DAXUESHUXUE

大学数学

SUIJISHUXUE

随机数学

吴晓平 周木良 主编

科学出版社
www.sciencep.com

大 学 数 学

随 机 数 学

吴晓平 周木良 主编

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本套教材是教学改革和教学实践总结的结晶. 充分体现数学素质教育，注重教材内容的"新陈代谢"与现代化，按照教育部相应课程的改革计划与基本要求，吸取同类教材的优点，编成这套教材，定名为《大学数学》. 可作为理、工、农、医、经、管等专业的大学数学基础课程教材.

本书为《大学数学·随机数学》，主要内容包括三部分：第一部分为概率论基础；第二部分为数理统计；第三部分为随机过程初步. 每章有小结和复习题，书末附有习题答案或提示. 完成教学约需 70～90 学时.

图书在版编目(CIP)数据

大学数学·随机数学/吴晓平，周木良主编. —北京：科学出版社，2003. 8

ISBN 7-03-011905-3

Ⅰ. 大… Ⅱ. ①吴…②周… Ⅲ. 随机过程-高等学校-教材 Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 059004 号

责任编辑：徐一帆/责任校对：王望荣

责任印制：高 嵘/封面设计：李 静

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

湖北省京山金美印刷有限责任公司印刷

科学出版社出版 各地新华书店经销

*

2003 年 8 月第 一 版 开本：850×1168 1/32

2003 年 8 月第一次印刷 印张：13

印数：1—10 000 字数：325 000

定价：16.80 元

前 言

数学是思维的体操，数学技术是高新技术的本质，数学语言是科学的基本语言，数学计算是科学研究的主要手段之一，“数学是科学之王”. 当人类进入 21 世纪之时，数学水平已经成为衡量一个国家、一个民族科技文化素质、社会进步程度和发展潜力的重要标志. 高等学校的基本任务是培养合格人才，对学生全面素质和能力的培养已成为广大教育工作者的共识. 数学教育不仅是专业技术教育，也是文化素质的重要组成部分. 对理工类数学教育而言，既要重视其作为科学技术的基础作用，又要重视它作为文化基础的作用. 当前，各高校的教学改革方兴未艾，而教学改革的重点与难点是教学内容的改革，每门学科依照何种体系，讲授哪些内容则体现在教材之中.

我们总结分析了近些年来数学教学的经验，按照教育部《面向 21 世纪高等工程教育教学内容课程改革计划》的总体要求，根据原国家教育委员会颁布的理工类本科《高等数学课程教学基本要求》及教育部高等学校工科数学课程教学指导委员会拟定的数学课程教学基本要求，参照教育部制定的全国硕士研究生入学统一考试大纲，同时认真吸取国内多种同类教材的优点，编写了这套系列教材，定名为“大学数学”.

全套教材共分四册：微积分（上册）、微积分（下册）、线性代数及随机数学，包含了大学本科非数学专业的主要数学课程，可作为理、工、农、医、经、管等专业的大学数学课程教材. 在编写中，我们从以下几个方面进行了努力：

1. 在“知识、能力、素质”三维空间的框架下，合理选取内容，在保留必要的传统体系和经典内容的基础上，力图溶入现代数学的思想与知识.

2. 叙述详略得当，语言力求确切.

3. 对概念的引出注意了阐明实际背景，着重于概念的实质

的揭示.

4. 对一些重要定理的证明，注意了推证思路的阐述，并尽量设法结合几何直观.

本书为《大学数学·随机数学》，内容主要包括三部分.第一部分为概率论基础，由随机事件和概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理等五章构成；第二部分为数理统计，由抽样分布、参数估计、假设检验、回归分析、方差分析等五章构成；第三部分为随机过程初步，由随机过程的基本知识、马尔可夫链、平稳随机过程等三章构成.完成教学大约需 70～90 学时，本书具有如下特点：

1. 注重对基本概念、重要定理的完整表述，始终着眼于培养学生的随机数学思想及运用随机数学理论与方法研究处理随机模型的能力，学以致用的原则贯穿全书.正是基于这一想法，我们在传统教学内容的基础上补充了一些重要的概念及结论的描述，如伪随机数的产生方法、非参数假设检验方法等等.

2. 对一些需要较强理论基础的定理的证明过程进行了精简，有时干脆不予证明，只给出定理直观的解释及其重要意义.

3. 每章后面都有一个内容小结及复习题，期望对学生掌握本章的知识点、重难点等有所帮助.在复习题的组题方面，注重紧扣教学基本要求，题型新颖、难度适中，并简要地给出了大部分习题的参考答案或解题提示.

本书由吴晓平、周木良主编，刘新卫、金裕红、任耀峰任副主编，参加编写工作的其他同志还有：杨先山、王艳，全书由吴晓平、周木良统稿、定稿.

限于编者的学识，加上时间仓促，书中定有疏漏和不当之处，诚望教学同仁和广大读者批评指正，以便再版时予以修正.

编者

2003 年 6 月

目　录

第一篇　概　率　论

第二篇　数 理 统 计

第三篇　随机过程初步

第一篇 概率论

在自然界和人类社会中人们观察到的现象大体上可归结为两种类型.一类是事先可预言的,即在准确地重复某些条件下它的结果总是肯定的;或者根据它过去的状态,在相同的条件下可以预言将来的发展,我们称这一类现象为*确定性现象*或*必然现象*.例如在没有外力作用的条件下,作等速直线运动的物体必不会改变其运动状态,又如同性电荷相互排斥,这些现象一定会出现.早期的科学就是研究这一类现象的规律性,所应用的工具如高等数学、线性代数等也是大家所熟悉的.但人们还逐渐发现另一类现象,它的结果事先不可预言,即在相同条件下重复进行试验,每次结果未必相同,或虽知道过去的状况,但在相同的条件下未来的发展事先却不能肯定,这一类现象称之为*不确定性现象*或*偶然现象*.如抛一枚硬币,可能正面向上,也可能反面向上;新生儿童可能是男婴,也可能是女婴等都属于这一类现象.此类现象的特点是:在一定条件下具有多种可能的结果,但事先不能预言会出现哪种结果.如同确定性现象服从确定性的数量规律一样,不确定性现象也有规律可循,即对个别的不确定性现象进行观察,它时而出现这种结果,时而出现那种结果,呈现出一种偶然性.但对不确定性现象的大量重复观察,其结果都会呈现出某种固有的规律性,我们称其为*统计规律性*.如掷均匀硬币,若只掷几次,其正反面出现的情况是随机的,若多次重复投掷,其正反面出现的次数却几乎是相等的.再如,个别气体分子热运动是纷乱无定向的,但作为大量气体分子对器壁不断碰撞的结果,气体的压强是可以确定的等等,都是统计规律性的表现.这种对不确定性现象的个别次观察无规律、大量的重复观察

具有统计规律的现象就是随机现象.

概率论作为数学的一个分支,着重研究随机现象规律性的基本理论.它和数学的其他分支一样,是由于解决实际问题的需要而发展起来的.进入20世纪中叶,它已成为一门理论严谨、应用广泛的现代数学分支.其思想与方法有机地渗透于基础科学、技术科学、社会科学、经济科学、管理科学、军事科学等诸多学科之中,是近代科学技术发展的显著特征之一.此外,概率论与其他学科相结合发展了不少边缘学科,并成为当今诸如信息论、控制论、可靠性理论、人工智能及运筹学理论的重要基础.

第一章　随机事件和概率

第一节　随机试验、随机事件和样本空间

1.1　随机试验

我们把对自然现象进行观察(或进行一次科学实验)称为一个试验. 如果每个试验在相同条件下可以重复进行,且每次试验的结果事前不可预言,我们称其为一个**随机试验**. 也就是说,随机试验就是对随机现象所做的观察. 例如:

E_1:掷一均匀硬币,观察出现正面和反面的情况;

E_2:观察一射手对目标射击 N 次而命中目标的次数;

E_3:观察某一红绿灯控制时间段内,交通路口红灯前面等待通过的机动车数.

这些试验都具有如下特点:

(1) 每次试验的可能结果是多个,且所有可能的结果是预先知道的;

(2) 具体到某次试验会出现何结果,则不能预先确定;

(3) 试验在相同条件下可以重复进行.

概率论中,将具有这三个特点的试验称为**随机试验**. 本书今后所提到的试验均指随机试验. 我们正是通过随机试验来研究随机现象的.

1.2　随机事件与样本空间

由于随机试验的可能结果是多个,我们把随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为样本空间,通常记为 S. 把样本空间的元素,即试验 E 的每个可能的结果,称为样本点.

如前面所提到的试验 $E_i(i=1,2,3)$ 的样本空间 S_i 可分别表示为：

$S_1=\{$正面，反面$\}$；$S_2=\{0,1,2,\cdots,N\}$；$S_3=\{0,1,2,\cdots\}$.

注意到样本空间的元素是由试验的目的所确定的，且由于试验目的不同，样本空间可以相当简单，也可以相当复杂. 在具体问题中，写出试验的样本空间是描述随机现象的第一步. 此外，在研究实际问题时，人们往往更关心满足某种条件的一些样本点所组成的集合. 如连续掷均匀硬币三次的试验，观察其正面 H 和反面 T 出现的情况，则样本空间为

$$S_4=\{\mathrm{HHH},\mathrm{HHT},\mathrm{HTH},\mathrm{THH},\mathrm{HTT},\mathrm{THT},\mathrm{TTH},\mathrm{TTT}\},$$

若仅考虑“至少出现两次正面”的情况，即关心 S_4 的某个子集 {HHH，HHT，HTH，THH} 等等. 这些样本空间的子集合就是其对应试验的随机事件. 一般称随机试验 E 的样本空间 S 的某个子集 A 为试验 E 的一个随机事件，简称为事件.

对某试验而言，其样本空间中的每个样本点所组成的单点集称为基本事件. 任何一个事件都是由若干个基本事件所组成的. 我们说在一次试验中某个事件发生，当且仅当该事件所包含的某个基本事件发生，即事件所包含的样本点出现. 样本空间亦可称为基本事件空间，随机试验 E 的任一事件都可看成由基本事件空间中的若干个基本事件复合而成.

样本空间 S 作为自身的一个子集，也构成一个事件，由于在每次试验中必然出现 S 中的某个样本点，即每次试验 S 总是发生的，故称 S 为必然事件. 空集 $\varnothing$ 也作为一个事件，因其不包含任何样本点，故在每次试验中 $\varnothing$ 都不会发生，故称 $\varnothing$ 为不可能事件.

必然事件在试验中必然发生，不可能事件在试验中不会发生. 这两个事件本来没有不确定性，但为了研究问题方便，我们还是把它们作为随机事件的两种极端情况来处理.

1.3 事件的关系与运算

对随机试验，有这样或那样的事件发生，它们各有不同的特

性，彼此之间又有一定的联系，概率论的重要任务之一就是研究事件发生的可能性，尤其是要通过简单事件来研究复杂事件发生的可能性. 为此，需先讨论事件间的关系及事件的运算.

设试验 E 的样本空间为 S，而 $A,B,A_k(k=1,2,\cdots)$ 都是 S 的子集.

1. **事件的包含** 若事件 A 中的每一个样本点都属于事件 B，则称事件 A 包含于事件 B，记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$. 此时事件 A 发生必然导致事件 B 发生. 显然，对任何事件 A，必有 $\varnothing\subset A\subset S$.

2. **事件的相等** 若 $A\subset B$，且 $B\subset A$，则称事件 A 与 B 相等，记为 $A=B$.

3. **事件的逆** 对于事件 A，由所有不属于 A 的样本点所组成的事件称为 A 的逆事件，或称为 A 的对立事件，记为 $\overline{A}$. 显然，A 也是 $\overline{A}$ 的对立事件，即 $\overline{\overline{A}}=A$. 必然事件与不可能事件也互为对立事件.

4. **事件的并** 属于事件 A 或事件 B 的样本点组成的集合称为事件 A 与事件 B 的并，记为 $A\cup B$. 事件 $A\cup B$ 发生表示事件 A 与事件 B 中至少一个发生.

5. **事件的交** 同时属于事件 A 和事件 B 的样本点组成的集合称为事件 A 与事件 B 的交，记为 $A\cap B$ 或 AB. 事件 AB 发生表示事件 A 与事件 B 同时发生.

6. **事件的互不相容** 若 $AB=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B 互不相容. 事件 A 与事件 B 互不相容，表示事件 A 与事件 B 不同时发生.

7. **事件的差** 属于事件 A 而不属于事件 B 的样本点组成的集合称为事件 A 与事件 B 的差，记为 $A-B$. 事件 $A-B$ 发生表示事件 A 发生而事件 B 不发生. 显然，$A-B=A\overline{B}$，$\overline{A}=S-A$.

如果以平面上某一矩形表示样本空间 S，矩形内的每一点表示样本点，矩形中的圆 A 与圆 B 分别表示事件 A 与事件 B，则事件的关系和运算可通过平面上的几何图形表示(见图 1.1).

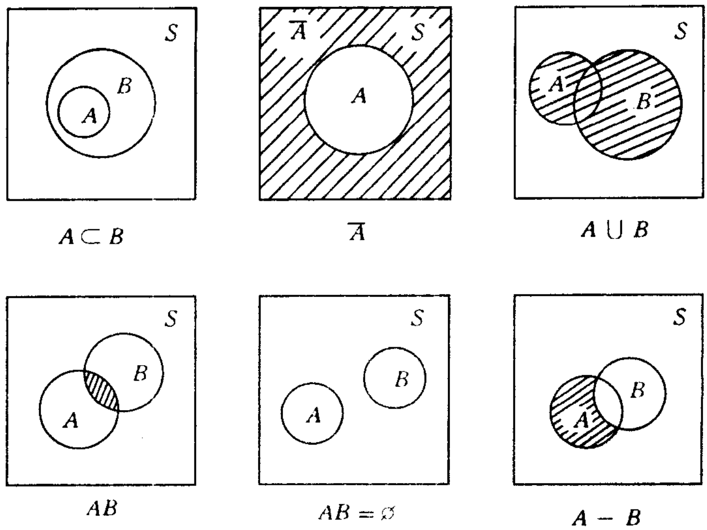

图 1.1 事件的关系与运算

可以看出，事件之间的关系及运算与集合论中集合的关系及运算类似，这种相似在建立概率论的严格数学基础时非常重要．要注意用概率论的语言来解释这些关系及运算，且会用这些关系与运算表示一些复杂的事件．

上述两个事件间的运算定义，可较容易地推广到多个，甚至可列多个事件的场合．

例如，对 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，用 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ 或 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ 表示事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的并．事件 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ 发生表示事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生．用 $A_1A_2\cdots A_n$ 或 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$ 表示事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的交，$\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$ 发生表示事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生．对可列个事件 $A_i(i=1,2,\cdots)$，记其并为 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i=\lim\limits_{n\to\infty}\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$，记其交为 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i=\lim\limits_{n\to\infty}\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$．

例如，向一个指定目标连续射击三次，以 A_i 表示事件"第 i 次射击命中目标"$(i=1,2,3)$．借助于 A_1,A_2,A_3 及事件的关系与运算可表示下列事件：

(1) 第一次射击命中，后两次射击均未命中，可表示为 $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3$ 或 $A_1-A_2-A_3$ 或 $A_1-(A_2\cup A_3)$．

(2) 前两次射击命中目标，而第三次射击未命中目标，可表示为：$A_1A_2\overline{A}_3$ 或 $A_1A_2-A_3$ 或 $A_1A_2-A_1A_2A_3$．

(3) 三次射击中只命中目标一次，可表示为 $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1A_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$．

(4) 三次射击至少命中目标一次可表示为 $A_1\cup A_2\cup A_3$．

(5) 三次射击中有两次击中目标，可表示为 $A_1A_2\overline{A}_3\cup A_1\overline{A}_2A_3\cup\overline{A}_1A_2A_3$．

(6) 三次射击均击中目标可表示为：$A_1A_2A_3$．

(7) 三次射击均未击中目标，可表示为 $\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$ 或 $\overline{A_1\cup A_2\cup A_3}$．

(8) 三次射击中不多于一次击中目标，可表示为：$A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1A_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1\overline{A}_2A_3\cup\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$．

(9) 三次射击中不多于二次击中目标，可表示为：$\overline{A_1A_2A_3}=\overline{A}_1\cup\overline{A}_2\cup\overline{A}_3$．

对于事件的运算，易验证有如下运算性质：

交换律　$A\cup B=B\cup A,\quad AB=BA$．

结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),\quad (AB)C=A(BC)$．

分配律　$(A\cup B)\cap C=AC\cup BC$，

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$．

德莫根定律　$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B},\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$．

对于 n 个事件，甚至可列个事件，德莫根定律亦成立．

第二节　随机事件的概率

随机事件在一次试验中虽然可能发生，也可能不发生，但按问