普通高等教育“十五”国家级规划教材辅导书

离散数学

——学习指导与习题解答

孙吉贵　欧阳丹彤　杨凤杰　李占山

高等教育出版社

内容提要

本书为“普通高等教育‘十五’国家级规划教材”（孙吉贵等编）《离散数学》的配套辅导用书，给出了与教材相配套的学习指导和较完整的习题解答。在每一章中，首先列出该章的基本知识点与基本要求，在广泛收集资料的基础上，给出了该章的主要解题方法。同时，有些限于篇幅不便在教材中深入展开讨论的内容和难点，本书给出了进一步的阐述；对教程中的某些内容，也从不同角度进行了讨论，以期帮助读者拓宽思路，培养逻辑思维和抽象思维能力。

本书可作为高等学校计算机及相关专业本科教学的参考书，也可供科研人员和参加研究生入学考试的人员参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

离散数学——学习指导与习题解答/孙吉贵等编.—北京：高等教育出版社，2003.7

ISBN 7-04-012307-X

Ⅰ.离...　Ⅱ.孙...　Ⅲ.离散数学-高等学校-教学参考资料　Ⅳ.0158

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 026025 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-82028899		http://www.hep.com.cn
经　　销	新华书店北京发行所		
排　　版	高等教育出版社照排中心		
印　　刷	北京印刷三厂		
开　　本	787×1092　1/16	版　　次	2003 年 7 月第 1 版
印　　张	16	印　　次	2003 年 7 月第 1 次印刷
字　　数	290 000	定　　价	16.50 元

前　言

离散数学是计算机科学与技术一级学科的核心课程，是整个计算机学科的专业基础课。2002年8月，普通高等教育“十五”国家级规划教材（孙吉贵等编）《离散数学》已由高等教育出版社正式出版发行。作为该教材的补充，我们又整理、编写了这本教学参考书，给出了相配套的学习指导和较完整的习题解答，以期对离散数学的教与学有所裨益。

本书在章的编排上与（孙吉贵等编）《离散数学》教材的章的编号相同。在每一章中，首先列出该章的基本知识点与基本要求。然后，根据编者多年来在离散数学教学中所积累的经验，并在广泛收集资料的基础上，给出了该章的主要解题方法，希望对读者熟练地掌握和运用基本概念、基本定理以及提高自身的分析问题与解决问题的能力有所帮助。每章最后给出了教材中该章习题的解答。

作为（孙吉贵等编）《离散数学》教材的一个补充，有些限于篇幅不便在教材中深入展开讨论的内容和难点，在本书中可以找到进一步的阐述；对教材中的某些内容，在本书中也从不同角度进行了讨论。比如，教材中指出了从关系的集合表达式判断关系的性质，本书又分别阐述了从关系图和关系矩阵判断关系的性质的方法。对于同一类问题，尽量给出多种解法，目的在于帮助读者拓宽思路，提高解题的技巧，加强对基本概念和理论的透彻理解，学会运用所学的知识去解决各种问题，培养逻辑思维和抽象思维的能力。

我们深感要编写一本对读者真正有用的学习辅导书是多么困难，虽尽了很大努力，但由于时间仓促，水平有限，书中难免有不妥之处，恳请广大读者不吝指正。

编　者

2003年1月于吉林大学

责任编辑　董建波
封面设计　于文燕
版式设计　史新薇
责任校对　俞声佳
责任印制　孔　源

目　　录

第一章 集合论基础

1.1 基本要求

1. 掌握集合、子集、超集、空集、幂集、集合族的概念;了解两个集合间相等和包含关系的定义和性质,能够利用定义证明两个集合相等;熟悉常用的集合表示方法。

2. 掌握集合的基本运算:并、交、余、差、直乘积、对称差的定义以及集合运算满足的基本运算律,能够利用它们来证明更复杂的集合等式。

3. 掌握关系、二元关系、空关系、全域关系、相等关系、逆关系的概念以及关系的性质:自反性、对称性、反对称性、传递性;会做关系的乘积;了解关系的闭包运算:自反闭包、对称闭包、传递闭包。

4. 掌握等价关系、等价类、商集的概念;了解等价关系和划分的内在联系。

5. 掌握部分序关系、部分序集、全序关系、全序集的概念以及部分序集中的特殊元素:最大元、最小元、极大元、极小元、上确界、下确界的定义;能画出有限部分序集的 Hasse 图,并根据图讨论部分序集的某些性质。

6. 掌握映射、映像、1-1 映射等概念,会做映射的乘积;了解可数集合的概念;掌握可数集合的判定方法。

7. 了解关系在数据库中的应用(数据的增、删、改)以及划分在计算机中的应用。

1.2 主要解题方法

1.2.1 证明集合的包含关系

方法一 用定义来证明集合的包含关系是最常用也是最基本的一种方法。要证明 $A\subseteq B$,首先任取 $x\in A$,再演绎地证出 $x\in B$ 成立。由于选择的元素 x 是属于 A 的任何一个,而非特指的一个,故知给出的演绎证明对 A 中含有的每一个元素都成立。当 A 是无限集时,因为不能对 $x\in A$ 逐一地证明 $x\in B$ 成

立,所以证明时的假设"x 是任取的"就特别重要。

例 1.2.1　设 A、B、C、D 是任意 4 个非空集合,若 $A\subseteq C$,$B\subseteq D$,则 $A\times B\subseteq C\times D$。

证明　任取$(x,y)\in A\times B$,往证$(x,y)\in C\times D$。

由$(x,y)\in A\times B$ 知,$x\in A$,且 $y\in B$。又由 $A\subseteq C$、$B\subseteq D$ 知 $x\in C$,且 $y\in D$,因此$(x,y)\in C\times D$,故 $A\times B\subseteq C\times D$。

方法二　还有一种证明集合包含关系的方法,基于集合的交运算和并运算的两个基本性质:

$$A\subseteq B\Leftrightarrow A\cap B=A\Leftrightarrow A\cup B=B$$

以及一些已经证出的集合等式。现在就用此方法将上例再证一次。

由下面例 1.2.2 证明的结论有$(A\times B)\cap(C\times D)=(A\cap C)\times(B\cap D)$,若 $A\subseteq C$,$B\subseteq D$,则 $A\cap C=A$,$B\cap D=B$,因此$(A\times B)\cap(C\times D)=A\times B$,故 $A\times B\subseteq C\times D$。

1.2.2　证明集合的相等

方法一　若 A、B 是有限集,要证明集合 $A=B$,当然可以通过逐一比较两集合所有元素均一一对应相等即可,但当 A、B 是无限集时,一般通过证明集合包含关系的方法证得 $A\subseteq B$,$B\subseteq A$ 即可。

例 1.2.2　设 A、B、C、D 是任意 4 个集合,求证$(A\times B)\cap(C\times D)=(A\cap C)\times(B\cap D)$。

证明　首先证明$(A\times B)\cap(C\times D)\subseteq(A\cap C)\times(B\cap D)$。任取$(x,y)\in(A\times B)\cap(C\times D)$,则$(x,y)\in(A\times B)$,且$(x,y)\in(C\times D)$,故 $x\in A$,$y\in B$,$x\in C$,$y\in D$,即 $x\in A\cap C$,$y\in B\cap D$,因此$(x,y)\in(A\cap C)\times(B\cap D)$。

由于以上证明的每一步都是等价的,所以上述论证反方向进行也是成立的。故可证得$(A\cap C)\times(B\cap D)\subseteq(A\times B)\cap(C\times D)$。因此,$(A\times B)\cap(C\times D)=(A\cap C)\times(B\cap D)$。

方法二　还有一种证明集合相等的方法,可以通过已证出的集合等式,通过相等变换将待证明的等式左(右)边的集合化到右(左)边的集合,或者两边同时相等变换到同一集合。

例 1.2.3　设 A、B、C 是 3 个集合,已知 $A\cap B=A\cap C$,$A\cup B=A\cup C$,求证 $B=C$。

证法 1　使用反证法。假设 $B\neq C$,则必存在 x,满足 $x\in B$,且 $x\notin C$,或者 $x\notin B$,且 $x\in C$。不妨设 $x\in B$,且 $x\notin C$。

① 若 $x\in A$,则 $x\in A\cap B$,但 $x\notin A\cap C$,与 $A\cap B=A\cap C$ 矛盾。

② 若 $x\notin A$,则 $x\in A\cup B$,但 $x\notin A\cup C$,与 $A\cup B=A\cup C$ 矛盾。

所以原假设不对,因此有 $B=C$。

证法 2 利用已知以及集合运算的交换律、分配律和吸收律,有

$$
\begin{aligned}
B &= B\cap(A\cup B)\\
&= B\cap(A\cup C)\\
&= (B\cap A)\cup(B\cap C)\\
&= (C\cap A)\cup(B\cap C)\\
&= C\cap(A\cup B)\\
&= C\cap(A\cup C)\\
&= C
\end{aligned}
$$

1.2.3 判断给定关系的性质

给出一个关系,可以判断它是否具有自反性、反自反性、对称性、反对称性、传递性等性质,这既可以从以集合形式给出的关系来判断,也可以从关系的关系图或关系矩阵出发来进行判断。R 的集合表达式、关系图、关系矩阵三者均可以相互惟一确定,比较关系的这三种表示方法容易看出:关系的集合表达式便于书写,关系矩阵便于存储,而关系图直观、清晰。

方法一 从关系的集合表达式判断关系的性质。

设 R 为集合 A 上的关系。

(1) 若 $I_A\subseteq R$,则 R 具有自反性;

(2) 若 $I_A\cap R=\varnothing$,则 R 具有反自反性;

(3) 若 $R^{-1}=R$,则 R 具有对称性;

(4) 若 $R\cap R^{-1}\subseteq I_A$,则 R 具有反对称性;

(5) 若 $R^2\subseteq R$,则 R 具有传递性。

方法二 从关系图判断关系的性质。

定义 1.2.1 设 $A=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$,R 是 A 上的二元关系。以 A 中的元素为顶点,在图中用"∘"表示顶点。若 x_iRx_j,则从顶点 x_i 向 x_j 引有向弧,称所画出的图为 R 的关系图,记做 $G(R)$。

(1) 若 R 的关系图中每点都有反身弧,则 R 具有自反性;

(2) 若 R 的关系图中任意一点都没有反身弧,则 R 具有反自反性;

(3) 在 R 的关系图中,如果两不同点之间有有向弧的话,那么就一定成对出现,则 R 具有对称性;

(4) 在 R 的关系图中,若任意两个不同点之间的有向弧都不成对出现,则 R 具有反对称性;

(5) 对于 R 的关系图中的任意三点 a、b、c,不存在这样的情形:有 a 到 b 的

有向弧，b 到 c 的有向弧，但无 a 到 c 的有向弧，则 R 具有传递性。

方法三 从关系矩阵判断关系的性质

定义 1.2.2 设 $A=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，R 是 A 上的二元关系。称矩阵 $\boldsymbol{M}(R)=(r_{ij})_{n\times n}$ 为 R 的关系矩阵，其中

$$r_{ij}=\begin{cases}1, & x_iRx_j\\ 0, & \text{否则}\end{cases}$$

(1) 若 R 的关系矩阵的主对角线元素都为 1，则 R 具有自反性；

(2) 若 R 的关系矩阵的主对角线元素都为 0，则 R 具有反自反性；

(3) 若 R 的关系矩阵为对称矩阵，则 R 具有对称性；

(4) 在 R 的关系矩阵中，若以主对角线为对称的元素都不同时为 1，则 R 具有反对称性。

在关系矩阵中，若对 $\{0,1\}$ 中的元素的加法使用逻辑加法（$0+0=0,0+1=1+0=1+1=1$），则对于任意的 $R,S\subseteq A\times A$，均有

$$\boldsymbol{M}(R\cdot S)=\boldsymbol{M}(R)\cdot\boldsymbol{M}(S)$$

由此可见，可以使用矩阵的乘法（加法使用逻辑加法）来做关系的乘积，从而确定其集合表达式。故可以通过计算 $\boldsymbol{M}(R^2)$ 来判断 R 是否具有传递性。

(5) 如果 $\boldsymbol{M}(R)^2$ 中某元素 $s_{ij}=1$，那么 $\boldsymbol{M}(R)$ 相应位置元素 r_{ij} 也一定为 1，则 R 具有传递性。

例 1.2.4 设 $A=\{1,2,3,4\}$，R 是 A 上的二元关系，$R=\{(1,1),(3,1),(1,3),(3,3),(3,2),(4,3),(4,1),(4,2),(1,2)\}$。

(1) 画出 R 的关系图；

(2) 写出 R 的关系矩阵；

(3) 说明 R 是否具有自反性、反自反性、对称性、反对称性和传递性。

解 (1) R 的关系图如图 1.1 所示。

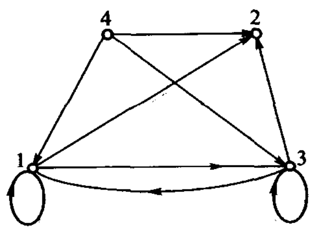

图 1.1

(2) R 的关系矩阵 $\boldsymbol{M}(R)$ 是 $\begin{bmatrix}1&1&1&0\\0&0&0&0\\1&1&1&0\\1&1&1&0\end{bmatrix}$

(3) **方法一** 从集合形式给出的关系看，由于 $(2,2)\notin R$，故 R 不具有自反性；由于 $(1,1)\in R$，故 R 不具有反自反性；由于 $(3,2)\in R$，但 $(2,3)\notin R$，故 R 不具有对称性；由于 $(3,1)\in R$，$(1,3)\in R$，故 R 不具有反对称性；经计算得

$$\begin{aligned}R^2&=\{(1,1),(3,1),(1,3),(3,3),(3,2),(4,3),(4,1),(4,2),(1,2)\}\\&=R\end{aligned}$$

故 R 具有传递性。

方法二 从关系图上看，由于结点 2 处无反身弧，故 R 不具有自反性；由于 $(1,1)\in R$，故 R 不具有反自反性；由于结点 2 与 4 之间的有向弧不是成对出现的，故 R 不具有对称性；由于结点 1 和 3 之间的有向弧是成对出现的，所以 R 不具有反对称性；由于不存在这样的情形：有 a 到 b 的有向弧，b 到 c 的有向弧，但无 a 到 c 的有向弧，可见 R 具有传递性。

方法三 从关系矩阵来看，由于关系矩阵主对角线元素不全是 1，故 R 不具有自反性；由于关系矩阵主对角线元素存在非零元素，故 R 不具有反自反性；由于该矩阵不是对称矩阵，故 R 不具有对称性；由于以主对角线为对称的元素有同时为 1 的，所以 R 不具有反对称性；经计算可得

$$\boldsymbol{M}(R^2)=\begin{bmatrix}1&1&1&0\\0&0&0&0\\1&1&1&0\\1&1&1&0\end{bmatrix}=\boldsymbol{M}(R)$$

故可知，R 具有传递性。

1.2.4 求非空集合上的所有等价关系

非空集合 A 上的一个等价关系 R，决定了 A 上的一个划分，这个划分就是商集 A/R，由 A/R 又确定了 A 上的一个等价关系，这个等价关系实际上就是 R。同样，非空集合 A 上的一个划分 π 确定了 A 上的一个等价关系 R，由 R 又决定了 A 上的一个划分，即商集 A/R，这个商集 A/R 实际上就是 π。因此，在 A 上的等价关系和 A 上的划分之间建立了一个一一对应，A 上等价关系的数目和 A 上的划分的数目是一样的。所以，要想求出非空集合 A 上的所有等价关系，只需先求出 A 上的所有划分，再找出由它们确定的等价关系即可。

例 1.2.5 设 $A=\{a,b,c\}$，求出 A 上的所有等价关系。

解 由第二类 Stirling 数易知，A 上共有 5 个划分：

$\pi_1=\{\{a,b,c\}\}$；

$\pi_2=\{\{a\},\{b,c\}\}$；

$\pi_3=\{\{b\},\{a,c\}\}$；

$\pi_4=\{\{c\},\{a,b\}\}$；

$\pi_5=\{\{a\},\{b\},\{c\}\}$。

因此，A 上的等价关系共有 5 个：

由 π_1 确定的等价关系是 A 上的全域关系 E_A；

由 π_2 确定的等价关系是 $I_A\cup\{(b,c),(c,b)\}$；

由 π_3 确定的等价关系是 $I_A\cup\{(a,c),(c,a)\}$；

由 π_4 确定的等价关系是 $I_A \cup \{(a,b),(b,a)\}$；

由 π_5 确定的等价关系是 A 上的相等关系 I_A。

1.2.5 判断可数集

要判断一个集合 A 是否为可数集，大致有如下方法：

方法一 按照可数集的定义，若 A 为有限集，则 A 一定是可数集，否则若 A 可与自然数集之间存在一个 1－1 映射，则 A 为可数集。

方法二 若 A 中所有元素可按某种规律排列出来，则 A 是可数集。

方法三 若 A 是两个不相交的可数集的并集，则 A 是可数集。

方法四 若 A 是某个已知是可数集的集合的子集，则 A 是可数集。

方法五 若 A 是多个可数无穷集合的并集，则 A 是可数集合。

方法六 若 A 是两个可数无穷集合的笛卡儿乘积，则 A 是可数集合。

例 1.2.6 证明全体整数做成的集合是可数集。

证法 1 建立自然数集到整数集的映射 σ 如下：

$$\begin{cases} x \to 1 & \text{若 } x=0 \\ x \to 2x & \text{若 } x>0 \\ x \to 2|x|+1 & \text{若 } x<0 \end{cases}$$

显然，σ 是自然数集到整数集的 1－1 映射。因此，整数集是可数集。

证法 2 因整数集可排成如下次序：

$$\{0,1,-1,2,-2,3,-3,\cdots\}$$

所以，整数集是可数集。

证法 3 因自然数集 $\{1,2,3,\cdots\}$ 是可数集，所以将该集合中每个元素加负号得到的集合 $\{-1,-2,-3,\cdots\}$ 亦是可数集，$\{0\}$ 是有限集，当然可数，因此，这三个互不相交的可数集合的并集，即整数集，仍是可数集。

证法 4 若已知有理数集合是可数集，则由于整数集是有理数集合的子集，因此，整数集是可数集。

由此例和方法五还知，$Z \times Z$（Z 为整数集）也是可数集。

1.2.6 部分序关系

求部分序集的极大元、极小元、最大元、最小元、上确界、下确界、Hasse 图的画法等，难度不大，只要基本概念清楚就能解答。

例 1.2.7 设 $*$、$\oplus$ 是集合 A 上的二元运算，对任意 $a,b,c \in A$，满足：

(1) $(a*b)*c = a*(b*c)$，$(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$；

(2) $a*b = b*a$，$a \oplus b = b \oplus a$；

(3) $a*(b \oplus a) = a$，$a \oplus (b*a) = a$。

现在定义 A 上的关系“≤”如下：

$$a \leqslant b \Leftrightarrow a * b = a$$

试证：

① ≤是 A 上的部分序关系；

② 对任意 $a,b \in A$，$\{a,b\}$均有一个上确界和下确界。

证明 ① 只需证明≤具有自反性、反对称性和传递性。

由题设“≤”关系的定义知 $a \leqslant b \Leftrightarrow a * b = a$，故 $a \leqslant a \Leftrightarrow a * a = a$，因此要证明≤具有自反性，只需证明 $a * a = a$。

$$\begin{aligned} 而\ a * a &= a * (a \oplus (b * a)) && 由(3)的第 2 式 \\ &= a * ((b * a) \oplus a) && 由(2)的第 2 式 \\ &= a && 由(3)的第 1 式 \end{aligned}$$

因此，$a \leqslant a$，≤具有自反性。

对任意 $a,b \in A$，如果 $a \leqslant b$ 且 $b \leqslant a$，由“≤”关系的定义知 $a * b = a$，且 $b * a = b$，再由(2)的第 1 式知 $a * b = b * a$，故 $a = b$。因此，≤具有反对称性。

对任意 $a,b,c \in A$，如果 $a \leqslant b$ 且 $b \leqslant c$，由“≤”关系的定义知 $a * b = a$，且 $b * c = b$，故

$$\begin{aligned} a * c &= (a * b) * c \\ &= a * (b * c) && 由(1)的第 1 式 \\ &= a * b \\ &= a \end{aligned}$$

因此 $a \leqslant c$，≤具有传递性。

综上，≤是 A 上的部分序关系。

② 对任意 $a,b \in A$，则有

$$\begin{aligned} a * (a \oplus b) &= a * (b \oplus a) && 由(2)的第 2 式 \\ &= a && 由(3)的第 1 式 \end{aligned}$$

即 $a \leqslant a \oplus b$。

$$b * (a \oplus b) = b \qquad 由(3)的第 1 式$$

即 $b \leqslant a \oplus b$。故 $a \oplus b$ 是$\{a,b\}$的上界。

若 c 是$\{a,b\}$的上界，即 $a \leqslant c, b \leqslant c$，则有 $a * c = a$，且 $b * c = b$，所以

$$\begin{aligned} a \oplus c &= (a * c) \oplus c \\ &= c \oplus (a * c) && 由(2)的第 2 式 \\ &= c && 由(3)的第 2 式 \end{aligned}$$

同理，$b \oplus c = c$，故$(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c) = a \oplus c = c$，所以

$$\begin{aligned} (a \oplus b) * c &= (a \oplus b) * ((a \oplus b) \oplus c) \\ &= (a \oplus b) * (c \oplus (a \oplus b)) && 由(2)的第 2 式 \end{aligned}$$