复变函数选论

广西教育出版社

复变函数选论

周正中　编著

广西教育出版社

复 变 函 数 选 论
周正中 编著
☆
广西教育出版社出版
（南宁市七一路7号）
广西新华书店发行　广西大学印刷厂印刷
*
开本850×1168 1/32　9印张　217千字
1990年9月第1版　1990年9月第1次印刷
印数：1—1500册
ISBN 7-5435-1035-9／G·815　定价：3.70

前　言

本书是在作者多年开设的复变函数选论课程教材的基础上，经过多次修改整理而成的，可作为数学专业的本科生和研究生开设复变函数选修课的教材或教学参考书。全书共分七章，前四章内容是大学本科复变函数课程内容的直接延伸；后三章属于专题性的，其主要内容是复变函数一些分支的基础理论，如果读者掌握了这些知识，就可以阅读有关分支的现代文献。

作者在编写此书时，力求做到如下几点：

1．文字叙述详细，问题提得明确，概念叙述和推理步骤清楚，由浅入深地阐明复变函数中有关分支基本理论的来龙去脉。

2．每一章、节尽可能配备一定数量的基本的典型例题，通过这些例题的示范，启发读者能做到举一反三，提高解题的技巧，对报考函数论研究生的大学本科生，将会从中得到益处。

3．作者尽可能将本学科一些最新成果编入教材，有利于读者尽快接触现代文献。

参加此书编写工作的还有周嘉章同志。本书稿完成后承蒙北京大学华歆厚博士、安徽大学郑建华老师的系统阅读，他们提出了一些宝贵意见，作者在此向这二位同志表示衷心感谢。

限于编者水平，缺点和差错在所难免，敬请读者批评指正。

周正中

于安徽师范大学数学系

1988年6月

目 录

第一章 柯西积分与最大模原理……（1）

§1.1 柯西积分的来历……（1）

§1.2 柯西积分定理……（2）

§1.3 最大模原理及其应用……（6）

§1.4 最大模原理的推广……（14）

习题一……（20）

第二章 正规族……（22）

§2.1 正规族的概念……（22）

§2.2 正规族的判定——蒙德尔定理……（23）

§2.3 维他利定理……（28）

§2.4 正规族概念的推广……（29）

§2.5 亚纯函数的正规族……（34）

习题二……（36）

第三章 保形映照……（38）

§3.1 单叶函数序列的极限函数定理……（38）

§3.2 保形映照基本定理……（39）

§3.3 保形映照的唯一性定理……（45）

§3.4 保形映照下的边界对应……（45）

§3.5 环形域的保形映照……（50）

§3.6 保形映照的例子……（51）

习题三……（63）

第四章 单叶函数……（65）

§ 4.1　面积原理与柯北常数……………………………………（66）
§ 4.2　变形定理与旋转定理……………………………………（68）
§ 4.3　单叶函数展开式中系数的模的一般界限……（71）
§ 4.4　凸像单叶函数……………………………………………（75）
习题四……………………………………………………………（82）
第五章　整函数……………………………………………………（84）
§ 5.1　无穷乘积的概念…………………………………………（84）
§ 5.2　无穷乘积收敛的判定……………………………………（86）
§ 5.3　无零点或只有有限个零点的整函数…………（92）
§ 5.4　有无穷个零点的整函数…………………………………（93）
§ 5.5　整函数的级………………………………………………（99）
§ 5.6　有限级整函数……………………………………………（104）
§ 5.7　典型乘积…………………………………………………（113）
§ 5.8　布洛赫定理与毕卡小定理………………………………（124）
§ 5.9　夏特基定理、毕卡大定理………………………………（135）
§ 5.10　蒙德尔正规定则、茹利雅定理…………………………（142）
习题五……………………………………………………………（147）
第六章　亚纯函数…………………………………………………（150）
§ 6.1　只有有限个极点的亚纯函数……………………………（150）
§ 6.2　有无穷个极点的亚纯函数………………………………（152）
§ 6.3　亚纯函数的柯西分解法…………………………………（156）
§ 6.4　普阿松—詹生公式………………………………………（160）
§ 6.5　亚纯函数的特征函数与奈望林纳第一基本定理…………（168）
§ 6.6　亚纯函数的级与型………………………………………（188）
§ 6.7　奈望林纳第二基本定理…………………………………（196）
§ 6.8　奈望林纳第二基本定理的应用…………………………（218）
§ 6.9　奈望林纳亏值……………………………………………（225）

习题六……………………………………………………（231）
第七章　H^p——空间……………………………………………（234）
§7.1　调和函数和次调和函数……………………（234）
§7.2　H^∞空间和N空间………………………………（249）
§7.3　H^p空间…………………………………………（261）
习题七……………………………………………………（274）
附录　参考书或文献……………………………………（276）

第一章　柯西积分与最大模原理

§1·1　柯西积分的来历

复数早在16世纪已经出现，但对复数的全面掌握和广泛运用，却迟至18世纪.

复变函数理论是19世纪最独特的数学创造之一，被公认为抽象科学中最和谐的理论. 在此以前，尤拉（Euler）已利用复变函数去计算实积分的值. 19世纪初（1811年），高斯（Gauss）已引进了有关复变函数论的一些基本概念.

众所周知，若将$z=x+iy$作为独立复变数来考虑函数$w=f(z)$，它就叫做复变函数，自然，w可写成$P(x,y)+iQ(x,y)$，其中$P(x,y)$、$Q(x,y)$是实变数x，y的一对实变函数，但这样定义的复变函数，如果不加限制，范围太广泛，不容易掌握其性质，所以在复变函数论中通常研究的对象限于解析函数. 所谓解析函数是指函数$f(z)$在区域D内处处有有限导数. 函数$f(z)=P(x,y)+iQ(x,y)$是解析函数的充要条件是$P(x,y)$及$Q(x,y)$在点$z=x+iy$可微，并且

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial y},\qquad \frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{\partial Q}{\partial x} \tag{1.1.1}$$

方程（1.1.1）称为柯西—黎曼微分方程，或称为柯西—黎曼条件. 这个工作由柯西和黎曼分别完成的。然而，早在1777年3月，尤拉向彼得堡科学院提交的一篇论文中，考虑了复变函数的积分：$\int f(z)\,dz$，并导出了关系式（1.1.1）. 达朗贝尔

（D'Alembert）在1752年关于流体力学的论文中也得到这两个方程。

拉普拉斯（Laplace）也考虑过复变函数的积分，他和尤拉、达朗贝尔的工作是复变函数论的前驱，也是我们当今研究的柯西积分的前驱。

1814年，柯西在论文《关于定积分理论的报告》中指出，方程（1.1.1）是严格地并且直接地建立由实到虚（复）过渡的桥梁，他说这两个方程包含了由实到虚过渡的全部理论。

1825年，柯西又写了《关于积分限为虚数的定积分的报告》的论文，他在这篇论文中，将$\int_a^b f(x)\,dx$中的常数及变数用复值代替的方法，来计算积分的问题。他处理了

$$\int_{x_0+iy_0}^{x+iy} f(z)\,dz$$

其中$z=x+iy$，并且小心地定义这个积分和数

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k+iy_k)\left[(x_{k+1}-x_k)+i(y_{k+1}-y_k)\right]$$

的极限，其中x_0，x_1，x_2，…，x_k，…，x及y_0，y_1，y_2，…，y_k，…，y是沿着从（x_0，y_0）到（x，y）的路径的分划点的坐标，这里$x+iy$是复平面上的一个点，并且积分路线沿着一条复的路径。他还证明，如果令$x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$，其中t是实数，那么结果与φ和ψ的选择无关，也就是说与路径无关，其条件是在两条不同的路径之间没有$f(z)$的间断点，这就是我们现在常常把复变函数的积分叫做柯西积分的来历。

§1.2 柯西积分定理

1825年柯西给出的积分定理是：

如果$f(z)$在单连通区域D内解析，且$f'(z)$在D内连续，则$f(z)$沿着D内任一条闭曲线C的积分等于零：$\int_C f(z)dz=0$。

柯西证明此定理时是否已经了解到格林（Green）1825年的工作（即众所周知的格林公式），现在还没有足够的理由肯定这一点。

柯西将复变函数$f(z)$作为复变数z的一元函数来研究，他把解析函数定义为$f'(z)$在区域D存在并连续的函数。柯西及黎曼等人在关于积分定理的证明中，均假设$f(z)$的导数$f'(z)$连续。1900年法国数学家古莎（Goursat）发表新的证明方法，不需要将$f(z)$分为实部与虚部，更为重要的是免去了$f'(z)$为连续的假设，因此，$f'(z)$的连续不仅在柯西定理中可以省略，同时对解析函数的定义也象我们现在的复变函数课本这样，即只须$f'(z)$在区域D内存在，不必假设$f'(z)$连续。

古莎对柯西积分定理的证明作了重要的修改，所以人们又把这个积分基本定理称为柯西一古莎定理。复变函数积分在实用上和理论上之所以重要，主要是由于解析函数很多重要性质是由这个定理派生出来的，因此，它是研究复变函数积分的钥匙。

古莎证明了，若$f'(z)$在闭简单围线C上及其内部都存在，则柯西定理成立。其证明可见：Trans. American Math. Soc. 1（1900），14—16，也可见Goursat-Hedrick：Functions of A Complex Variable（Ginn，1916），28节。在中译本的梯其玛希（Titchmarsh）函数论一书也可见到原著的证明，但是现在我国多数复变函数论的课本几乎都是沿用普里瓦洛夫著的复变函数引论的证明。编者本人在此给出一种不同以往的新证法，此证法较简便，能为广大读者所接受。

定理1.2.1 设$f(z)$在由闭的简单曲线C所围成的有界闭区域$\overline{D}$上解析，则

$$\int_C f(z)\,dz = 0.$$

证明　因为$f(z)$在$\overline{D}$上解析，所以对于任意给定的$\varepsilon>0$与对任意点$t\in\overline{D}$，存在点t的邻域$U_\delta(t)=\{z:|z-t|<\delta\}$，满足：当$z\in U_\delta(t)$时，有

$$|f(z)-f(t)-(z-t)f'(t)|<|z-t|\varepsilon \qquad (1.2.1)$$

当t取遍$\overline{D}$上的点时，$\left\{U_{\frac{\delta}{2}}(t)\right\}$构成$\overline{D}$的一个开复盖，因为$\overline{D}$为有界闭区域，所以在$\left\{U_{\frac{\delta}{2}}(t)\right\}$中只须选取有限个圆域就足以复盖住$\overline{D}$。设这有限个圆域为$U_{\frac{\delta_1}{2}}(t_1)$，$U_{\frac{\delta_2}{2}}(t_2)$，…，$U_{\frac{\delta_n}{2}}(t_n)$，

取$\delta_0=\min\left(\frac{\delta_1}{2},\frac{\delta_2}{2},\cdots,\frac{\delta_n}{2}\right)$，则$\delta_0>0$。

现在分别用平行于两个坐标轴，且具有相同距离不超过δ_0的两列直线，把$\overline{D}$分割成正方形小块和部分正方形小块的不规则区域。

设ζ与η是上述分割的任一小块区域$\overline{D}_i$上的任意两点，则点ζ正如区域$\overline{D}$上其它的点一样，应属于$U_{\frac{\delta_1}{2}}(t_1)$，$U_{\frac{\delta_2}{2}}(t_2)$，…，$U_{\frac{\delta_n}{2}}(t_n)$中的某一个，例如，$\zeta\in U_{\frac{\delta_k}{2}}(t_k)$，则

$$|\zeta-t_k|<\frac{\delta_k}{2}$$

因为 $|\zeta-\eta|\leqslant\delta_0\leqslant\frac{\delta_k}{2}$，所以

$$|\eta-t_k|=|\eta-\zeta+\zeta-t_k|\leqslant|\zeta-\eta|+|\zeta-t_k|<\frac{\delta_k}{2}+\frac{\delta_k}{2}$$

$=\delta_k$，从而得ζ，η都属于$U_{\delta_k}(t_k)=\{z:|z-t_k|<\delta_k\}$，于是

$\overline{D}_i\subset U_{\delta_k}(t_k)$.

故得对于上述分割的每一小块区域$\overline{D}_i$都有一点t，使(1.2.1)式对于$\overline{D}_i$上的每一点z都成立.

设小块区域$\overline{D}_i$的边界为l_i，其相应的正方形的边长为m_i，并注意到把$\overline{D}$分割后，除$\overline{D}$的边界C以外，每一线段分别是两个相邻小块区域的左右或上下的边界，从而分别沿着这些D_i的边界进行积分时，相当于每一个线段正反方向各积分一次，于是积分值相抵消，还剩下对C的正向积分一次，即有

$$\sum_i\int_{l_i}f(z)dz=\int_C f(z)dz \tag{1.2.2}$$

对于以正方形为小块的区域$\overline{D}_r$的边界的积分，由(1.2.1)式，并注意到$\int_{l_r}dz=0$，$\int_{l_r}zdz=0$，所以有

$$\left|\int_{l_r}f(z)dz\right|=\left|\int_{l_r}[f(z)-f(t)-(z-t)f'(t)]dz\right|$$

$$<\sqrt{2}\cdot m_r\cdot\varepsilon\cdot 4m_r=4\sqrt{2}\,m_r^2\cdot\varepsilon$$

对于以部分正方形为小块的不规则区域$\overline{D}_j$的边界的积分，因为它的周长不大于$4m_j+s_j$，其中s_j为边界曲线C的部分弧长，因此，

$$\left|\int_{l_j} f(z)dz\right| < \varepsilon\cdot\sqrt{2}m_j(4m_j+s_j).$$

从而得

$$\left|\sum_i\int_{l_i} f(z)dz\right| = \left|\sum_r\int_{l_r} f(z)dz+\sum_j\int_{l_j} f(z)dz\right|$$

$$< 4\sqrt{2}\varepsilon\sum(m_j^2+m_r^2)+\varepsilon\sqrt{2}l\sum s_n \qquad (1.2.3)$$

其中l为$\overline{D}$的直径，它是有限值. 因为$\sum(m_r^2+m_l^2)$为包含区域$\overline{D}$的面积，所以它也是一有限值. 而$\sum s_n$是C的长度，所以（1.2.3）的右方为小于ε与一常数的乘积，但左方与ε无关，因此，它必须等于零，所以$\sum\limits_i\int_{l_i} f(z)dz=0$，即

$$\int_C f(z)dz=0 \qquad \text{证毕.}$$

§1.3 最大模原理及其应用

最大模原理是解析函数的一个特征，在函数论中极为重要，它首先由柯西给出，其后有多种证明方法. 本节不打算介绍这些证明方法，而着重于介绍它的应用.

我们在复变函数论的教材中，已经熟悉了最大模原理，即若$f(z)$在区域D内解析，且在D内某一点z_0处其模达到最大值，则$f(z)$必为常数.

这个原理更精确地叙述为：

设$f(z)$在有界区域D内解析，且连续到边界C上，设$M=\max\limits_{z\in C}|f(z)|$，则在$D$内有$|f(z)|<M$，除非$f(z)$为

常数$Me^{i\alpha}$（α为实常数）。

这个原理应用到流体力学上，反映了流体运动的一条规律：流速的最大值不能在流动的区域内达到，除非是等速流动。

这个原理在数学本身应用更为广泛，例如众所周知的最小模原理、希瓦尔兹（Schwarz）引理以及调和函数的极值原理等。这一节我们要应用它来证明阿达马（Hadamard）三圆定理和卡拉皆屋独利（Caratheodory）不等式。

定理1.3.1（阿达马三圆定理）　设$f(z)$在圆环域：$r_1\leqslant|z|\leqslant r_3$上为解析，且$f(z)$在三圆$|z|=r_1$，$|z|=r_2$，$|z|=r_3$（$r_1<r_2<r_3$）的最大模为$M_1$，$M_2$，$M_3$，则

$$M_2\leqslant M_1^{\frac{\log r_3-\log r_2}{\log r_3-\log r_1}}\cdot M_3^{\frac{\log r_2-\log r_1}{\log r_3-\log r_1}}.$$

证明　设$F(z)=z^\lambda f(z)$，λ为待定常数，一般说来它是$r_1\leqslant|z|\leqslant r_3$上的多值解析函数，因为$z^\lambda$在$r_1\leqslant|z|\leqslant r_3(r_1>0)$，上不取0，$\infty$。因此，我们可以取定它的一个单值解析分支，由假设条件，就可对$F(z)$在$r_1\leqslant|z|\leqslant r_3$上应用最大模原理，得

$$|F(z)|=|z|^\lambda|f(z)|\leqslant\max\{r_1^\lambda M_1,\ r_3^\lambda M_3\},$$

特别是在$|z|=r_2$上，有

$$|f(z)|\leqslant\max\left[\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^\lambda M_1,\ \left(\frac{r_3}{r_2}\right)^\lambda M_3\right]$$

从而　$$M_2\leqslant\max\left[\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^\lambda M_1,\ \left(\frac{r_3}{r_2}\right)^\lambda M_3\right].$$

现在需要确定最优的λ的值。因为$\frac{r_1}{r_2}<1$，$\frac{r_3}{r_2}>1$，所以$\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^\lambda$和$\left(\frac{r_3}{r_2}\right)^\lambda$随$\lambda$的增大分别减小与增大，所以上面的不

等式的右端当λ满足：

$$r_1^{\lambda} M_1 = r_3^{\lambda} M_3$$

时，于是

$$M_2 \leqslant \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{\lambda} M_1,$$

M_2为最小（如图1所示）。再对上面的等式取对数得

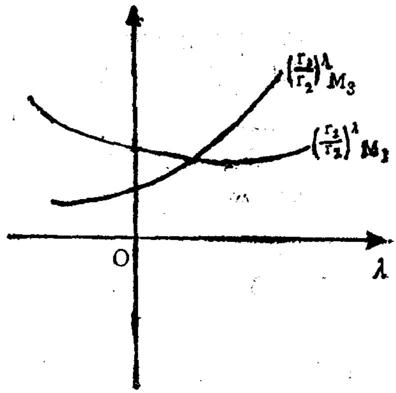

图1

$$\lambda = -\frac{\log M_3 - \log M_1}{\log r_3 - \log r_1}$$

所以

$$M_2 \leqslant \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{-\frac{\log M_3 - \log M_1}{\log r_3 - \log r_1}} \cdot M_1$$

$$= \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{-\frac{\log M_3/M_1}{\log r_3/r_1}} \cdot M_1$$

$$= e^{-\frac{\log M_3/M_1}{\log r_3/r_1}\log r_1/r_2} \cdot M_1$$

$$= e^{\frac{\log r_2/r_1}{\log r_3/r_1}\log M_3/M_1} \cdot M_1$$

$$= \left[\frac{M_3}{M_1}\right]^{\frac{\log r_2 - \log r_1}{\log r_3 - \log r_1}} \cdot M_1$$

$$= M_1^{1-\frac{\log r_2 - \log r_1}{\log r_3 - \log r_1}} \cdot M_3^{\frac{\log r_2 - \log r_1}{\log r_3 - \log r_1}}$$

$$=M_1^{\frac{\log r_3-\log r_2}{\log r_3-\log r_1}}\cdot M_3^{\frac{\log r_2-\log r_1}{\log r_3-\log r_1}}$$

等号仅当$F(z)$为常数时成立。 证毕。

对定理1.3.1得到的上述不等式两端取对数，得

$$\log M_2\leqslant\frac{\log r_3-\log r_2}{\log r_3-\log r_1}\log M_1+\frac{\log r_2-\log r_1}{\log r_3-\log r_1}\log M_3,$$

由此得

$$\begin{vmatrix}\log M_1 & \log r_1 & 1\\ \log M_2 & \log r_2 & 1\\ \log M_3 & \log r_3 & 1\end{vmatrix}\leqslant 0 \qquad (1.3.1)$$

三圆定理的几何意义如下：

设$\varphi(x)$为闭区间〔a,b〕上的实函数，若对闭区间〔a,b〕上任意三点$x_1<x<x_2$，有

$$\varphi(x)\leqslant\frac{x_2-x}{x_2-x_1}\varphi(x_1)+\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\varphi(x_2),$$

则称$\varphi(x)$为凸函数。

由此得，若$\varphi(x)$为凸函数，则

$$\begin{vmatrix}\varphi(x_1) & x_1 & 1\\ \varphi(x) & x & 1\\ \varphi(x_3) & x_3 & 1\end{vmatrix}\leqslant 0 \qquad (1.3.2)$$

由（1.3.1）与（1.3.2）得知阿达马三圆定理的几何意义是：$\log M(r)$是$\log r$的凸函数。

假设函数$f(z)$在$|z|\leqslant R$上解析，命$M(r)$表示$|f(z)|$在圆周$|z|=r$（$0\leqslant r\leqslant R$）上的最大值，由最大模原理立刻得出$M(r)$

是r的递增函数，且除去$f(z)$为常数外，$M(r)$是严格递增函数。取$A(r)$表示$\mathrm{Re}[f(z)]$在圆周$|z|=r$上的最大值，则$A(r)$是r的递增函数，显然有

$$A(r) \leqslant M(r)$$

另一方面，有下述定理：

定理1.3.2 当$0<r<R$时，有不等式

$$M(r) \leqslant \frac{2r}{R-r}A(R)+\frac{R+r}{R-r}|f(0)| \qquad (1.3.3)$$

这个不等式称为卡拉皆屋独利不等式。

证明 首先考虑$f(z)$为常数的情况，令$f(z)=A+iB$，则

$M(r)=\sqrt{A^2+B^2}$，$A(R)=A$，$|f(0)|=\sqrt{A^2+B^2}$，

$$\frac{2r}{R-r}[A+\sqrt{A^2+B^2}] \geqslant 0$$

从而得

$$\frac{2r}{R-r}A+\left(\frac{R+r}{R-r}-1\right)\sqrt{A^2+B^2} \geqslant 0$$

也就是

$$\frac{2r}{R-r}A(R)+\frac{R+r}{R-r}|f(0)|-M(r) \geqslant 0$$

由此得知，这时的（1.3.3）成立。

其次考虑$f(z)$不为常数的情况，并假定$f(0)=0$。由于$A(r)$与$M(r)$一样，也是r的递增函数，所以$A(R)>A(0)=0$，令

$$F(z)=\frac{f(z)}{2A(R)-f(z)} \quad 与 f(z)=u+iv,$$

则
$$F(z)=\frac{u+iv}{2A(R)-u-iv}$$