Calculus

微积分 下册

主　　编　王国灿
副主编　李志斌
　　　　万维明
　　　　蔡　敏

中国铁道出版社

微积分

下册

主　　编　王国灿
副 主 编　李志斌　万维明　蔡　敏

中国铁道出版社
2001年·北京

目　　录

下　册

第 11 章　多元函数的微分法 …… 263
§11.1　多元函数的极限与连续 …… 263
§11.2　偏导数与全微分 …… 269
§11.3　复合函数的微分法 …… 277
§11.4　隐函数的微分法 …… 282
§11.5　微分法在几何上的简单应用 …… 286
§11.6　向量值函数及其微分法 …… 292
§11.7　方向导数与梯度 …… 296
§11.8　泰勒公式 …… 300
§11.9　多元函数的极值及其求法 …… 302
习题十一 …… 310
第 12 章　重积分与第一类线、面积分 …… 315
§12.1　几何形体上的积分 …… 315
§12.2　二重积分的计算 …… 319
§12.3　三重积分的计算 …… 330
§12.4　第一类曲线积分的计算 …… 338
§12.5　第一类曲面积分的计算 …… 341
§12.6　重积分及第一类线、面积分的应用 …… 346
§12.7　含参变量的积分 …… 350
习题十二 …… 354
第 13 章　第二类线、面积分及各种积分之间的关系 …… 360
§13.1　第二类曲线积分的计算 …… 360
§13.2　第二类曲面积分的计算 …… 367

§13.3 各种积分之间的相互关系…………………………… 375
§13.4 曲线积分与路径无关的问题…………………………… 388
§13.5 场论初步…………………………………………………… 392
习题十三…………………………………………………………… 398
第 14 章 微分方程的基本概念及非线性微分方程 ………… 403
§14.1 微分方程的基本概念………………………………… 403
§14.2 一阶非线性方程的解法……………………………… 406
§14.3 高阶方程的解法……………………………………… 410
§14.4 微分方程应用举例…………………………………… 412
习题十四…………………………………………………………… 415
第 15 章 线性方程及线性方程组 …………………………… 418
§15.1 一阶线性方程………………………………………… 418
§15.2 线性方程的通解结构………………………………… 420
§15.3 高阶常系数线性方程………………………………… 423
§15.4 变系数线性方程……………………………………… 432
§15.5 线性方程组的通解结构及常系数线性方程组…… 435
习题十五…………………………………………………………… 445
第 16 章 差分方程初步 ………………………………………… 449
§16.1 差分方程的基本概念………………………………… 449
§16.2 一阶常系数线性差分方程…………………………… 453
习题十六…………………………………………………………… 456
附录三 快捷的微积分计算器——*Mathematica* 符号软件 … 459
§1 引言 ……………………………………………………… 459
§2 简单代数 ………………………………………………… 460
§3 微积分 …………………………………………………… 463
§4 幂级数和极限 …………………………………………… 478

第 11 章　多元函数的微分法

上册我们以一元函数极限为工具，研究了一元函数微积分。但在实际问题中，经常会遇到两个或两个以上自变量的多元函数，从本章开始，我们将以多元函数极限为工具，来研究多元函数的微积分。多元函数的微积分和一元函数微积分在基本概念、基本理论和基本方法上既有许多相似之处，又有许多本质上的不同。学习多元函数的微积分就要注意同一元函数微积分进行比较，掌握它们之间的联系与区别。本章将重点以二元函数为例来研究多元函数的微分法。

§11.1　多元函数的极限与连续

1. 多元函数概念

定义 1　设 D 为平面上的一个点集，若对每个点 $P(x,y)\in D$，变量 z 按照一定的法则 f 总有唯一确定的值和它对应，则称 z 是变量 x,y 的二元函数（或点 P 的函数）。记为 $z=f(x,y)$（或 $z=f(P)$）。

D 称为二元函数 $z=f(x,y)$ 的**定义域**，$W=\{z\,|\,z=f(x,y),(x,y)\in D\}$ 称为二元函数 $z=f(x,y)$ 的**值域**，点集 $\{(x,y,z)\,|\,z=f(x,y),(x,y)\in D\}$ 称为二元函数的**图形**。

一般地，二元函数 $z=f(x,y)$ 的图形是一张曲面。

类似地可以定义三元函数 $u=f(x,y,z)$，以及 n 元函数 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$。我们把二元及其以上的函数统称为**多元函数**。例如，函数 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 表示中心在原点，半径为 R 的上半球面，它的定义域为圆形闭区域：$x^2+y^2\leqslant R^2$。

例 1　求函数 $z=\ln(x^2+y^2-1)+\sqrt{2-x^2-y^2}$ 的定义域。

解　函数 $z=\ln(x^2+y^2-1)$ 的定义域为 $\{(x,y)\mid x^2+y^2>1\}$，

函数 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 的定义域为 $\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2\}$，

所以，函数 $z=\ln(x^2+y^2-1)+\sqrt{2-x^2-y^2}$ 的定义域为

$$\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2\leqslant 2\}。$$

2. 二元函数的极限

同一元函数类似，无论从理论上还是应用上，我们关注的是：当自变量充分靠近某个定点时，相应的函数值是否无限靠近某个常数，这就是所谓多元函数的极限问题。

现考虑二元函数 $z=f(x,y)$。假设它在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的附近有定义（但 P_0 可除外），如果当点 $P(x,y)$ 沿任意方式趋于 P_0（记作 $P\to P_0$）时，相应的函数值 $f(x,y)$ 与常数 A 无限接近，则称二元函数 $z=f(x,y)$ 当 $P\to P_0$ 时有极限或收敛，并称 A 是 $f(x,y)$ 在点 P_0 当 $P\to P_0$ 时的极限值。

与一元函数极限类似，所谓 $f(x,y)$ 无限接近于 A，是指 $|f(x,y)-A|$ 任意小，而且只要求当 P 充分接近于 P_0 时，$|f(x,y)-A|$ 任意小即可。而 P 充分接近于 P_0 可用 P 与 P_0 的距离 $\rho(P,P_0)$ 充分小来表示。于是，有下面的定义：

定义 2　设二元函数 $f(P)\equiv f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 附近有定义（但 P_0 可除外）。如果对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在正数 $\delta>0$，使得当 $0<\rho(P,P_0)<\delta$ 时，恒有

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon,$$

则称二元函数 $f(P)$ 当 $P\to P_0$ **时有极限或收敛**，且 A 称为 $f(P)$ 在点 P_0 处当 $P\to P_0$ 时的**极限**，记作

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=A \text{ 或 } f(P)\to A(P\to P_0)。$$

由于 $f(P)\equiv f(x,y)$，$\rho(P,P_0)=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$，所以上述定义也可叙述为：

如果对任给的 $\varepsilon>0$，总存在 $\delta>0$，使得当 $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 时，恒有

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon,$$

则称二元函数 $f(x,y)$ 当 $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\to 0$ 时有极限 A 或收敛于 A。记作

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A。$$

应当着重指出的是：尽管 $P\to P_0$ 和一元函数极限用 $x\to x_0$ 是类似的，都是以任意方式进行的。但是，在一维情形，只有两种可能，即 $x\to x_0^+$，$x\to x_0^-$；而在二维情形，$P\to P_0$ 的方式却是多种多样的，P 既可沿某个点列趋于 P_0，也可沿各种直线趋于 P_0，还可沿各种曲线趋于 P_0，这就导致二元函数极限要比一元函数极限复杂得多。例如，当 P 以某种特殊方式趋于 P_0 时，即使 $f(x,y)$ 趋于某个常数，我们也不能断定，当 $P\to P_0$ 时，$f(x,y)$ 有极限，因为 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 有极限，需 P 以任何方式趋于 P_0 时，$f(x,y)$ 都要趋于同一常数。

例 2　求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to a}}\dfrac{\sin(xy)}{x}$。

解　$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to a}}\dfrac{\sin(xy)}{x}=\lim\limits_{xy\to 0}\dfrac{\sin(xy)}{xy}\cdot\lim\limits_{y\to a}y=1\cdot a=a$。

例 3　研究函数 $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$ 在原点(0,0)处的极限。

由于 $(|x|-|y|)^2=x^2-2|xy|+y^2\geqslant 0$，所以 $|xy|\leqslant\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$，从而 $\left|\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}\right|=|x|\dfrac{|xy|}{x^2+y^2}\leqslant\dfrac{1}{2}|x|$。于是，对任给的 $\varepsilon>0$，取 $\delta=2\varepsilon$，则当 $|x-0|=|x|<\delta$，$|y-0|=|y|<\delta$ 时，便有

$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right|\leqslant\frac{1}{2}|x|<\varepsilon。$$

这说明 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}=0$。

例 4　研究函数 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 在原点(0,0)处的极限。

首先注意，这个函数除原点(0,0)外处处有定义，因此可以研

究它在(0,0)处的极限。今考虑让 $P(x,y)$ 沿任一直线 $y=kx$ 趋于(0,0)，则得

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{x^2(1+k^2)}=\frac{k}{1+k^2}。$$

由此可见，对不同的 k(即不同的直线)，上述极限值是不同的。从而由定义知，此函数在原点(0,0)不存在极限。

我们看到，证明二元函数在某一点没有极限一般比较容易一些，因为总可以沿不同的路线去试，而证明有极限一般是比较困难的。关于二元函数极限的运算法则的证明几乎同一元函数极限运算法则完全一致，现列举如下：

假设 $f(x,y)$，$g(x,y)$ 均在 (x_0,y_0) 的附近有定义，但 (x_0,y_0) 可除外，并且 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=A$，$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}g(x,y)=B$，则

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}[f(x,y)\pm g(x,y)]=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)\pm\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}g(x,y)$

$=A\pm B$；

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}[f(x,y)\cdot g(x,y)]=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)\cdot\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}g(x,y)$

$=A\cdot B$；

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}[f(x,y)/g(x,y)]=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)/\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}g(x,y)$

$=A/B(B\neq 0)$。

在本段结束之前，我们还想简述一下所谓二次极限。

让我们来考查下面的极限

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0}f(x,y)。$$

它的意思是：先将 y 看作是不变的，让 $x\to x_0$(这时 $f(x,y)$ 相当于 x 的函数)取极限，若此极限存在，它当然是 y 的函数，然后再让 $y\to y_0$ 取极限，若上述极限存在，则把它称为 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处先对 x 后对 y 的**二次极限或累次极限**。

类似地，可以考虑 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处先对 y 后对 x 的二次极限

$$\lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} f(x,y)。$$

相应地将原来的极限

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y)$$

称为 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的**二重极限**。

两个二次极限是否都存在且相等？反映了二次极限是否可以交换求极限的次序问题。这是一个十分有意义而且又非常复杂的问题。一般说来，两个二次极限不一定存在，即使都存在也不一定相等，也就是说，两个二次极限一般是不能随便交换次序的。

此外，二次极限与二重极限两者之间也没有蕴含关系，这是二元函数极限与一元函数极限的另一区别。容易证明：

函数 $f(x,y)=\dfrac{x-y}{x+y}$ 在 $(0,0)$ 的累次极限存在，但二重极限不存在；函数 $f(x,y)=x\sin\dfrac{1}{y}+y\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,0)$ 的二重极限存在，但累次极限不存在。

对以上内容有兴趣的读者可以去查数学分析方面的参考书，这里就不再展开了。

3. 二元函数的连续性

定义 3　设二元函数在点 (x_0,y_0) 的某个邻域内有定义，若 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)$，则称二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) **连续**。否则就称二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) **不连续或间断**。

由前面的例 4 的讨论知函数 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 当 $x\to 0, y\to 0$ 时极限不存在。所以在点 $(0,0)$ 间断。

如果二元函数 $f(x,y)$ 在平面上某个区域 D 上的每一点都连续，则称 $f(x,y)$ 在 D 上**连续**，或者称 $f(x,y)$ 是在 D 上的**连续函数**。

多元连续函数具有和一元连续函数完全相类似的一系列性质，而且证明也基本相同，下面将它们列出来，以便应用。

(1) 有限个连续函数的和、差、积、商(分母不为零处)仍连续。

(2) 连续函数构成的复合函数仍是连续函数。例如,若 $z=f(u,v)$ 是 (u,v) 的连续函数,而 $u=\varphi(x,y)$, $v=\psi(x,y)$ 是 (x,y) 的连续函数,则复合函数

$$z=f(\varphi(x,y),\psi(x,y))$$

是 (x,y) 的连续函数。

借助于连续函数的这一性质,可以很方便地求出多元函数在连续点的极限。例如,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{e^{xy}\cos y}{1+y^2+\ln(1+x)}=\left.\frac{e^{xy}\cos y}{1+y^2+\ln(1+x)}\right|_{\substack{x=0\\ y=0}}=1。$$

4. 有界闭区域上多元连续函数的性质

(1) **有界性定理** 若 $f(x,y)$ 在有界闭区域 $\overline{D}$ 上连续,则 $f(x,y)$ 在 $\overline{D}$ 上必有界,即存在 $M>0$,使得在 $\overline{D}$ 上恒有 $|f(x,y)|\leqslant M$。

(2) **最大值、最小值定理** 若 $f(x,y)$ 在有界闭区域 $\overline{D}$ 上连续,则 $f(x,y)$ 在 $\overline{D}$ 上必取得最大值、最小值。即存在点 (x_1,y_1), $(x_2,y_2)\in\overline{D}$,使得对一切 $(x,y)\in\overline{D}$,有

$$f(x_1,y_1)\leqslant f(x,y)\leqslant f(x_2,y_2),$$

也即 $f(x_1,y_1)$ 与 $f(x_2,y_2)$ 分别为 $f(x,y)$ 在 $\overline{D}$ 上的最大值和最小值。

(3) **一致连续性定理** 若 $f(x,y)$ 在有界闭区域 $\overline{D}$ 上连续,则 $f(x,y)$ 在 $\overline{D}$ 上必一致连续,即对任给的 $\varepsilon>0$,总存在一个仅与 ε 有关的 $\delta>0$,使得对于 $\overline{D}$ 上的任意两点 (x_1,y_1), (x_2,y_2),只要

$$|x_1-x_2|<\delta,\ |y_1-y_2|<\delta,$$

便有

$$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|<\varepsilon。$$

(4) **介值定理** 设 $f(x,y)$ 在有界闭区域 $\overline{D}$ 上连续,且 m 与 M 分别为 $f(x,y)$ 在 $\overline{D}$ 上的最小值与最大值。若 $m<M$(即 $f(x,y)$ 不是常数),则对任意 $m<C<M$,必存在点 $(x_0,y_0)\in\overline{D}$,使 $f(x_0,y_0)=C$。

§11.2　偏导数与全微分

1. 偏导数

大家知道，一元函数的导数

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

是由函数增量 Δy 对自变量增量 Δx 在各种意义下的变化率而抽象出来的。

对多元函数而言，也有变化率问题。但由于自变量的增多，使得问题变得较为复杂。在实际问题中，常常要考虑的是：多元函数只对某个自变量的变化率（其余变量看作是不变的）。例如，在热传导问题中，要研究物体中各点随时间变化的温度函数

$$u=f(x,y,z,t)$$

对时间 t 的变化率。这种只考虑多元函数对某自变量（其他变量看作常数）的变化率称为偏导数。

下面只给出二元函数偏导数定义，至于三元以上函数的偏导数读者可自行给出。

定义 1　设二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 变到点 $(x_0+\Delta x,y_0)$，于是函数 z 取得增量（称为**偏增量**）

$$\Delta_x z=f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0),$$

若极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

存在，则称此极限值为二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处关于自变量 x 的**偏导数**，记作

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}\ 或\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}\qquad 或\ f_x(x_0,y_0)。$$

类似地，可以定义二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处关于自变量 y 的偏导数

$$f_y(x_0,y_0)=\frac{\partial z}{\partial x}\bigg|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}。$$

若 $z=f(x,y)$ 在某区域 D 上每一点 (x,y) 都有偏导数，那么显然它们都是 (x,y) 的函数，把它们称为**偏导函数**，记作

$$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\text{或}\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\text{或 } f_x(x,y),f_y(x,y)。$$

由定义可知，求偏导数实际上就是把某一变量看作常数，对另一变量求导数，原则上没有新问题。

例 1 设 $z=2x\sin y+e^{xy}\ln x$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{\substack{x=1\\ y=0}}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{\substack{x=1\\ y=0}}$。

解 这是一个二元函数，将 y 看作常数，对 x 求导数，便得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2\sin y+ye^{xy}\ln x+\frac{1}{x}e^{xy},\frac{\partial z}{\partial x}\bigg|_{\substack{x=1\\ y=0}}=1。$$

再将 x 看作常数，对 y 求导数，便得

$$\frac{\partial z}{\partial y}=2x\cos y+xe^{xy}\ln x,\frac{\partial z}{\partial y}\bigg|_{\substack{x=1\\ y=0}}=2。$$

例 2 设 $r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$，求 $\frac{1}{r}$ 的偏导数。

解 首先注意 $\frac{1}{r}$ 是三元函数，故有三个偏导数，求 $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)$ 就是将 y,z 看作常数，对 x 求导数，因此，

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{-1}{r^2}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{1}{r^2}\cdot\frac{(x-x_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}$$

$$=\frac{x_0-x}{r^3}。$$

再由对称性，即知

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{y_0-y}{r^3},\frac{\partial r}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{z_0-z}{r^3}。$$

我们知道，对一元函数而言，可导必连续，那么对二元函数这个结论是否还成立呢？让我们来研究函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{当 } x^2+y^2\neq 0 \\ 0 & \text{当 } x^2+y^2=0\end{cases}。$$

由于

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0,$$

$$f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=0。$$

但由前面的例 4 的讨论知，函数 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 当 $x\to 0, y\to 0$ 时极限不存在。

由此可见，$f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处的两个偏导数都存在，但 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处却不连续。这再次体现了二元函数与一元函数的不同之处。

我们还知道，对一元函数 $y=f(x)$ 来说，关于函数的增量 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$ 有两种十分重要的估计表达式，这就是：

微分中值公式　若 $f(x)$ 在点 x 的附近可导，则

$$\Delta y=f'(x+\theta\Delta x)\Delta x \quad (0<\theta<1)。$$

增量公式　若 $f(x)$ 在点 x 可导，则由导数及微分定义知

$$\Delta y=f'(x)\Delta x+o(\Delta x)=\mathrm{d}y+o(\Delta x)。$$

前一公式给出 $f(x)$ 的增量 Δy 可用 $f(x)$ 在点 x 附近的某一点 $x+\theta\Delta x$ 的导数 $f'(x+\theta\Delta x)$ 来表达的一种估计形式。后一公式给出 $f(x)$ 在点 x 附近的增量 Δy 是 $f(x)$ 在点 x 处的微分 $\mathrm{d}y$ 的线性主部，因而有 $\Delta y\approx \mathrm{d}y$。

那么，对二元函数来说，上述公式是否还成立？如果成立，它们的表达式又如何？下面就来讨论这些问题。

2. 全增量

设二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 附近有定义。让自变量 x 和 y 分别取得增量 Δx 和 Δy，即自变量由点 (x,y) 变到点 $(x+\Delta x, y+\Delta y)$，则相应的函数 z 便取得增量

$$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)。$$

我们称 Δz 为二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处的**全增量**或**改变量**。

如果再假设 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 附近的两个偏导数都存在，则通过加一项减一项并对 x 和 y 分别应用一元函数的微分中值定理，便得

$$\begin{aligned}\Delta z &=[f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)]+\\&\quad[f(x,y+\Delta y)-f(x,y)]\\&=f_x(x+\theta_1\Delta x,y+\Delta y)\Delta x\\&\quad+f_y(x,y+\theta_2\Delta y)\Delta y\quad(0<\theta_1,\theta_2<1)。\end{aligned}\tag{1}$$

(1) 式称为**二元函数微分中值公式**。

如果进一步假设 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 处的两个偏导数 $f_x(x,y)$ 及 $f_y(x,y)$ 都连续，则由连续性定义即知

$$f_x(x+\theta_1\Delta x,y+\Delta y)=f_x(x,y)+\alpha,$$

$$f_y(x,y+\theta_2\Delta y)=f_y(x,y)+\beta。$$

其中当 $\Delta x\to 0$ 及 $\Delta y\to 0$ 时，$\alpha\to 0,\beta\to 0$，将上式代入(1)，又得

$$\Delta z=f_x(x,y)\Delta x+f_y(x,y)\Delta y+\alpha\Delta x+\beta\Delta y。\tag{2}$$

(2) 式称为二元函数的**增量公式**。

令 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，则

$$\left|\frac{\alpha\Delta x+\beta\Delta y}{\rho}\right|\leqslant|\alpha|\left|\frac{\Delta x}{\rho}\right|+|\beta|\left|\frac{\Delta y}{\rho}\right|\leqslant|\alpha|+|\beta|,$$

所以

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\alpha\Delta x+\beta\Delta y}{\rho}=0,$$

即 $\alpha\Delta x+\beta\Delta y=o(\rho)$，于是(2)式又可表示成

$$\Delta z=f_x(x,y)\Delta x+f_y(x,y)\Delta y+o(\rho)。\tag{3}$$

(3) 式是二元函数增量公式的又一种形式。

综上便得下述定理：

定理 1 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 的附近有定义。

(1) 若 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 附近的两个偏导数都存在，则有中值公式：

$$\Delta z=f_x(x+\theta_1\Delta x,y+\Delta y)\Delta x+f_y(x,y+\theta_2\Delta y)\Delta y\ (0<\theta_1,\theta_2<1)。$$

(2) 若进一步假设 $f_x(x,y)$ 及 $f_y(x,y)$ 在点 (x,y) 附近连续，则

$$\begin{aligned}\Delta z &= f_x(x,y)\Delta x+f_y(x,y)\Delta y+\alpha\Delta x+\beta\Delta y\\ &= f_x(x,y)\Delta x+f_y(x,y)\Delta y+o(\rho)。\end{aligned}$$

其中当 $\Delta x\to 0$ 及 $\Delta y\to 0$ 时，$\alpha,\beta\to 0$；$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$。

这个定理称为**有限改变量定理**。对于三元以上的函数，读者可以给出相应的定理，有限改变量定理是多元函数微分学中的一个基本定理，很多公式都可由它来推证。

3. 全微分

全增量公式(2)或(3)表明：在所设条件下，$f_x(x,y)\Delta x+f_y(x,y)\Delta y$ 是函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处的全增量 Δz 的一种线性逼近，或者说可用 $f_x(x,y)\Delta x+f_y(x,y)\Delta y$ 近似代替 Δz，其误差是比 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$ 高阶的无穷小。于是，依照一元函数全微分概念，便得到二元函数的全微分概念。

定义 2　若函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 的全增量可以表示为

$$\Delta z=f_x(x,y)\Delta x+f_y(x,y)\Delta y+o(\rho)\quad(\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}),$$

则称函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处**可微**，并且将 $f_x(x,y)\Delta x+f_y(x,y)\Delta y$ 称为 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 的**全微分**，记作 $\mathrm{d}z$，即

$$\mathrm{d}z=f_x(x,y)\Delta x+f_y(x,y)\Delta y=f_x(x,y)\mathrm{d}x+f_y(x,y)\mathrm{d}y。$$

下面研究一下可微、偏导数与连续三者之间的关系。

由可微定义可知，若函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微，则它在该点的两个偏导数 $f_x(x,y)$ 及 $f_y(x,y)$ 都存在；而且当 $\Delta x\to 0$ 及 $\Delta y\to 0$ 时，$\rho\to 0$，从而 $\Delta z\to 0$。这说明 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 连续。

从连续出发，我们考查函数

$$f(x,y)=|x|+|y|。$$

显然它在点 $(0,0)$ 处连续，但 $f_x(0,0)$，$f_y(0,0)$ 不存在，从而该函数在点 $(0,0)$ 处不可微。这个例子告诉我们，函数在某一点处连续，但偏导数不一定存在，更不一定可微了。

从偏导数出发，我们考查函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & 当(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & 当(x,y)=(0,0)\end{cases}。$$

很容易知：

$$f_x(0,0)=f_y(0,0)=0,$$

但此函数在点(0,0)处不可微。事实上，若可微，则由可微定义必有

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Delta z=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}o(\rho)=0。$$

而由§11.1的例4知，极限

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Delta z=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta x\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

不存在，当然更不可能为0。这一矛盾说明此函数在点(0,0)处不可微。由于上述极限不存在，又同时说明此函数在点(0,0)处是不连续的。

总结上述讨论，可用示意图11-1表示。

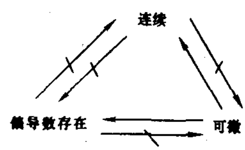

图 11-1

这里我们再次看到一元函数和二元函数的本质差别，因为对一元函数来说，可导与可微是等价的，但对二元函数来说，可微是比偏导数存在更强的一个概念，或者说偏导数存在的条件要比可微条件弱。

尽管偏导数存在不一定可微，也不一定连续，但由有限改变量定理知：若 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 附近的两个偏导数 $f_x(x,y)$ 和 $f_y(x,y)$ 有界，则 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 必连续（由公式(1)可知）；进一步，若 $f_x(x,y)$ 和 $f_y(x,y)$ 在点 (x,y) 连续，则 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 必可微（由公式(3)可知）。如果我们掌握了这些概念的内在关系，不难将这些条件再减弱一些。

4. 高阶偏导数与高阶微分

如果函数 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 附近存在偏导数 $f_x(x,y)$ 和 $f_y(x,y)$，则显然它们仍是 (x,y) 二元函数，自然还可以讨论它们

对 x,y 的偏导数。如果 $f_x(x,y)$ 和 $f_y(x,y)$ 在点 (x,y) 关于 x,y 的偏导数存在，则把这些偏导数称为 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 的**二阶偏导数**，记作

$$f_{xx}(x,y)=\frac{\partial f_x(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2},$$

$$f_{xy}(x,y)=\frac{\partial f_x(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},$$

$$f_{yy}(x,y)=\frac{\partial f_y(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$

$$f_{yx}(x,y)=\frac{\partial f_y(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}。$$

类似地，将二阶偏导数的偏导数称为**三阶偏导数**。一般地，将 $n-1$ 阶偏导数的偏导数称为 ***n* 阶偏导数**。例如，$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)=\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y\partial x}$ 就是 $z=f(x,y)$ 的三阶偏导数。

二阶及其以上的偏导数称为**高阶偏导数**，并把对不同变量的高阶偏导数称为**混合导数**。

例 3　求 $z=x\ln(xy)$ 的二阶偏导数。

$$f_x(x,y)=\ln(xy)+x\frac{1}{xy}y=\ln(xy)+1;$$

$$f_y(x,y)=x\frac{1}{xy}x=\frac{x}{y}。$$

$$f_{xx}(x,y)=\frac{1}{xy}y=\frac{1}{x};f_{yy}(x,y)=-\frac{x}{y^2};$$

$$f_{xy}(x,y)=\frac{1}{xy}x=\frac{1}{y};f_{yx}(x,y)=\frac{1}{y}。$$

例 4　设函数

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & 当(x,y)\neq(0,0) \\ 0 & 当(x,y)=(0,0) \end{cases},$$

利用定义求 $f_{xy}(0,0)$；$f_{yx}(0,0)$。

解　由偏导数定义容易求出