翟连林 编著

高中数学的概念·方法·能力

GAOZHONGSHUXUEDEGAINIANFANGFANENGLI

中央民族学院出版社

高中数学的概念·方法·能力

高中数学的概念·方法·能力

——从历届高考答卷谈起

翟连林　编著

中央民族学院出版社
一九八七年·北京

高中数学的概念·方法·能力

——从历届高考答卷谈起

翟连林 编著

中央民族学院出版社出版
(北京白石桥路27号)
新华书店北京发行所发行
河北省大厂县印刷厂印刷
787×1092毫米 32开本 3.9375印张 85千字
1987年11月第1版 1987年11月第1次印刷
印数：1—30,000册
ISBN 7—81001—002—6/G·3
(书号：7441·27) 定价：0.95元

前　　言

近年来，结合历届高考数学答卷失误的情况，我曾给一些地方高中毕业班教师和学生讲课。遵照国家教委抓基础、培养能力的指示精神，我通过典型例题，讲了如下四点意见：

第一，要重视数学概念的复习；

第二，要记准、用活定理、公式和法则；

第三，要熟练掌握重要数学思想方法；

第四，要总结解题经验，提高解数学综合题的能力。

这四个问题，不只是在高考复习时应紧紧抓住，就是在日常的教学活动中也要认真做好。打好这方面的坚实基础，不仅高考时会取得好成绩，而且也是进一步学好数学的必要条件。

翟连林

1987年2月于北京

目　录

前言

第一单元　数学概念的复习 …………………… (1)

第一讲　重视数学概念 …………………… (1)

练习一 …………………… (7)

第二讲　充分必要条件 …………………… (10)

练习二 …………………… (14)

第三讲　反三角函数 …………………… (17)

练习三 …………………… (24)

第二单元　数学定理、公式和法则的复习 …………………… (28)

第四讲　牢记定理、公式和法则 …………………… (28)

练习四 …………………… (34)

第五讲　三垂线定理，对称 …………………… (37)

练习五 …………………… (44)

第六讲　复数运算的几何意义及其应用 …………………… (46)

练习六 …………………… (52)

第三单元　数学思想方法的复习 …………………… (54)

第七讲　深刻领会数学思想方法 …………………… (54)

练习七 …………………… (61)

第八讲　分析法、综合法、反证法 …………………… (62)

练习八 …………………… (69)

第九讲　数学归纳法 …………………… (70)

练习九 …………………… (78)

第四单元　综合题的复习……………………………（ 80 ）
第十讲　解数学题的一般方法步骤……………（ 80 ）
练习十……………………………………………（ 88 ）
第十一讲　寻求解题思路的方法………………（ 91 ）
练习十一…………………………………………（102）
第十二讲　数列的综合题………………………（106）
练习十二…………………………………………（116）

第一单元　数学概念的复习

第一讲　重视数学概念

概念是对一些事物的现象和本质的概括和反映。在数学中，一切推理、计算都离不开概念，并且只有透彻理解、灵活运用概念，才能掌握运算的技能和技巧，才能具备正确、迅速、合理的逻辑论证能力和空间想象能力。所以说，正确理解数学概念是掌握数学基础知识的前提，是学好定理、公式、法则和数学方法以及提高解题能力的基础。

但是，这样的思想认识，不是每个学生都是十分清楚的。不少学生平时以为概念、定义比较简单，浮光掠影，一学而过；到了毕业复习阶段，只顾埋头解题，忽视对数学概念的复习、理解和运用，或者把数学概念当作僵死的条文，死记硬背。因而，高考时便出现形形色色的概念性错误。在历届高考的答卷上，这种错误不仅反映在直接考查基本概念的题解中，而且还突出地反映在计算题、证明题以及作图题的解答之中。由于概念不清而错误迭出的现象，屡见不鲜，俯拾即是。

例 1　$\mathrm{tg}x = 1$是$x = \dfrac{5\pi}{4}$的

（A）必要（非充分）条件；

（B）充分（非必要）条件；

（C）充分必要条件；

（D）既不充分又不必要的条件。

【答】（　　）

这是1985年全国高考文、理科一道考查充分条件、必要条件、充要条件的概念题，是一个单项选择题。按理说，只要概念清楚，由$x=\frac{5\pi}{4}$很容易推出$\mathrm{tg}x=1$（$\mathrm{tg}\frac{5\pi}{4}=\mathrm{tg}(\pi+\frac{\pi}{4})=\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}=1$），但由$\mathrm{tg}x=1 \nRightarrow x=\frac{5\pi}{4}$，由此$\mathrm{tg}x=1$是$x=\frac{5\pi}{4}$的必要而非充分的条件，所以选择（A）。

这样一道简单概念题，据北京市抽查文科答卷，竟有38%的高考生做错。

例2　当$x\in[-1,0]$时，在下面关系式中，正确的是

（A）$\pi-\arccos(-x)=\arcsin\sqrt{1-x^2}$；

（B）$\pi-\arcsin(-x)=\arccos\sqrt{1-x^2}$；

（C）$\pi-\arccos x=\arcsin\sqrt{1-x^2}$；

（D）$\pi-\arcsin x=\arccos\sqrt{1-x^2}$。

【答】（　　）

这是1986年全国高考理科一道考查反三角函数的概念题。据天津市抽查，有一半的高考生做错。据陕西省抽查，竟有60%高考生做错！

我们知道，解选择题通常有直接推算法、淘汰法、特殊值法、图解法和逆推法等方法。上述例1就是用的直接推算法。这种方法就是根据已知条件进行推理、计算，找出正确答案的方法。

例2可以用特殊值法验证，这种方法就是用满足题设条件的特殊值，检验哪个答案正确。在这里，题设条件是$x\in$

〔－1，0〕。我们取$x=0$，代入备选答案中，只有(C)对，因此选择（C）。

这个题目有百分之五、六十的高考生选错，除对反三角函数的概念不清以外，不会根据选择题的特点采用相应的解法，也是一个重要原因。这个题目即使反三角函数的概念清楚，若用直接推算法求解也是相当麻烦的。我做了一下，16开白纸要写两页，从时间来讲至少也要10钟。高考不仅考查会不会，还要考查做题的速度，考查准确、迅速的判断能力和计算能力。

例3　如果θ是第二象限角，且满足

$$\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}=\sqrt{1-\sin\theta}\text{，那么}\frac{\theta}{2}$$

（A）是第一象限角；

（B）是第三象限角；

（C）可能是第一象限角，也可能是第三象限角；

（D）是第二象限角。

【答】（　　）

这是1984年全国高考理科一道考查象限角的概念，正、余弦函数的性质以及算术根概念的试题。据上海市抽查，有61.5%的高考生做错。

这个题目可以从已知条件出发，应用直接推算法求解：

因为θ是第二象限角，即

$$2k\pi+\frac{\pi}{2}<\theta<2k\pi+\pi\qquad(k\in Z)$$

则 $k\pi+\frac{\pi}{4}<\frac{\theta}{2}<k\pi+\frac{\pi}{2}$。

又因为$\sqrt{1-\sin\theta}$只取非负值，

在同一坐标系内画出函数$y=\sin x$和$y=\cos x$的图象，可以知道，要使$\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}$非负，$k$只能取奇数，因此结论（B）是正确的。

通过上面的求解我们看到，采用直接推算法解选择题时，先要把各结论分析一下，使讨论有目的地向正确结论靠拢，并充分发挥形数结合的长处，依靠图形来进行讨论（注意：讨论过程只需用心算或在草稿纸上进行，不必正式写出）。这个题目我们也可以用淘汰法，即通过否定（排除）错误结论来肯定正确结论。

如果$\frac{\theta}{2}$是第二象限角，那么θ是第三或第四象限角，这与已知θ是第二象限角矛盾，所以结论（D）必须否定。

如果$\frac{\theta}{2}$是第一象限角，那么角$\frac{\theta}{2}$的终边必然在直线$y=x$的上方(否则θ不会是第二象限角)，但这样就有$\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}<0$，与$\sqrt{1-\sin\theta}>0$矛盾，所以结论（A)不成立，而这同时也说明（C）不能成立，于是根据指令性语言“其中只有一个结论是正确的”，因此选择（B）。

这种解法的出发点是否定错误结论，在讨论的过程中，

不必在正确结论上下功夫，甚至可以不考虑正确结论究竟是什么。

例 4 设$0<x<1, a>0$，$a\neq 1$，比较$|\log_a(1-x)|$与$|\log_a(1+x)|$的大小（要写比较过程）。

这是1982年一道全国高考理科试题，这个试题考查绝对值的概念，对数函数的性质以及两个实数比较大小的方法，这是一道关于基本概念的综合题。据江苏省抽查，这道满15分的试题，高考生得0—2分的占61%，得12—15分的仅占25.6%。据河南省抽查，每人平均只得3.7分。

例 5 在120°的二面角$P—a—Q$的两个面P和Q内（如图1），分别有点A和点B。已知点A和点B到棱的距离分别为2和4，且线段$AB=10$。

（1）求直线AB和棱a所成的角；

（2）求直线AB和平面Q所成的角。

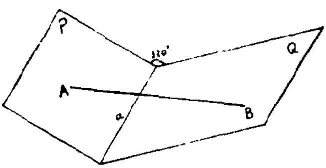

图 1

这是1981年的一道全国高考理科试题。解这个题目涉及到异面直线的概念、异面直线所成角的概念、二面角的平面角的概念、直线和平面所成角的概念以及直线和平面、平面和平面垂直的概念和性质。许多高考生由于没有深刻理解这些概念而不能作答。即使某一个概念不清，也会造成全题解错。据黑龙江省抽查，仅由于对平面的无限伸展性不理解，因

而在由平面外一点向平面引垂线时，把垂足按错位置的竟占36%；把异面直线看成相交直线、对直线与平面所成的角的概念不清的共占59%。这样就使得这道题的平均得分率只有31.7%。

上面我列举了高考中由于概念不清而失误的例子，这种概念性错误不是仅发生在哪一年，而是年年出现，年年都有许多高考生由于概念不清而丢分。所以希望老师们在复习中，提醒学生注意重视数学概念的复习。

在概念复习中，不仅要求学生记忆概念的条文，更要理解概念的本质，通过复习，使学生建立起一套较为完整的概念体系。

中学数学的主要概念有：数（包括实数、复数）的概念；绝对值、算术根的概念；等式、不等式的概念；根式的概念；集合的概念；函数（包括指数、对数、三角和反三角函数和幂函数）的概念；数列与极限的概念；排列、组合的概念；弧度的概念；命题的概念；充分条件与必要条件的概念；异面直线的概念；直线与直线、直线与平面、平面与平面所成角的概念；直线的倾角、斜率的概念；对称的概念；圆锥曲线的定义；曲线的参数方程的概念，等等。

下面小结一下。

这一讲我举了5个例子，都是考查数学概念的高考试题，从各省、市抽样调查来看，大约有50%的高考生由于概念不清而不会解答或解答错误。这个问题年年存在，而且比较严重，这就提醒我们，在指导学生复习时，一定要把数学概念放在一个重要地位。

练　习　一

指出下列各高考题解答中的错误，分析错误的原因，并加以纠正，给出正确解答。

1．填表

	函　　数	使函数有意义的x的实数范围
（1）	$y=\sqrt{-x^2}$	
（2）	$y=\sqrt{(-x^2)}$	
（3）	$y=\arcsin(\sin x)$	
（4）	$y=\sin(\arcsin x)$	
（5）	$y=10^{\lg x}$	
（6）	$y=\lg 10^x$	

（1982年全国高考理科试题）

【错解】（1）ϕ；（2）$x>0$；（3）$x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$；

（4）$|x|<1$；（5）$x>0, x\neq1$；（6）$x\neq0$。

（正确答案：（1）$x=0$；（2）x为任意实数；（3）同（2）；（4）$|x|\leqslant1$；（5）$x>0$；（6）同（2）。）

2．选择题

下面各小题都给出代号为A、B、C、D的四个结论，其

中只有一个结论是正确的①。把正确结论的字母代号写在题后的圆括内。

（1）三个数a、b、c不全为零的充要条件是：

（A）a、b、c都不是零；

（B）a、b、c中最多有一个是零；

（C）a、b、c中只有一个是零；

（D）a、b、c中至少有一个不是零。

【答】（　　）

（1983年全国高考理科试题）

【错解】因为a、b、c只有一个是零，则a、b、c三个数不全为零，所以，三个数a、b、c不全为零的充要条件是a、b、c中只有一个是零，故应选择（C）。

（2）在直角坐标系内，函数$y=|x|$的图象

（A）关于坐标轴、原点都不对称；

（B）关于原点对称；

（C）关于x轴对称；

（D）关于y轴对称。　　　【答】（　　）

（1983年全国高考文科试题）

【错解】因为$y=|x|$是过原点的直线，所以选择（B）。

（3）设复数$z=a+bi$（a、$b\in R$，且$b\neq 0$），则$|z^2|$、$|z|^2$、z^2的关系是

（A）$|z^2|=|z|^2\neq z^2$；

（B）$|z^2|=|z|^2=z^2$；

（C）$|z^2|\neq|z|^2=z^2$；

①这类选择题称单项选择题.

（D）互不相等。　　　　　　　　　【答】（　　）

（1986年上海高考理科试题）

【错解】$|z^2|$、$|z|^2$、z^2互不相等，故选择(D)。

（4）方程$x^2-79x+1=0$的两个根可分别作为

（A）一椭圆和一双曲线的离心率；

（B）两抛物线的离心率；

（C）一椭圆和一抛物线的离心率；

（D）两椭圆的离心率。

（1984年全国高考文科试题）

【错解】因为$x^2-79x+1=0$是抛物线方程，故选择（B）。

（正确答案：（1）D；（2）D；（3）A；（4）A。）

3．画图题（本题只要求画出图形）

（1）设$H(x)=\begin{cases}0, & 当x\leqslant 0,\\ 1, & 当x>0,\end{cases}$

（在已给出的直角坐标系中）画出函数$y=H(x-1)$的图象。

（2）（在已给出的极坐标系中）画出极坐标方程$(\rho-2)\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=0(\rho>0)$的曲线。

（1984年全国高考理科试题）

【错解】

（1）

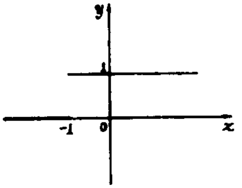

图 2

（2）

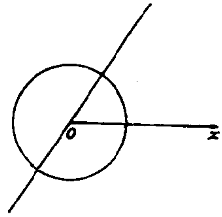

图 3

（正确答案：略）

第二讲　充分必要条件

我用两讲重点讲两个既重要又不易掌握的数学概念，这就是：充分、必要条件的概念；反三角函数的概念。

充分、必要条件是重要的数学概念，在大学的数学课程中到处要用到这个概念，因此，近几年高考年年都有考查这个重要概念的试题。

拿1986年来说，全国高考，广东与上海高考文、理科都出了一道直接考查这个重要数学概念的试题。

例 1　设甲是乙的充分条件，乙是丙的充要条件，丙是丁的必要条件，那么丁是甲的

（A）充分（且不是必要）条件；

（B）必要（且不是充分）条件；

（C）充要条件；

（D）既不充分也不必要的条件。

【答】（　　）