以 A 为顶点的角 A ，又表示角 A 的度数；又如字母 a ，既表示三角形 ABC 中角 A 所对的边，又表示这条边的长度。因此，在一般的情况下，字母 A 、 B 、 C 表示三角形 ABC 的三个内角，而字母 a 、 b 、 c 表示角 A 、 B 、 C 所对的边，如图 1—1 所示。如果三角形 ABC 是直角三角形，一般总是用 C 表示直角，而用 c 表示斜边。如图 1—2 所示。

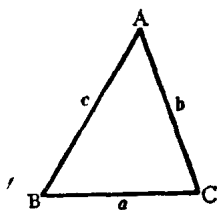


图 1—1

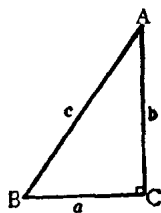


图 1—2

三角形 ABC 可以简记为 $\triangle ABC$ 。

根据平面几何学，三角形 ABC 的六个基本元素 A 、 B 、 C

和 a 、 b 、 c ，必须满足下面两条要求：

(一) 每个内角的量数都大于 0° ，并且三内角之和等于 180° 。用式子表示就是：

$$A > 0, B > 0, C > 0, \text{ 并且 } A + B + C = 180^\circ;$$

(二) 每条边的长度都大于零，并且任意两边之和都大于第三边，用式子表示就是：

$$a > 0, b > 0, c > 0,$$

$$\text{并且 } a + b > c, b + c > a, c + a > b.$$

所谓解三角形，就是在给出足够个数的三角形的元素的条件下，求出这个三角形中未知的元素或我们所需要的元素。

给出多少个元素才有可能解这个三角形呢？根据平面几何学中关于三角形的几何作图问题知道，要作出一个确定的三角形，最基本的情形有下列三种：

第一，已知两个角和一条边；

第二，已知两条边和它们的夹角；

第三，已知三条边，并且其中任何两边之和都大于第三边。

由此看到，要作出一个确定的三角形，至少应给出三个元素，而且这三个元素中至少含有一条边，否则，就不一定能作出一个确定的三角形。例如，如果已知的是三个角，并且这三个角的和是 180° ，这时我们只能作出一串相似三角形，而不能作出一个确定的三角形。因此，在已知的三个元素中，至少应含有一条边，才有可能作出一个确定的三角形。

解三角形就是根据三个已知元素，利用三角形中边与边、边与角、角与角的关系，逐个求出这个三角形中未知的元素。这种边与边、边与角、角与角的关系用式子表示出来，就是至少含有三个已知元素和一个未知元素的关系式。因此，为了要

解三角形，就必须先建立三角形的基本元素之间的各种关系式（或者叫做方程式），这样的关系式至少含有四个元素。

根据中学数学的教学要求，在这本小册子里，我们按照解直角三角形、解任意三角形和解三角形的应用的顺序进行讨论。

第一章 解直角三角形

§ 1. 直角三角形中基本元素之间的关系

(一) 直角三角形中角与角之间的关系

在直角三角形中，由于有一个角是直角，因此，其余两个角都是锐角，并且它们的和等于 90° 。也就是说，如果在直角三角形 ABC 中， $C=90^\circ$ ，则

$$A+B=90^\circ \quad (1)$$

这时称角 A 和 B 是互为余角。

由于这个原因，为了解直角三角形，我们只要在其余五个基本元素 A 、 B 、 a 、 b 、 c 中，建立含有三个基本元素的关系式就可以了。

(二) 直角三角形中角与边之间的关系

在直角三角形 ABC 中，如果 C 是直角， c 是斜边，那么，

由图 1—3 和锐角三角函数的定义，可以得到直角三角形的边与角之间的下列关系：

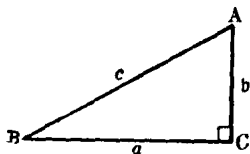


图 1—3

$$\sin A = \frac{a}{c} \text{ 或 } a = c \sin A, \quad (2)$$

$$\sin B = \frac{b}{c} \text{ 或 } b = c \sin B, \quad (3)$$

$$\cos A = \frac{b}{c} \text{ 或 } b = c \cos A, \quad (4)$$

$$\cos B = \frac{a}{c} \text{ 或 } a = c \cos A, \quad (5)$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{a}{b} \text{ 或 } a = b \operatorname{tg} A, \quad (6)$$

$$\operatorname{tg} B = \frac{b}{a} \text{ 或 } b = a \operatorname{tg} B. \quad (7)$$

(三) 直角三角形中边与边之间的关系

在直角三角形 ABC 中，三条边之间有一种特殊的关系，这就是众所周知的勾股定理。

勾股定理 在直角三角形中，两条直角边的平方的和，等于斜边的平方。

如果用 a 、 b 表示直角三角形 ABC 中的两条直角边， c 表示它的斜边，那么勾股定理可以写成：

$$a^2 + b^2 = c^2. \quad (8)$$

勾股定理载于《周髀[1]算经》一书。这书的前一小部分是假托周公向商高(约公元前 1120 年)学习算术时的对话写成的。商高答周公曰：“勾广三，股修四，径隅五”。这就是我们通常所说的“勾三股四弦五”。它是直角三角形中三边之比的最简单的描述。

对于一般形式的勾股定理，在《周髀算经》中也有记载。陈子(约为公元前 7—6 世纪)答荣方问，说：“若求邪**至日者，以日下为勾，日高为股，勾股各自乘，并而开方除之，得邪至日。”由此可见，我国古代人民对勾股定理早已有了研究。古希腊数学家毕达哥拉斯(pythagoras)大约在公元前六世纪证明了这个定理，因此，在国外，也把这个定理叫做毕达哥拉斯定理。

* “径隅”即指“弦”。

** “邪”即“斜”。

但从历史记载来看，我国古代人民对这一定理的发现较毕达哥拉斯更早，因此，把这一定理叫做“勾股定理”是理所当然的。

关于勾股定理的证法很多，据说为我国历代数学家所发现的证法就不下二百种。下面我们介绍两种证法。

证法一

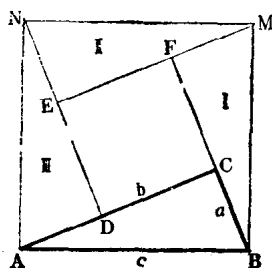


图 1—4

为 $b-a$ 的正方形。于是

正方形 $ABMN$ 的面积
= 正方形 $CDEF$ 的面积 + $4 \times$ 三角形 ABC 的面积也就是

$$c^2 = (b-a)^2 + 4 \times \frac{1}{2}ab$$

化简后，就得到勾股定理： $c^2 = a^2 + b^2$ 。

证明 如图 1—4 所示，在直角三角形 ABC 的斜边 AB 上作一个正方形 $ABMN$ ，把三角形 ABC 包含在它的内部。过 N 作 AC 的垂线 ND ，过 M 作 ND 的垂线 ME ，延长 BC 交 ME 于 F 。容易证明： I 、 II 、 III 是三个与三角形 ABC 全等的直角三角形，它们的面积都等于 $\frac{1}{2}ab$ ，四边形 $CDEF$ 是边长为 $b-a$ 的正方形。于是

证法二

证明 如图 1—5 所示，延长直角三角形 ABC 的直角边 CB 至 D ，使

$$CD = CB + CA = a + b.$$

以 CD 为一边作一个正方形 $CDEF$ ，把三角形 ABC 包含在内部，并在正方形的边 DE 和 EF 上

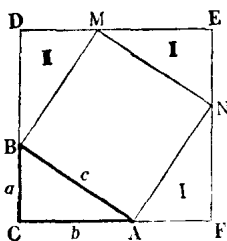


图 1—5

各取一点 M 、 N ，使 $DM = EN = a$ ，联结 BM 、 MN 、 NA 。容易证明：I、II、III 是三个与三角形 ABC 全等的直角三角形，它们的面积都等于 $\frac{1}{2}ab$ ，四边形 $ABMN$ 是边长为 c 的正方形。于是

正方形 $CDEF$ 的面积
= 正方形 $ABMN$ 的面积 + $4 \times$ 三角形 ABC 的面积，也就是

$$(a+b)^2 = c^2 + 4 \times \frac{1}{2}ab,$$

化简后，就得到勾股定理： $a^2 + b^2 = c^2$ 。

(四) 直角三角形中基本元素之间的关系式的个数的讨论

在直角三角形 ABC 中，除直角 C 外，在五个基本元素 A 、 B 、 a 、 b 、 c 中，任取三个基本元素构成一个关系式，这样的关系式应该有 $C_5^3 = 10$ 个。*

• C_5^3 是排列组合中“组合个数”的符号，它表示从 5 个元素中任取 3 个不同元素构成一组，可以有多少种不同的方法。例如从 A 、 B 、 a 、 b 、 c 这 5 个元素中，任取 3 个不同元素构成一组，可以有 10 种不同的组合方法，它们是： abc ， abA ， abB ， acA ， acB ， aAB ， bcA ， bcB ， bAB ， cAB 。所谓两种组合是不同的，指的是它们所含的元素不全相同，而不管它们的元素的顺序。一般地说，从 n 个不同元素中任取 m 个不同元素的组合的个数用符号 C_n^m 表示，其计算方法是：

$$C_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m(m-1)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}.$$

于是 $C_5^3 = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 10$ 。不熟悉排列组合的读者，对于简单的组合问题，可以用上面的方法直接排出，并数出它的个数即可。

在这 10 个关系式中, 由三条边构成的关系式应该有 $C_3^3 \cdot C_2^0 = 1$ 个*. 这就是勾股定理.

在 10 个关系式中, 由二条边和一个角构成的关系式应该有 $C_3^2 \cdot C_2^1 = 3 \times 2 = 6$ 个**. 这就是(二)中所列的公式(2)一(7).

在 10 个关系式中, 由一条边和二角构成的关系式应该有 $C_3^1 \cdot C_2^2 = 3 \times 1 = 3$ 个***. 但是, 实际上这样的关系式是不存在的. 因为, 如果有这样的关系式, 那么由两个锐角可以表示出直角三角形的三条边, 从而两个相似的直角三角形就会全等, 这是不可能的.

因此, 如果要想得到含有一条边和两个角的关系式, 那么这条边就不可能出现在关系式里, 代替这种关系的 就是关系式(1): $A + B = 90^\circ$.

因此, 在直角三角形 ABC 中, 从五个基本元素 A 、 B 、 a 、 b 、 c 中任取三个不同元素构成的关系式, 实际上只有八个, 那就是公式(1)一(8). 它们是直角三角形 ABC 中含有三个元素的关系式的全体. 一切其它的基本元素间的关系式, 例如余切的关系式, 都看作是由它们推导出来的. 由于公式(1)一(8)是直角三角形 ABC 中含有三个基本元素的关系式的全体, 因此, 只要知道某个直角三角形的二个基本元素(其中至少含有一条边), 就一定可以从公式(1)一(8)中选出适当的公式, 求出这个直角三角形的其它未知元素. 即解出这个直角三角形.

* $C_3^3 C_2^0$ 表示从五个元素 A 、 B 、 a 、 b 、 c 中任取 3 条边和 0 个角构成一个组的组合数, 显然只有一种这样的组合.

** $C_3^2 C_2^1$ 表示从 A 、 B 、 a 、 b 、 c 中任取 2 条边和一个角 构成一个组的组合数, 读者可以直接排出后, 数一数, 恰为六个这种组合.

*** 同①与②一样, 可知 $C_3^1 C_2^2 = 3$.

§ 2. 直角三角形的解法

根据已知的基本元素的不同, 可以把解直角三角形的问题分成下列四种不同情形去解决: 1° 已知一直角边和一锐角; 2° 已知斜边和一锐角; 3° 已知斜边和一直角边; 4° 已知二条直角边. 其中 1° 与 2° 实际上是属已知一条边和一个锐角的情形, 而 3° 与 4° 实际上是已知两条边的情形. 下面我们按四种不同情形, 讨论直角三角形的解法.

(一) 已知一直角边和一锐角, 解直角三角形

设在直角三角形 ABC 中, 如图 1—6 所示, 已知直角边 a 和锐角 A , 求 b 、 c 、 B 和 S (三角形的面积).

因为已知 A , 由 § 1 公式 (1) 得: $B = 90^\circ - A$.

又由公式 (2), 得:

$$C = \frac{a}{\sin A}.$$

利用公式 (6), 得:

$$b = \frac{a}{\operatorname{tg} A}.$$

最后, 三角形 ABC 的面积为

$$S = \frac{1}{2}ab = \frac{a^2}{2\operatorname{tg} A}.$$

于是直角三角形 ABC 中的未知基本元素和面积 S 均已求出.

今后, 一般地说“解某三角形”时, 就是要求出这个三角形中未知的的基本元素和它的面积.

如果已知的是直角边 b 和锐角 A , 要解直角三角形 ABC .

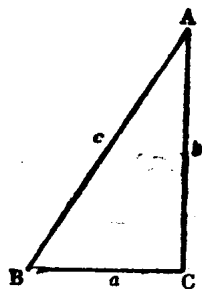


图 1—6