



普通高等教育“十五”国家级规划教材辅导书

离散数学

——学习指导与习题解答

孙吉贵 欧阳丹彤 杨凤杰 李占山



高等教育出版社

内容提要

本书为“普通高等教育‘十五’国家级规划教材”(孙吉贵等编)《离散数学》的配套辅导用书,给出了与教材相配套的学习指导和较完整的习题解答。在每一章中,首先列出该章的基本知识点与基本要求,在广泛收集资料的基础上,给出了该章的主要解题方法。同时,有些限于篇幅不便在教材中深入展开讨论的内容和难点,本书给出了进一步的阐述;对教程中的某些内容,也从不同角度进行了讨论,以期帮助读者拓宽思路,培养逻辑思维和抽象思维能力。

本书可作为高等学校计算机及相关专业本科教学的参考书,也可供科研人员和参加研究生入学考试的人员参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

离散数学——学习指导与习题解答/孙吉贵等编. —北京:
高等教育出版社, 2003. 7

ISBN 7-04-012307-X

I. 离... II. 孙... III. 离散数学-高等学校-教
学参考资料 IV. 0158

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 026025 号

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100011
总 机 010-82028899

购书热线 010-64054588
免费咨询 800-810-0598
网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>

经 销 新华书店北京发行所
排 版 高等教育出版社照排中心
印 刷 北京印刷三厂

开 本 787×1092 1/16
印 张 16
字 数 290 000

版 次 2003 年 7 月第 1 版
印 次 2003 年 7 月第 1 次印刷
定 价 16.50 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

前 言

离散数学是计算机科学与技术一级学科的核心课程,是整个计算机学科的专业基础课。2002年8月,普通高等教育“十五”国家级规划教材(孙吉贵等编)《离散数学》已由高等教育出版社正式出版发行。作为该教材的补充,我们又整理、编写了这本教学参考书,给出了相配套的学习指导和较完整的习题解答,以期对离散数学的教与学有所裨益。

本书在章的编排上与(孙吉贵等编)《离散数学》教材的章的编号相同。在每一章中,首先列出该章的基本知识点与基本要求。然后,根据编者多年来在离散数学教学中所积累的经验,并在广泛收集资料的基础上,给出了该章的主要解题方法,希望对读者熟练地掌握和运用基本概念、基本定理以及提高自身的分析问题与解决问题的能力有所帮助。每章最后给出了教材中该章习题的解答。

作为(孙吉贵等编)《离散数学》教材的一个补充,有些限于篇幅不便在教材中深入展开讨论的内容和难点,在本书中可以找到进一步的阐述;对教材中的某些内容,在本书中也从不同角度进行了讨论。比如,教材中指出了从关系的集合表达式判断关系的性质,本书又分别阐述了从关系图和关系矩阵判断关系的性质的方法。对于同一类问题,尽量给出多种解法,目的在于帮助读者拓宽思路,提高解题的技巧,加强对基本概念和理论的透彻理解,学会运用所学的知识去解决各种问题,培养逻辑思维和抽象思维的能力。

我们深感要编写一本对读者真正有用的学习辅导书是多么困难,虽尽了很大努力,但由于时间仓促,水平有限,书中难免有不妥之处,恳请广大读者不吝指正。

编 者

2003年1月于吉林大学

责任编辑	董建波
封面设计	于文燕
版式设计	史新薇
责任校对	俞声佳
责任印制	孔源

郑 重 声 明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其为人将承担相应的民事责任和行政责任，构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人给予严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话：(010) 82028899 转 6897 (010)82086060

传真：(010) 82086060

E-mail: dd@hep.com.cn

通信地址：北京市西城区德外大街4号

高等教育出版社法律事务部

邮编：100011

购书请拨打读者服务部电话：(010)64054588

目 录

第一章 集合论基础	1
1.1 基本要求	1
1.2 主要解题方法	1
1.2.1 证明集合的包含关系	1
1.2.2 证明集合的相等	2
1.2.3 判断给定关系的性质	3
1.2.4 求非空集合上的所有等价关系	5
1.2.5 判断可数集	6
1.2.6 部分序关系	6
1.3 习题解答	8
1.3.1 习题 1.1 解答	8
1.3.2 习题 1.2 解答	11
1.3.3 习题 1.3 解答	16
第二章 命题逻辑	20
2.1 基本要求	20
2.2 主要解题方法	20
2.2.1 证明命题公式恒真或恒假	20
2.2.2 公式蕴涵的证明方法	22
2.2.3 求主合取范式和主析取范式	24
2.2.4 联结词的转化和全功能集	28
2.2.5 综合应用题	31
2.3 习题解答	34
2.3.1 习题 2.1 解答	34
2.3.2 习题 2.2 解答	35
2.3.3 习题 2.3 解答	39
2.3.4 习题 2.4 解答	43
第三章 谓词逻辑	46
3.1 基本要求	46

3.2 主要解题方法	46
3.2.1 在谓词逻辑中将命题符号化	46
3.2.2 求谓词公式在解释下的真值	49
3.2.3 使用量词时的注意事项	52
3.2.4 谓词公式蕴涵的证明方法	54
3.2.5 求前束范式、Skolem 范式	56
3.2.6 正确使用谓词演算的推理规则	57
3.3 习题解答	61
3.3.1 习题 3.1 解答	61
3.3.2 习题 3.2 解答	62
3.3.3 习题 3.3 解答	63
3.3.4 习题 3.4 解答	66
3.3.5 习题 3.5 解答	68
第四章 图与网络	71
4.1 基本要求	71
4.2 主要解题方法	72
4.2.1 关于图中点的度的问题	72
4.2.2 关于连通图的问题	74
4.2.3 关于补图的问题	75
4.2.4 判断 Hamilton 图的问题	76
4.2.5 关于平面图的问题	78
4.2.6 关于平面图的着色问题	79
4.3 习题解答	80
4.3.1 习题 4.1 解答	80
4.3.2 习题 4.2 解答	84
4.3.3 习题 4.3 解答	87
4.3.4 习题 4.4 解答	97
4.3.5 习题 4.5 解答	99
4.3.6 习题 4.6 解答	101
4.3.7 习题 4.7 解答	102
第五章 数论基础	104
5.1 基本要求	104
5.2 主要解题方法	104
5.2.1 关于整除的问题	104
5.2.2 关于质数的问题	108

5.2.3 关于合同的问题	112
5.2.4 求解一次合同方程的方法	116
5.2.5 应用 Fermat - Euler 定理及 Fermat 小定理	117
5.3 习题解答	120
5.3.1 习题 5.1 解答	120
5.3.2 习题 5.2 解答	122
5.3.3 习题 5.3 解答	126
5.3.4 习题 5.4 解答	130
5.3.5 习题 5.5 解答	134
第六章 群与环	140
6.1 基本要求	140
6.2 主要解题方法	141
6.2.1 运算的性质	141
6.2.2 关于置换群	143
6.2.3 子群的判定及性质	144
6.2.4 关于元素的周期	147
6.2.5 关于同态与同构	148
6.2.6 关于环	150
6.3 习题解答	153
6.3.1 习题 6.1 解答	153
6.3.2 习题 6.2 解答	154
6.3.3 习题 6.3 解答	155
6.3.4 习题 6.4 解答	156
6.3.5 习题 6.5 解答	159
6.3.6 习题 6.6 解答	162
6.3.7 习题 6.7 解答	164
第七章 多项式 有限域	167
7.1 基本要求	167
7.2 主要解题方法	167
7.2.1 关于域的特征、素域	167
7.2.2 关于多项式环、剩余环	168
7.2.3 关于多项式的质式问题	172
7.2.4 有限域的构造	174
7.3 习题解答	176
7.3.1 习题 7.1 解答	176

7.3.2 习题 7.2 解答	178
7.3.3 习题 7.3 解答	180
7.3.4 习题 7.4 解答	182
7.3.5 习题 7.5 解答	183
7.3.6 习题 7.6 解答	185
第八章 格与布尔代数	189
8.1 基本要求	189
8.2 主要解题方法	190
8.2.1 应用格的性质	190
8.2.2 子格的判断	190
8.2.3 格的同态	192
8.2.4 布尔代数	196
8.3 习题解答	201
8.3.1 习题 8.2 解答	201
8.3.2 习题 8.3 解答	202
8.3.3 习题 8.4 解答	205
8.3.4 习题 8.5 解答	207
8.3.5 习题 8.6 解答	211
第九章 语言和有限状态机	217
9.1 基本要求	217
9.2 主要解题方法	217
9.2.1 语法结构与语言的关系	217
9.2.2 根据语法结构产生式的特点来判断语法结构的类型	218
9.2.3 求演绎树以及判断一个词是否属于一个语法产生的语言	219
9.2.4 求 2 型语法的 Backus - Naur form	219
9.2.5 求有限状态机的输出及用状态图和状态表来表示带有输出的有限状态机	220
9.2.6 求集合 A 的 Kleene 闭包	221
9.2.7 识别被有限状态自动机识别的语言	222
9.2.8 使用 Kleene 定理构造识别正则集合的有限状态自动机	223
9.2.9 构造 Turing 机以及求出 Turing 机工作时的执行情况	224
9.3 习题解答	226
9.3.1 习题 9.1 解答	226
9.3.2 习题 9.2 解答	230
9.3.3 习题 9.3 解答	234

9.3.4 习题 9.4 解答	235
9.3.5 习题 9.5 解答	238
参考文献	241

第一章 集合论基础

1.1 基本要求

1. 掌握集合、子集、超集、空集、幂集、集合族的概念;了解两个集合间相等和包含关系的定义和性质,能够利用定义证明两个集合相等;熟悉常用的集合表示方法。

2. 掌握集合的基本运算:并、交、余、差、直乘积、对称差的定义以及集合运算满足的基本运算律,能够利用它们来证明更复杂的集合等式。

3. 掌握关系、二元关系、空关系、全域关系、相等关系、逆关系的概念以及关系的性质:自反性、对称性、反对称性、传递性;会做关系的乘积;了解关系的闭包运算:自反闭包、对称闭包、传递闭包。

4. 掌握等价关系、等价类、商集的概念;了解等价关系和划分的内在联系。

5. 掌握部分序关系、部分序集、全序关系、全序集的概念以及部分序集中的特殊元素:最大元、最小元、极大元、极小元、上确界、下确界的定义;能画出有限部分序集的 Hasse 图,并根据图讨论部分序集的某些性质。

6. 掌握映射、映像、1-1 映射等概念,会做映射的乘积;了解可数集合的概念;掌握可数集合的判定方法。

7. 了解关系在数据库中的应用(数据的增、删、改)以及划分在计算机中的应用。

1.2 主要解题方法

1.2.1 证明集合的包含关系

方法一 用定义来证明集合的包含关系是最常用也是最基本的一种方法。要证明 $A \subseteq B$, 首先任取 $x \in A$, 再演绎地证出 $x \in B$ 成立。由于选择的元素 x 是属于 A 的任何一个, 而非特指的一个, 故知给出的演绎证明对 A 中含有的每一个元素都成立。当 A 是无限集时, 因为不能对 $x \in A$ 逐一地证明 $x \in B$ 成

立,所以证明时的假设“ x 是任取的”就特别重要。

例 1.2.1 设 A, B, C, D 是任意 4 个非空集合,若 $A \subseteq C, B \subseteq D$, 则 $A \times B \subseteq C \times D$ 。

证明 任取 $(x, y) \in A \times B$, 往证 $(x, y) \in C \times D$ 。

由 $(x, y) \in A \times B$ 知, $x \in A$, 且 $y \in B$ 。又由 $A \subseteq C, B \subseteq D$ 知 $x \in C$, 且 $y \in D$, 因此 $(x, y) \in C \times D$, 故 $A \times B \subseteq C \times D$ 。

方法二 还有一种证明集合包含关系的方法,基于集合的交运算和并运算的两个基本性质:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A \cup B = B$$

以及一些已经证出的集合等式。现在就用此方法将上例再证一次。

由下面例 1.2.2 证明的结论有 $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$, 若 $A \subseteq C, B \subseteq D$, 则 $A \cap C = A, B \cap D = B$, 因此 $(A \times B) \cap (C \times D) = A \times B$, 故 $A \times B \subseteq C \times D$ 。

1.2.2 证明集合的相等

方法一 若 A, B 是有限集,要证明集合 $A = B$,当然可以通过逐一比较两集合所有元素均一一对应相等即可,但当 A, B 是无限集时,一般通过证明集合包含关系的方法证得 $A \subseteq B, B \subseteq A$ 即可。

例 1.2.2 设 A, B, C, D 是任意 4 个集合,求证 $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$ 。

证明 首先证明 $(A \times B) \cap (C \times D) \subseteq (A \cap C) \times (B \cap D)$ 。任取 $(x, y) \in (A \times B) \cap (C \times D)$, 则 $(x, y) \in (A \times B)$, 且 $(x, y) \in (C \times D)$, 故 $x \in A, y \in B, x \in C, y \in D$, 即 $x \in A \cap C, y \in B \cap D$, 因此 $(x, y) \in (A \cap C) \times (B \cap D)$ 。

由于以上证明的每一步都是等价的,所以上述论证反方向进行也是成立的。故可证得 $(A \cap C) \times (B \cap D) \subseteq (A \times B) \cap (C \times D)$ 。因此, $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$ 。

方法二 还有一种证明集合相等的方法,可以通过已证出的集合等式,通过相等变换将待证明的等式左(右)边的集合化到右(左)边的集合,或者两边同时相等变换到同一集合。

例 1.2.3 设 A, B, C 是 3 个集合,已知 $A \cap B = A \cap C, A \cup B = A \cup C$, 求证 $B = C$ 。

证法 1 使用反证法。假设 $B \neq C$, 则必存在 x , 满足 $x \in B$, 且 $x \notin C$, 或者 $x \notin B$, 且 $x \in C$ 。不妨设 $x \in B$, 且 $x \notin C$ 。

① 若 $x \in A$, 则 $x \in A \cap B$, 但 $x \notin A \cap C$, 与 $A \cap B = A \cap C$ 矛盾。

② 若 $x \notin A$, 则 $x \in A \cup B$, 但 $x \notin A \cup C$, 与 $A \cup B = A \cup C$ 矛盾。

所以原假设不对,因此有 $B = C$ 。

证法 2 利用已知以及集合运算的交换律、分配律和吸收律,有

$$\begin{aligned}
 B &= B \cap (A \cup B) \\
 &= B \cap (A \cup C) \\
 &= (B \cap A) \cup (B \cap C) \\
 &= (C \cap A) \cup (B \cap C) \\
 &= C \cap (A \cup B) \\
 &= C \cap (A \cup C) \\
 &= C
 \end{aligned}$$

1.2.3 判断给定关系的性质

给出一个关系,可以判断它是否具有自反性、反自反性、对称性、反对称性、传递性等性质,这既可以从以集合形式给出的关系来判断,也可以从关系的关系图或关系矩阵出发来进行判断。 R 的集合表达式、关系图、关系矩阵三者均可以相互惟一确定,比较关系的这三种表示方法容易看出:关系的集合表达式便于书写,关系矩阵便于存储,而关系图直观、清晰。

方法一 从关系的集合表达式判断关系的性质。

设 R 为集合 A 上的关系。

- (1) 若 $I_A \subseteq R$, 则 R 具有自反性;
- (2) 若 $I_A \cap R = \emptyset$, 则 R 具有反自反性;
- (3) 若 $R^{-1} = R$, 则 R 具有对称性;
- (4) 若 $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$, 则 R 具有反对称性;
- (5) 若 $R^2 \subseteq R$, 则 R 具有传递性。

方法二 从关系图判断关系的性质。

定义 1.2.1 设 $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, R 是 A 上的二元关系。以 A 中的元素为顶点,在图中用“ $\circ$ ”表示顶点。若 $x_i R x_j$, 则从顶点 x_i 向 x_j 引有向弧,称所画出的图为 R 的关系图,记做 $G(R)$ 。

- (1) 若 R 的关系图中每点都有反身弧,则 R 具有自反性;
- (2) 若 R 的关系图中任意一点都没有反身弧,则 R 具有反自反性;
- (3) 在 R 的关系图中,如果两不同点之间有有向弧的话,那么就一定成对出现,则 R 具有对称性;
- (4) 在 R 的关系图中,若任意两个不同点之间的有向弧都不成对出现,则 R 具有反对称性;
- (5) 对于 R 的关系图中的任意三点 a, b, c ,不存在这样的情形:有 a 到 b 的

有向弧, b 到 c 的有向弧, 但无 a 到 c 的有向弧, 则 R 具有传递性。

方法三 从关系矩阵判断关系的性质

定义 1.2.2 设 $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, R 是 A 上的二元关系。称矩阵 $M(R) = (r_{ij})_{n \times n}$ 为 R 的关系矩阵, 其中

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & x_i R x_j \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$$

- (1) 若 R 的关系矩阵的主对角线元素都为 1, 则 R 具有自反性;
- (2) 若 R 的关系矩阵的主对角线元素都为 0, 则 R 具有反自反性;
- (3) 若 R 的关系矩阵为对称矩阵, 则 R 具有对称性;
- (4) 在 R 的关系矩阵中, 若以主对角线为对称的元素都不同时为 1, 则 R 具有反对称性。

在关系矩阵中, 若对 $\{0, 1\}$ 中的元素的加法使用逻辑加法 ($0+0=0, 0+1=1+0=1+1=1$), 则对于任意的 $R, S \subseteq A \times A$, 均有

$$M(R \cdot S) = M(R) \cdot M(S)$$

由此可见, 可以使用矩阵的乘法 (加法使用逻辑加法) 来做关系的乘积, 从而确定其集合表达式。故可以通过计算 $M(R^2)$ 来判断 R 是否具有传递性。

(5) 如果 $M(R)^2$ 中某元素 $s_{ij} = 1$, 那么 $M(R)$ 相应位置元素 r_{ij} 也一定为 1, 则 R 具有传递性。

例 1.2.4 设 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, R 是 A 上的二元关系, $R = \{(1, 1), (3, 1), (1, 3), (3, 3), (3, 2), (4, 3), (4, 1), (4, 2), (1, 2)\}$ 。

- (1) 画出 R 的关系图;
- (2) 写出 R 的关系矩阵;
- (3) 说明 R 是否具有自反性、反自反性、对称性、反对称性和传递性。

解 (1) R 的关系图如图 1.1 所示。

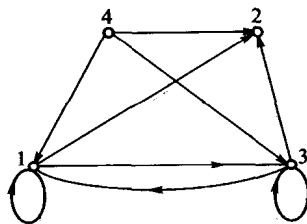


图 1.1

(2) R 的关系矩阵 $M(R)$ 是

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(3) 方法一 从集合形式给出的关系看, 由于 $(2, 2) \notin R$, 故 R 不具有自反性; 由于 $(1, 1) \in R$, 故 R 不具有反自反性; 由于 $(3, 2) \in R$, 但 $(2, 3) \notin R$, 故 R 不具有对称性; 由于 $(3, 1) \in R, (1, 3) \in R$, 故 R 不具有反对称性; 经计算得

$$R^2 = \{(1, 1), (3, 1), (1, 3), (3, 3), (3, 2), (4, 3), (4, 1), (4, 2), (1, 2)\}$$

$$= R$$

故 R 具有传递性。

方法二 从关系图上看,由于结点 2 处无反身弧,故 R 不具有自反性;由于 $(1,1) \in R$,故 R 不具有反自反性;由于结点 2 与 4 之间的有向弧不是成对出现的,故 R 不具有对称性;由于结点 1 和 3 之间的有向弧是成对出现的,所以 R 不具有反对称性;由于不存在这样的情形:有 a 到 b 的有向弧, b 到 c 的有向弧,但无 a 到 c 的有向弧,可见 R 具有传递性。

方法三 从关系矩阵来看,由于关系矩阵主对角线元素不全是 1,故 R 不具有自反性;由于关系矩阵主对角线元素存在非零元素,故 R 不具有反自反性;由于该矩阵不是对称矩阵,故 R 不具有对称性;由于以主对角线为对称的元素有同时为 1 的,所以 R 不具有反对称性;经计算可得

$$M(R^2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = M(R)$$

故可知, R 具有传递性。

1.2.4 求非空集合上的所有等价关系

非空集合 A 上的一个等价关系 R ,决定了 A 上的一个划分,这个划分就是商集 A/R ,由 A/R 又确定了 A 上的一个等价关系,这个等价关系实际上就是 R 。同样,非空集合 A 上的一个划分 π 确定了 A 上的一个等价关系 R ,由 R 又决定了 A 上的一个划分,即商集 A/R ,这个商集 A/R 实际上就是 π 。因此,在 A 上的等价关系和 A 上的划分之间建立了一个一一对应, A 上等价关系的数目和 A 上的划分的数目是一样的。所以,要想求出非空集合 A 上的所有等价关系,只需先求出 A 上的所有划分,再找出由它们确定的等价关系即可。

例 1.2.5 设 $A = \{a, b, c\}$,求出 A 上的所有等价关系。

解 由第二类 Stirling 数易知, A 上共有 5 个划分:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \{\{a, b, c\}\}; \\ \pi_2 &= \{\{a\}, \{b, c\}\}; \\ \pi_3 &= \{\{b\}, \{a, c\}\}; \\ \pi_4 &= \{\{c\}, \{a, b\}\}; \\ \pi_5 &= \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}. \end{aligned}$$

因此, A 上的等价关系共有 5 个:

由 π_1 确定的等价关系是 A 上的全域关系 E_A ;

由 π_2 确定的等价关系是 $I_A \cup \{(b, c), (c, b)\}$;

由 π_3 确定的等价关系是 $I_A \cup \{(a, c), (c, a)\}$;

由 π_4 确定的等价关系是 $I_A \cup \{(a, b), (b, a)\}$;

由 π_5 确定的等价关系是 A 上的相等关系 I_A 。

1.2.5 判断可数集

要判断一个集合 A 是否为可数集,大致有如下方法:

方法一 按照可数集的定义,若 A 为有限集,则 A 一定是可数集,否则若 A 可与自然数集之间存在一个 1-1 映射,则 A 为可数集。

方法二 若 A 中所有元素可按某种规律排列出来,则 A 是可数集。

方法三 若 A 是两个不相交的可数集的并集,则 A 是可数集。

方法四 若 A 是某个已知是可数集的集合的子集,则 A 是可数集。

方法五 若 A 是多个可数无穷集合的并集,则 A 是可数集合。

方法六 若 A 是两个可数无穷集合的笛卡儿乘积,则 A 是可数集合。

例 1.2.6 证明全体整数做成的集合是可数集。

证法 1 建立自然数集到整数集的映射 σ 如下:

$$\begin{cases} x \rightarrow 1 & \text{若 } x = 0 \\ x \rightarrow 2x & \text{若 } x > 0 \\ x \rightarrow 2|x| + 1 & \text{若 } x < 0 \end{cases}$$

显然, σ 是自然数集到整数集的 1-1 映射。因此,整数集是可数集。

证法 2 因整数集可排成如下次序:

$$\{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$$

所以,整数集是可数集。

证法 3 因自然数集 $\{1, 2, 3, \dots\}$ 是可数集,所以将该集合中每个元素加负号得到的集合 $\{-1, -2, -3, \dots\}$ 亦是可数集, $\{0\}$ 是有限集,当然可数,因此,这三个互不相交的可数集合的并集,即整数集,仍是可数集。

证法 4 若已知有理数集合是可数集,则由于整数集是有理数集合的子集,因此,整数集是可数集。

由此例和方法五还知, $Z \times Z$ (Z 为整数集)也是可数集。

1.2.6 部分序关系

求部分序集的极大元、极小元、最大元、最小元、上确界、下确界、Hasse 图的画法等,难度不大,只要基本概念清楚就能解答。

例 1.2.7 设 $*$ 、 $\oplus$ 是集合 A 上的二元运算,对任意 $a, b, c \in A$, 满足:

$$(1) (a * b) * c = a * (b * c), (a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c);$$

$$(2) a * b = b * a, a \oplus b = b \oplus a;$$

$$(3) a * (b \oplus a) = a, a \oplus (b * a) = a。$$

现在定义 A 上的关系“ $\leq$ ”如下:

$$a \leq b \Leftrightarrow a * b = a$$

试证:

① $\leq$ 是 A 上的部分序关系;

② 对任意 $a, b \in A$, $\{a, b\}$ 均有一个上确界和下确界。

证明 ① 只需证明 $\leq$ 具有自反性、反对称性和传递性。

由题设“ $\leq$ ”关系的定义知 $a \leq b \Leftrightarrow a * b = a$, 故 $a \leq a \Leftrightarrow a * a = a$, 因此要证明 $\leq$ 具有自反性, 只需证明 $a * a = a$ 。

$$\begin{aligned} \text{而 } a * a &= a * (a \oplus (b * a)) && \text{由(3)的第2式} \\ &= a * ((b * a) \oplus a) && \text{由(2)的第2式} \\ &= a && \text{由(3)的第1式} \end{aligned}$$

因此, $a \leq a$, $\leq$ 具有自反性。

对任意 $a, b \in A$, 如果 $a \leq b$ 且 $b \leq a$, 由“ $\leq$ ”关系的定义知 $a * b = a$, 且 $b * a = b$, 再由(2)的第1式知 $a * b = b * a$, 故 $a = b$ 。因此, $\leq$ 具有反对称性。

对任意 $a, b, c \in A$, 如果 $a \leq b$ 且 $b \leq c$, 由“ $\leq$ ”关系的定义知 $a * b = a$, 且 $b * c = b$, 故

$$\begin{aligned} a * c &= (a * b) * c \\ &= a * (b * c) && \text{由(1)的第1式} \\ &= a * b \\ &= a \end{aligned}$$

因此 $a \leq c$, $\leq$ 具有传递性。

综上, $\leq$ 是 A 上的部分序关系。

② 对任意 $a, b \in A$, 则有

$$\begin{aligned} a * (a \oplus b) &= a * (b \oplus a) && \text{由(2)的第2式} \\ &= a && \text{由(3)的第1式} \end{aligned}$$

即 $a \leq a \oplus b$ 。

$$b * (a \oplus b) = b \quad \text{由(3)的第1式}$$

即 $b \leq a \oplus b$ 。故 $a \oplus b$ 是 $\{a, b\}$ 的上界。

若 c 是 $\{a, b\}$ 的上界, 即 $a \leq c$, $b \leq c$, 则有 $a * c = a$, 且 $b * c = b$, 所以

$$\begin{aligned} a \oplus c &= (a * c) \oplus c \\ &= c \oplus (a * c) && \text{由(2)的第2式} \\ &= c && \text{由(3)的第2式} \end{aligned}$$

同理, $b \oplus c = c$, 故 $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c) = a \oplus c = c$, 所以

$$\begin{aligned} (a \oplus b) * c &= (a \oplus b) * ((a \oplus b) \oplus c) \\ &= (a \oplus b) * (c \oplus (a \oplus b)) && \text{由(2)的第2式} \end{aligned}$$