杨宗仁 编

数学物理方程簡明教程

中央广播电视大学出版社

数学物理方程简明教程

杨宗仁 编

中央广播电视大学出版社

数学物理方程简明教程

杨宗仁　编

*

中央广播电视大学出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京师院印刷厂印装

*

开本 850×1168/32 印张 8.125 千字 197

1987年5月第 1 版　1987 年 10 月第 1 次印刷

印数　1—6500

定价1.60元

ISBN 7—304—00032—5/o.9

前　　言

本书是根据编者本人在大学里讲授数学物理方程课程时所用讲义的基础上整理、编写而成的。编写时为了满足电视大学学生，函授大学学生及职、业大等成人教育的需要，采取了删繁就简的原则，力求作到便于自学。本书也可供广大科技工作者参考使用。

全书共分七章，分别介绍常用的典型的数学物理方程的导出和定解问题的建立，以及常用的一些数学物理方程的解法。书中还介绍了贝塞尔函数和球函数等常用的一些特殊函数。

关于数学物理方程的解法，重点介绍了分离变量法，同时还介绍了积分变换法和格林函数方法，并且结合讲授这些方法配备了适当的例题。

本书每一章后面都附有少量习题，书后有附录，以帮助读者复习或深化文中所涉及的一些数学知识。

由于作者水平所限，本次编写时间也比较仓促，书中难免有不少缺点、错误，诚恳希望广大读者批评指正。

编　者

一九八七年五月

目　录

第一章 数学物理方程的导出和定解条件

§1-1 数学物理方程的导出

数学物理方程是指某些物理问题中所导出的偏微分方程和积分方程。本书着重介绍偏微分方程——包含未知函数偏微商的方程。

例如，研究振动和波、声学、电磁波等问题中建立的波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$$

研究固体中热传导问题所建立的热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}-k'\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$$

研究分子扩散问题而建立的扩散方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}-D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$$

以及研究静电场问题等所建立的泊松方程和拉普拉斯方程

$$\nabla^2 u=-f(x,y,z)$$

$$\nabla^2 u=0$$

式中 $\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$是一个算符，叫做拉普拉斯算符。

本书将重点介绍以上几种典型的偏微分方程的建立和解定解问题的一般方法。

本节就是通过分析某些具体物理问题，导出这些偏微分方程。也就是通过分析某一个物理问题，建立要研究的物理量如何依照时间、空间变化的关系。所用的方法是微分方法，也就是“化整为零”

将某物体或场无限细分，取一局部加以分析，在分析中用微分代替改变量，也就是从几何的观点看叫做“以直线代曲线”。具体步骤是

1. 选取要研究的物理量 $u(x,y,z,t)$。

2. 划取不在边界处的一小部分（无限细分、化整为零）来研究，分析邻近部分与这一小部分之间相互作用，依照物理规律建立起微分关系式。

3. 把结果整理成适当的形式。

由于所研究的物理量其自变量不只是一个，如依赖空间和时间等 $(x,y,z,t,\cdots)$ 自变量，这物理量是一个多元函数，因此建立起来的微分关系式往往就是包含未知函数偏微商的方程——偏微分方程。

一、弦的横振动

现在我们研究一段长度为 l，两端绷紧的弦的横振动情况，如图 1-1 所表示。

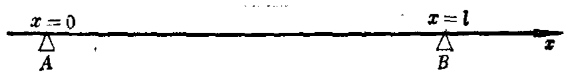

图 1-1

首先选取变量 $u(x,\ t)$ 为弦上 x 点处，t 时刻弦的横向位移（位移方向与弦的平衡方向 x 垂直）。为了抓住主要矛盾，建立物理模型，做一些必要的假设：

1. 设弦是均匀的，其线密度 $\rho(x,t)=\rho_0$ 是常数。

2. 弦是完全柔软的，放松时可以弯成任意形状而静止。也就是说弦对弯曲形变无抵抗。绷紧时，弦的平衡方向与 x 轴一致，在绷紧的弦上出现张力（相互拉力），张力方向沿着弦的切线方向。

3. 设弦只有横振动（垂直 x 方向的振动）。

4. 设振动是小振动，横向位移 $u(x,t)$ 和位移沿 x 方向的变

化率$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$等均为小量。

5. 弦本身的重量与张力相比是小量，可以忽略不计。

接着将弦无限细分为许多小段，选取其中不在边界处的一小段加以研究。如图 1-2。

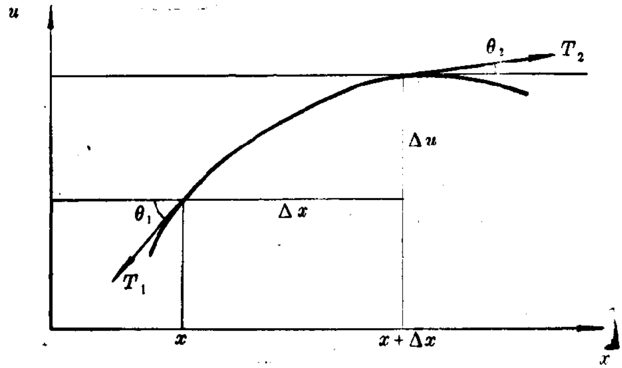

图 1-2

我们知道完全柔软的弦两端绷紧时，弦上出现张力，张力方向沿着弦的切线方向，设这一小段弦长为Δx，其两端张力分别为$T_1(x,t)$和$T_2(x+\Delta x,t)$设$T_1(x,t)$与x轴夹角为θ_1，$T_2(x+\Delta x,t)$与x轴夹角为θ_2(见图 1-2)。

弦发生横振动时，弦的伸长为

$$\Delta s=\int_x^{x+\Delta x} ds-\Delta x=\int_x^{x+\Delta x}\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}dx-\Delta x$$

因为在小振动情况下$\frac{\partial u}{\partial x}$是小量，所以$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$是二阶小量(可忽略)，所以

$$\Delta s=\int_x^{x+\Delta x} dx-x=0$$

因此，由于横振动是小振动，所以振动过程中，弦的伸长可以忽略不计。

根据胡克定律，弦的张力正比于弦的相对伸长，由于弦振动时弦本身没有新的伸长，因此其上张力不随时间改变，所以

$$T_1(x,t)=T_1(x)$$

$$T_2(x+\Delta x,t)=T_2(x+\Delta x)$$

将沿弦的切线方向的张力分解成沿水平方向（x 方向）和垂直方向（垂直 x 轴方向）的两个分力。因为弦振动属于机械振动，长为Δx 的一小段弦可看成小质点，依照牛顿第二定律可列出运动方程。

水平方向分力

$$T_2(x+\Delta x)\cos\theta_2-T_1(x)\cos\theta_1=0$$

这是由于弦只有横振动，而没有纵振动（沿 x 方向）。

垂直方向分力

$$T_2(x+\Delta x)\sin\theta_2-T_1(x)\sin\theta_1=\rho_0\Delta x\frac{\partial^2 u(x',t)}{\partial t^2}$$

这是由于弦的横振动满足牛顿第二定律，其中 x' 表示质心坐标。

由于已假设横振动是小振动，则

$$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\theta}}=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}}\doteq 1$$

所以有 $$\cos\theta_1=\cos\theta_2\doteq 1$$

因此由 $T_2(x+\Delta x)\cos\theta_2-T_1(x)\cos\theta_1=0$，得出

$$T_2(x+\Delta x)=T_1(x)=T$$

也就是说弦上张力不随地点改变。

由于是小振动，可设

$$\sin\theta_1=\mathrm{tg}\theta_1=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_x$$

$$\sin\theta_2=\mathrm{tg}\,\theta_2=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x+\Delta x}$$

于是垂直方向上的运动方程可改写成

$$T\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x+\Delta x}-T\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_x=\rho_0\Delta x\frac{\partial^2 u(x',t)}{\partial t^2}$$

当把弦无限细分，一小段弦长Δx趋于无限小时即当$\Delta x\to 0$时，改变量可用微分代替(以直代曲)，所以有

$$\Delta\left(T\frac{\partial u}{\partial x}\right)=T\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x+\Delta x}-T\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_x$$

$$=T\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]dx=T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx$$

于是得

$$T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx=\rho_0 dx\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

整理后得

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=\frac{T}{\rho_0}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

设 $c^2=\dfrac{T}{\rho_0}$为一常数，最后得到

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}=0$$

这个方程就是弦横振动方程，它是一个二阶线性齐次偏微分方程。

如果有一外力垂直地、分布地作用于弦的各部分上，设单位长度上外力为$F(x,t)$，于是方程可改写成

$$T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx+F(x,t)\,dx=\rho_0\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}dx$$

最后可得 $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t)$$

其中 $c^2=\dfrac{T}{\rho_0}$, $f(x,t)=\dfrac{F(x,t)}{\rho_0}$ 为单位质量上的外力。

这一方程是一个二阶线性非齐次偏微分方程。它是弦上有垂直地分布式外力作用时的横振动方程。

二、 细杆的纵振动

设有一长为 l 的细杆，沿 x 方向放置。由于某种原因引起其沿轴向发生纵振动，我们选取 $u(x,t)$ 为杆上 x 位置处的纵向位移'即静态平衡时位于 x 处的点（实际上应为一截面）在 t 时刻沿 x 方向的纵向位移。参见下图 1-3。

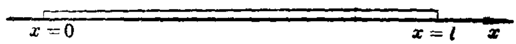

图 1-3

为了研究方便，我们作出如下的简化：

1、认为细杆上的纵振动是小振动，可以应用胡克定律。

2. 细杆是均匀的。即横截面 S 是均匀的， 杆上各处密度 $\rho(x,t)$ 和杨氏模量 $E(x,t)$ 都是常数 ρ_0、E。忽略伸缩时引起的密度变化。

3. 细杆，在各截面上各点处处纵向位移相同。因此细杆的纵振动可简化成位移只依赖于 x 坐标。

4. 只有纵振动没有横振动。只发行伸长、压缩形变，不发生切变，而且由伸长、压缩引起的横向变化也忽略不计。

把细杆无限细分为许许多多细小段，取一不在边界处的小段加以分析，如图 1-4。

设由于纵振动，细杆上 B 段长为 Δx 两端发生位移，x 处纵向位移为 $u(x,t)$，$x+\Delta x$ 处纵向位移为 $u(x+\Delta x,t)$

在纵振动过程中 B 段与临近段发生相互作用，在位置 x 处是 A、B 两段相互作用，两者之间应力为 $P(x,t)$，在位置 $x+\Delta x$ 处是 B、C 之间相互作用，应力为 $P(x+\Delta x,t)$，由于是小振动可应用胡克

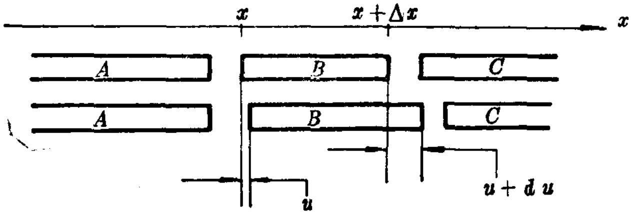

图 1-4

定律，以上两处的应力与该处相对形变有关，相对形变依赖于位置 x 和时间 t，可表示为$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$，因此

$$P(x,t)=E\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$$

$$P(x+\Delta x,t)=E\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x}$$

细杆的纵振动为机械振动，其上 B 段相当于一个小质点，应用牛顿第二定律得出

$$P(x+\Delta x,t)S-P(x,t)S=\rho_0 S\Delta x\frac{\partial^2 u(x',t)}{\partial t^2}$$

式中 x' 为质心坐标。

根据胡克定律，上式可改写成

$$SE\left[\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x}-\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right]=\rho_0 S\Delta x\frac{\partial^2 u(x',t)}{\partial t^2}$$

当无限细分时，B 段长度 $\Delta x\to 0$ 时，函数改变量可用微分表示得

$$SE\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right]dx=\rho_0 S dx\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2},$$

最后得到均匀细杆纵振动方程为

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}-a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}=0$$

其中 $a^2=\frac{E}{\rho_0}$为一常数。

若杆上受一分布式外力作用，设单位体积上的外力为$F(x,t)$，则得到

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}=f(x,t)$$

其中 $f(x,t)=\dfrac{F(x,t)}{\rho_0}$为单位质量上的外力。

三、高频传输线方程

高频传输线也称双线。在高频情况下必须考虑导线上的分布电感、分布电容、电导等的影响。双线不能看做集中参量电路，而必须看做分布参量系统。电路中电流、电压不仅是时间的函数，也随地点而异。高频传输线的等效电路如图 1-5。

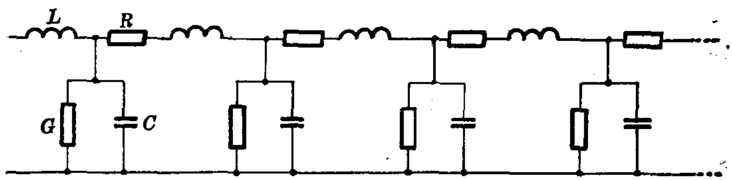

图 1-5

等效电路是把传输线无限细分为许多小段，在任一局部都以集中元件来等效分布参量的作用而作出来的。

为了简化设导线(双线)半径均匀，其长度大于大于线间距离。电阻、电感和电容沿导线均匀分布。在等效电路中在局部用无限个具有无限小参量的四端网络来代替均匀传输线。等效电路中所标的 L、C、R、G 分别代表单位来回线上的电感、电容、电阻和电导。

我们选取 $V(x,t)$、$i(x,t)$ 分别代表传输线上 x 处的电压和电流。

在等效电路中取一小节不在边界处的小网络来研究，如图 1-6。小网络长为Δx。

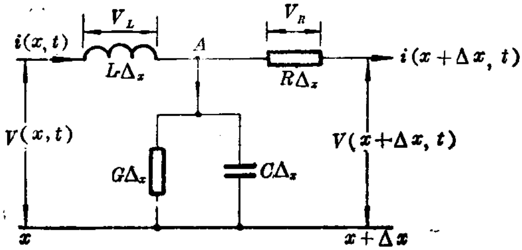

图 1-6

应用电路定理来进行分析，在节点 A 处，流进的电流等于流出去的电流，所以有

$$i(x,t)-C\Delta x\frac{\partial V_c(x,t)}{\partial t}-G\Delta xV(x,t)-i(x+\Delta x,t)=0$$

式中 $V_c(x',t)$为网络中电容的电压，$C\Delta x\frac{\partial V_c(x',t)}{\partial t}$为通过电容的电流。

再看电压，整个电路中电压降为零，所以有

$$V(x,t)-L\Delta x\frac{\partial i(x',t)}{\partial t}-R\Delta xi(x,t)-V(x+\Delta x,t)=0$$

式中 $L\Delta x\frac{\partial i(x,t)}{\partial t}$为电感上的自感电动势。

在这一小网络两端电流和电压有下列关系

$$i(x+\Delta x,t)=i(x,t)+\Delta i(x,t)$$

$$V(x+\Delta x,t)=V(x,t)+\Delta V(x,t)$$

代入前面两个式子中有

$$-C\Delta x\frac{\partial V(x,t)}{\partial t}-G\Delta xV(x,t)-\Delta i(x,t)=0$$

$$-L\Delta x\frac{\partial i(x,t)}{\partial t}-R\Delta xi(x,t)-\Delta V(x,t)=0$$

移项得

$$-\frac{\Delta i(x,t)}{\Delta x}=C\frac{\partial V(x,t)}{\partial t}+GV(x,t)$$

$$-\frac{\Delta V(x,t)}{\Delta x}=L\frac{\partial i(x,t)}{\partial t}+Ri(x,t)$$

当$\Delta x\to 0$时，得到

$$\begin{cases}-\dfrac{\partial i(x,t)}{\partial x}=C\dfrac{\partial V(x,t)}{\partial t}+GV(x,t)\\[2ex]-\dfrac{\partial V(x,t)}{\partial x}=L\dfrac{\partial i(x,t)}{\partial t}+Ri(x,t)\end{cases}$$

这一组偏微分方程组叫做电报方程。

如果这一均匀传输线是理想的，也就是均匀无损传输线。则其上电阻和电导均为零，即

$R=0, G=0$。上式简化成

$$\begin{cases}-\dfrac{\partial i(x,t)}{\partial x}=C\dfrac{\partial V(x,t)}{\partial t}\\[2ex]-\dfrac{\partial V(x,t)}{\partial x}=L\dfrac{\partial i(x,t)}{\partial t}\end{cases}$$

两式中若分别削去一个未知量，则得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 i(x,t)}{\partial x^2}-LC\dfrac{\partial^2 i(x,t)}{\partial t^2}=0\\[2ex]\dfrac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x^2}-LC\dfrac{\partial^2 V(x,t)}{\partial t^2}=0\end{cases}$$

若设$a^2=\dfrac{1}{LC}$，则

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 i(x,t)}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 i(x,t)}{\partial x^2}=0\\[2ex]\dfrac{\partial^2 V(x,t)}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x^2}=0\end{cases}$$

把这一组方程与弦横振动方程和细杆纵振动方程对比，它们都有相同的形式，物理上因为它们都反映波动的运动形式，所以叫这一类型的方程为波动方程。

类似地，由电磁场的麦克斯韦方程组，可以导出电磁场波动方程。

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t^2}-a^2\nabla^2\vec{E}=0 \qquad \left(a^2=\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\text{ 为常数}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}-a^2\nabla^2\vec{H}=0$$

式中 ∇^2 为拉普拉斯算符，在直角坐标系中它的形式为

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

以上两个方程中未知函数为矢量，$\vec{E}(x,y,z,t)$ 为电场强度，$\vec{H}(x,y,z,t)$ 为磁场强度。这两个方程为矢量形式的波动方程，它们反应电磁场的波动本质。

四、热传导方程

固体中由于温度不均匀，热量便从温度高的地方向温度低的地方传导，这就叫做热传导，它是一个不可逆过程。热传导强弱用热流强度 $\vec{q}$ 表示。单位时间里通过单位横截面积的热量叫做热流强度。温度场的不均匀性用温度梯度 $\nabla u(x,y,z,t)$ 表示，$u(x,y,z,t)$ 表示温度。梯度算符为 $\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)$ 是一个矢量算符。

热传导遵守付里叶热传导定律

$$\vec{q}=-k\nabla u$$

式中 k 叫做热传导系数，热传导定律写成标量形式为

$$q_x=-k\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$q_y=-k\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$q_z=-k\frac{\partial u}{\partial z}$$