

材 料 力 学

(中、少学时)

王春香 主编

张少实 主审

哈尔滨工业大学出版社
哈尔滨

内 容 简 介

本书改变了以基本变形为主线的传统体系,采用以应力、应变分析为主线,加强力学基础,重视分析方法,减少重复罗列,并为学生留有充分的学习空间。

本书主要包括:应力、应变分析,材料的力学性能,杆件横截面上的应力计算,杆件的变形计算,强度理论,杆件的强度、刚度设计,压杆的稳定计算。至于内力分析及作内力图的内容,归到了《静力学》(程燕平主编,哈尔滨工业大学出版社)一书中。本书适用于中、少学时的材料力学课程,加星号“*”的内容,教师可根据学时及专业的不同选讲。

图书在版编目(CIP)数据

材料力学/王春香主编. —哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社, 2001. 12
ISBN 7-5603-1682-4

I. 材… II. 王… III. 材料力学-高等学校-教材 IV. TB301

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 000581 号

出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区教化街 21 号 邮编 150006
传 真 0451 - 6414749
印 刷 肇东粮食印刷厂印刷
开 本 787×1092 1/16 印张 11.5 字数 264 千字
版 次 2001 年 12 月第 1 版 2001 年 12 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 7-5603-1682-4/O·124
印 数 1~5 000
定 价 16.00 元

前 言

哈尔滨工业大学作为主持单位之一参加了教育部“九五”重点项目——力学系列课程教学内容和课程体系改革的研究与实践,本书是该项目的研究成果之一,主要适用于中、少学时材料力学课程,同时也是力学系列课程模块化教学中的一块。本书的编写思路在 1998 年就已酝酿形成,1999 年编写出校内教材,2000 年、2001 年连续两年在哈尔滨工业大学 4 个系 20 余个小班中试点使用。在试用教材基础上,经修订整理,现在正式出版。

本书的一个特点是改变了传统体系。多年来材料力学教材多数都是以拉、压、剪、扭、弯几种基本变形为主线,分别讨论内力、应力、变形和强度、刚度计算。本书则以一点的应力、应变分析为主线,重点阐述力学分析的一般方法,贯彻少而精的原则,突出共性,使各部分内容融会贯通,例如强度、刚度计算问题,不是分散到各个基本变形中去讲,而是将各种基本变形及组合变形下的强度刚度设计归到同一章中讨论,突出了工程中的常规设计方法,教学目的明确,节省学时。

本书的另一个特点是为学生留有充分的学习空间,在讲述完必要的理论基础之后,提出一些问题,留给学生去思考,去用已学过的知识解决这些问题,为培养学生的综合能力、创新能力提供相应条件。另外,书中还编入了部分带星号“*”的内容,供教师根据专业的不同、学时的不同选讲,或作为学生的自学内容,以便于他们扩充知识面,培养他们独立获取知识的能力。

本书是在项目研究小组提出的编写方案基础上完成的,特别是“教学带头人”张少实教授审阅了书稿并对本书的编写提出了许多指导性意见,庞宝君、牟宗花、马文来参加了编写和试点使用工作,在此一并表示衷心的感谢。

本书可能有疏漏或不当之处,诚恳希望读者批评指正。

编 者

2001 年 12 月于哈尔滨工业大学

目 录

第一章 绪论	1
1.1 变形固体及其基本假设	1
1.2 弹性变形与塑性变形 小变形假设	1
1.3 构件的强度、刚度及稳定性	2
第二章 应力状态分析	4
2.1 应力的概念	4
2.2 轴向拉、压杆的应力	5
2.3 一点的应力状态 剪应力互等定理	6
2.4 平面应力状态分析的解析法	8
2.5 平面应力状态分析的图解法	14
*2.6 空间应力状态	16
2.7 特例分析	20
习 题	22
*第三章 应变状态分析	25
3.1 应变的概念 一点的应变状态	25
3.2 平面变形 应变分量与位移之间的关系	26
3.3 平面应变分析的解析法	28
3.4 应变的测量	30
习 题	31
第四章 材料的力学性能	33
4.1 轴向载荷下材料的力学性能	33
4.2 简单虎克定律	41
4.3 广义虎克定律	42
4.4 体积应变与形状应变	45
4.5 应变能	46
*4.6 各向同性材料弹性常数间的关系	48
习 题	49
第五章 杆件横截面上的应力分析	51
5.1 圆轴扭转横截面上的剪应力	51
5.2 矩形截面杆扭转结果简介	55
5.3 平面弯曲梁横截面上的正应力	58
*5.4 弯曲剪应力	63
*5.5 开口薄壁非对称截面梁的弯曲 弯曲中心	69
习 题	71
第六章 杆件的变形计算	75

6.1 轴向拉、压杆的变形	75
6.2 扭转变形	77
6.3 求弯曲变形的直接积分法	78
6.4 叠加原理与叠加法求弯曲变形	82
*6.5 有限差分法求弯曲变形	86
6.6 简单静不定问题	89
习 题	92
第七章 强度理论	96
7.1 单轴应力状态下材料的失效准则及构件的强度条件	96
7.2 强度理论的概念	96
7.3 断裂强度准则	97
7.4 屈服强度准则	98
*7.5 莫尔准则	99
习 题	103
第八章 杆件的强度、刚度设计	105
8.1 强度设计条件(准则)及刚度设计条件(准则)	105
8.2 拉、压杆的强度计算	107
8.3 联接件的工程实用计算	109
8.4 梁的强度、刚度计算	114
8.5 传动轴的设计	120
习 题	125
第九章 压杆的稳定	133
9.1 压杆稳定的概念	133
9.2 两端铰支细长压杆的临界力	134
9.3 不同杆端约束细长压杆的临界力	136
9.4 欧拉公式的应用范围、经验公式	137
9.5 压杆稳定性计算	139
9.6 提高压杆稳定性的措施	144
习 题	145
习题参考答案	149
附录 A 截面的几何性质	154
A.1 静矩与形心	154
A.2 惯性矩 极惯性矩 惯性积 惯性半径	156
A.3 平行移轴公式	158
A.4 转轴公式	160
A.5 主轴 主惯性矩 形心主轴 形心主惯性矩	161
习 题	165
附录 B 型钢表	167
参考文献	178

第一章 绪 论

1.1 变形固体及其基本假设

在“理论力学”中已经介绍了构件的概念。尽管制成构件的材料多种多样,但都为固体。任何固体在外力的作用下都将发生尺寸和形状的改变,这种改变我们称之为变形。因此,我们把所有的固体材料统称为变形固体。

固体材料的结构组成一般是复杂的,限于宏观研究,根据其主要性质作出如下假设。

一、连续性假设

认为物体整个体积内毫无空隙地充满了物质。实际上,工程材料的内部都有不同程度的空隙,如粒子之间的空隙,材料中的微观缺陷和杂质,但这些空隙、缺陷和杂质与构件的尺寸相比非常微小,可以忽略。由于这种连续性假设,构件内因受力而产生的内力和变形都将是连续的,这有利于建立数学模型和用数学方法进行分析。

二、均匀性假设

认为从物体内任意位置取出一部分,不论体积大小,其力学性质完全相同。实际上,一般的工程材料都有不同程度的非均匀性。例如金属材料,多为两种或两种以上元素组成,不同元素晶粒的力学性质并不完全相同。但构件的尺寸远大于晶粒的尺寸,且为数极多的晶粒又无序排列,所以从统计平均值的观点考虑,可假设材料是均匀的。

三、各向同性假设

认为物体在各个不同方向上均具有相同的力学性能。这种材料称为各向同性材料。当然这也是从宏观上考虑的。

另有一些材料,不同方向力学性能不同,这样的材料为各向异性材料。例如,木材、竹材在纵横两个方向力学性能是不同的。特别近几十年来,在航空、航天、通信、能源等领域广泛使用一些由两种以上互不相熔材料通过一定方式组合而成的新型材料,即复合材料,也是各向异性材料。本书的研究范围主要是各向同性材料。

1.2 弹性变形与塑性变形 小变形假设

在载荷作用下,物体发生变形。当载荷除去时变形随之消失,这种变形为弹性变形。当载荷除去时,有一部分变形随之消失(弹性变形),但仍有一部分是不能消失的变形,这部分变形称为塑性变形或永久变形。

当载荷去掉后能完全恢复原状的物体称为理想弹性体。实际上,并不存在这种物体,但由实验可知,常用工程材料,如金属、木材等,当外力不超过某一限度时,很接近于理想弹性体。本书所研究的问题多在这个限度内,即可将构件都看成理想弹性体。

工程中大多数构件,在载荷作用下,其变形与构件本身的尺寸相比是很微小的,我们称之为“小变形”,本书的研究范围仅限于小变形。这样我们在研究构件或构件任一部分的平衡时,可用构件变形前的原始尺寸进行计算。

1.3 构件的强度、刚度及稳定性

任何机械或建筑物都是由许多构件组成的。要想使机械或建筑物按预期的目标正常工作,对它的每一个构件都要有一定的要求,力学上的最基本要求如下。

一、强度要求

要求构件受力后不发生破坏,既不能断裂也不能发生明显的塑性变形。例如图 1.1 所示受内压的薄壁容器,工作时不能允许因容器的破坏而爆炸。图 1.2 所示简易起吊装置,工作时吊索不能断裂,滑轮轴不能有明显的塑性变形。因此,所谓强度指构件抵抗破坏的能力。

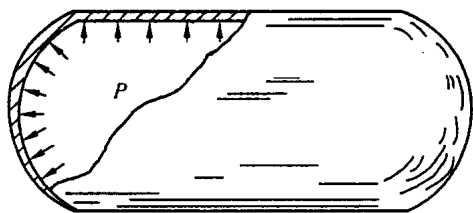


图 1.1

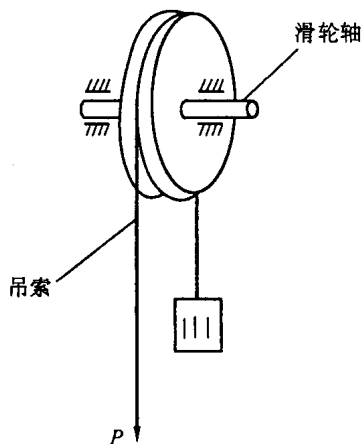


图 1.2

二、刚度要求

要求构件受力后的变形不能太大。例如图 1.3 所示齿轮轴,齿轮正常啮合情况如图 1.3(a)所示。如果轴的变形过大,将导致齿轮产生局部啮合不良的情况,如图 1.3(b)所示,不能正常工作。因此要求构件具有足够的抵抗变形的能力,即要有足够的刚度。

三、稳定性要求

要求构件具有保持原有平衡形式的能力,即具有稳定性。例如图 1.4 所示千斤顶的螺杆,在轴向压力作用下,必须始终保持直线形式的平衡状态,才能保证正常工作。一旦

从直线的形式突然弯曲,我们说螺杆丧失了稳定性,简称失稳。

综上所述,要保证构件正常工作,必须具有足够的强度、刚度及稳定性。当然不同的受力构件要求也是不同的,有些只需满足其一或其二。材料力学就是在充分研究构件在外力作用下的变形及破坏规律的基础上,为达到构件预期的使用目的,而提供最经济、合理的设计方案(这包括选择合适的材料,合理的截面形状和构件的尺寸)。

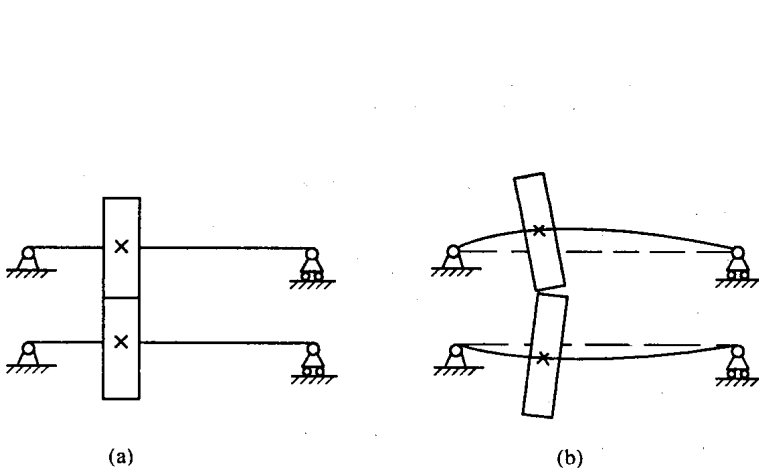


图 1.3

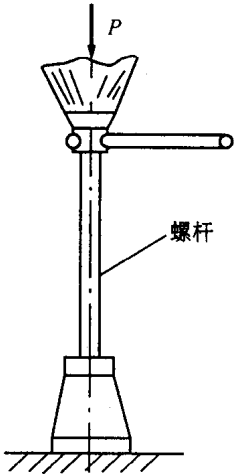


图 1.4

第二章 应力状态分析

2.1 应力的概念

静力学中曾介绍了内力的概念,并由“截面法”可求得内力的大小。但这仅仅是截面上分布内力的合力(合力或合力偶),它并没说明这一分布力系在截面上的分布规律。一般情况下,内力在截面上分布是不均匀的,即同一截面上各点的受力程度和方向是各不相同的。因此,我们必须研究内力在截面上各点的密集程度,即“集度”。我们把内力在截面上的分布集度称为应力。

图 2.1(a) 所示为受力物体,现考察其 $I-I$ 截面(法线平行 x 轴)上点 B 的应力。为此,围绕点 B 取一微小面积 ΔA ,假设微面积 ΔA 上的微合力为 ΔP (图 2.1(b)),则比值

$$\bar{p} = \frac{\Delta P}{\Delta A}$$

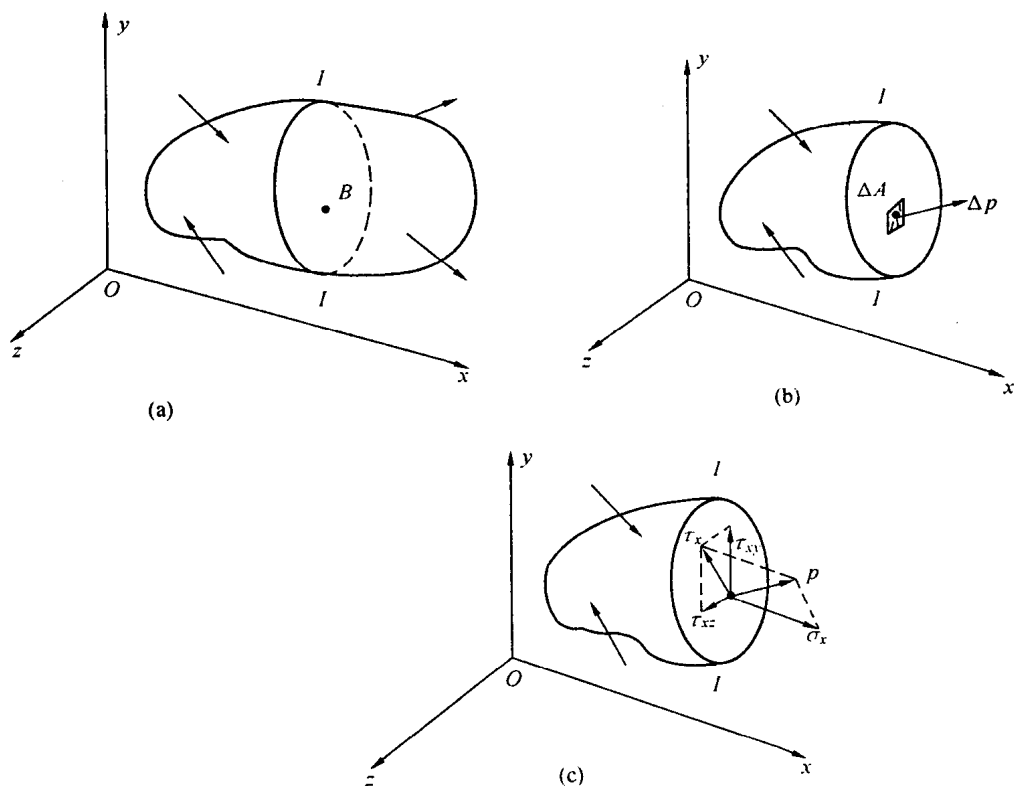


图 2.1

称为 ΔA 上的平均应力。当 ΔA 趋向无穷小时, 极限值

$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta A}$$

称为点 B 的全应力。将全应力 p 向截面的法线方向(x 方向)和切线方向分解, 得到两个应力分量。沿法向的应力分量称为正应力, 用 σ 表示。沿切向的应力分量称为剪应力, 用 τ 表示(图 2.1(c)), 角标 x 表示截面的法线方向。剪应力 τ_x 再向 y, z 两坐标方向分解, 得两个剪应力分量 τ_{xy} 和 τ_{xz} , 如图 2.1(c) 所示。在变形固体力学中, 应力可写为通用形式 σ_i 和 τ_{ij} , i 代表应力所在截面的法线方向, j 代表剪应力的方向。

应力的单位符号为 Pa, 工程上常用 MPa。1 Pa = 1 N/m², 1 MPa = 10⁶ Pa。

2.2 轴向拉、压杆的应力

一、横截面上的应力

轴向拉、压杆横截面上的内力分量只有轴力 N , 轴力 N 在横截面上是如何分布的? 为此, 先观察杆件的变形。在图 2.2 所示杆的侧面上画出垂直于轴线的直线段 ab 和 cd , 然后加拉力 P 使杆发生拉伸变形。发现 ab 和 cd 在杆变形后仍垂直轴线, 只是平行移动到 $a'b'$ 和 $c'd'$ 。由此可以推断杆的横截面上只有正应力, 而且各点受力均相同。若杆的横截面积为 A , 则横截面上的正应力为

$$\sigma_x = \frac{N}{A} \quad (2.1)$$

上式对于压缩也适用。其符号规定拉应力为正, 压应力为负。

应该指出, 在载荷作用点附近截面上, 正应力均匀分布的结论有时是不成立的, 这和加载方式有关。但是, 实验研究表明, 杆件的加载方式不同, 只对力作用点附近截面上的应力分布有影响, 受影响的长度不超过杆的横向尺寸。这一论断称为圣文南原理。

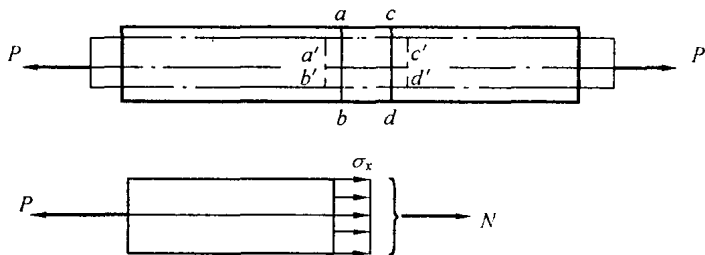


图 2.2

二、斜截面上的应力

为解决构件的强度问题, 需对任意其他方向截面上的应力有一全面了解。为此, 用任意斜截面 $m-m$ 将杆件切开(图 2.3(a)), 由左段的平衡求出斜截面上的轴力 $N_n = P$ (图 2.3(b))。仿照推断横截面上正应力的方法, 推断出斜截面上的全应力 p_n 也是均匀分布的, 即

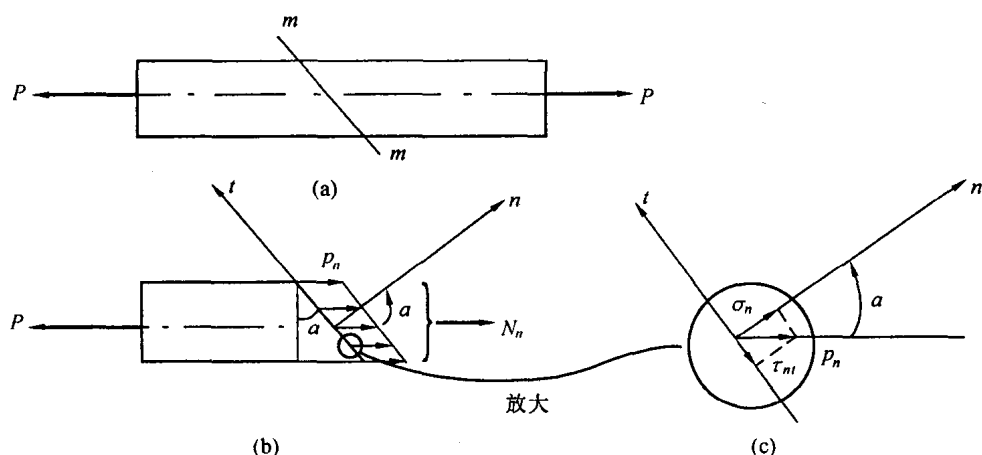


图 2.3

$$p_n = \frac{N_n}{A_n} \quad (a)$$

式中 A_n 为斜截面的面积,与横截面的面积 A 有下列关系

$$A_n = \frac{A}{\cos \alpha} \quad (b)$$

将式(b)代入式(a),并注意到 $N_n = P = N$,可得

$$p_n = \frac{N}{A} \cos \alpha = \sigma_x \cos \alpha \quad (c)$$

将全应力 p_n 沿截面的法向及切向分解(图 2.3(c)),得

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2 \alpha \quad (2.2)$$

$$\tau_{nt} = \frac{\sigma_x}{2} \sin 2\alpha \quad (2.3)$$

由上两式看出,受拉、压杆斜截面上既有正应力又有剪应力。它们都是截面方位角 α 的函数,截面方位不同,应力也不同。

$$\text{当 } \alpha = 0^\circ \text{ 时} \quad \sigma_n \Big|_{\alpha=0^\circ} = \sigma_{\max} = \sigma_x \quad \tau_{nt} \Big|_{\alpha=0^\circ} = 0 \quad (d)$$

$$\text{当 } \alpha = 45^\circ \text{ 时} \quad \sigma_n \Big|_{\alpha=45^\circ} = \frac{\sigma_x}{2} \quad \tau_{nt} \Big|_{\alpha=45^\circ} = \tau_{\max} = \frac{\sigma_x}{2} \quad (e)$$

$$\text{当 } \alpha = 90^\circ \text{ 时} \quad \sigma_n \Big|_{\alpha=90^\circ} = 0 \quad \tau_{nt} \Big|_{\alpha=90^\circ} = 0 \quad (f)$$

由(d)、(e)、(f)三式可知,轴向拉伸时,正应力的最大值在横截面上,而此面上剪应力为零。剪应力的最大值在 45° 的斜面上。纵截面上无任何应力。

2.3 一点的应力状态 剪应力互等定理

上节的分析表明,过一点不同方向面上的应力是不同的,只要知道某些面上的应力后,其他面上的应力都可以由此来确定。例如上节中,只要知道横截面上的正应力为 σ_x ,

其他面上的应力都可由式(2.2)、(2.3) 求出,同时还可求出应力的极值。

过一点所有不同面上应力的集合,称为一点的应力状态。用平衡的方法,分析过一点不同方向面上应力间的相互关系,确定应力的极大和极小值以及它们的作用面,即为应力状态分析。

为表示一点的应力状态,一般是围绕该点取一微六面体,当六面体三个方向的尺寸趋于无穷小时,便趋于这个点。这时的六面体称为微元体。受拉伸的杆,沿横向和纵向切出的微元体如图 2.4 所示。

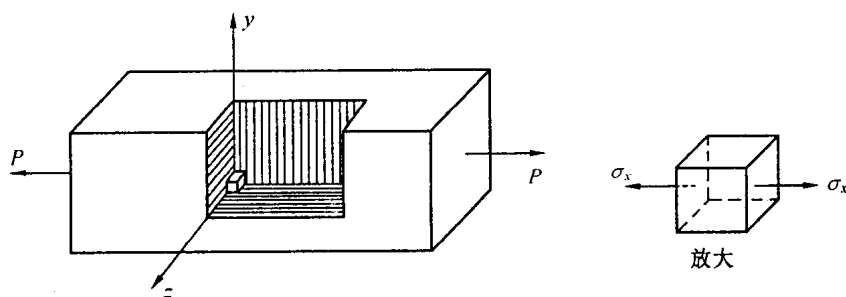


图 2.4

对于受力比较复杂的构件,通常所取出的微元体各面上都有应力,且每一面上同时有三个应力分量,一个法向正应力,两个切向剪应力。相平行的一对截面实际上是同一个截面的两个侧面(外法线矢量方向相反)。因此,应力大小相等,方向相反。一点处应力状态的一般描述如图 2.5 所示。

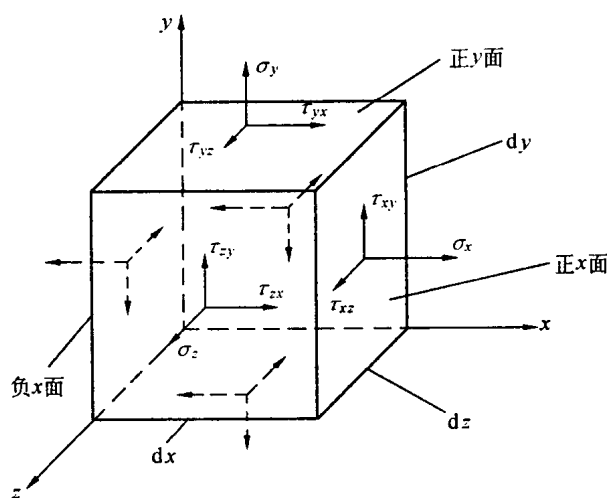


图 2.5

为明确表示每一个面,我们用截面的法线方向来命名这个面,并且外法线矢量指向坐标轴正方向的面为“正面”,指向坐标轴负方向的面为“负面”,如图 2.5 所示。

为方便,也为与其他力学书籍中的符号统一,定义在正面上沿坐标轴正向的应力,而负面上沿坐标轴负向的应力为正号,反之为负号。按这一应力符号规定,图 2.5 中所示全部应力都是正的。

一点应力状态的一般情况(也称空间应力状态),可用下列的9个应力分量来确定。

$$\begin{array}{ccc} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{array} \quad (a)$$

下面将证明,这9个分量中,只有6个是独立的。设图2.5中的微元尺寸分别为 dx 、 dy 和 dz 。由平衡方程 $\sum M_z = 0$,得到

$$\tau_{xy} \times dydz \times dx = \tau_{yx} \times dxdz \times dy$$

即

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (2.4)$$

与上面相似,由 $\sum M_x = 0$ 和 $\sum M_y = 0$,有

$$\begin{cases} \tau_{xz} = \tau_{zx} \\ \tau_{yz} = \tau_{zy} \end{cases} \quad (2.4')$$

以上分析表明,作用在两互相垂直面上,且其方向垂直于两面交线的剪应力分量必定大小相等($\tau_{ij} = \tau_{ji}$),方向同时指向或同时背向两面的交线。此结论在应力分析中很重要。这一结论也称为剪应力互等定理。因此,式(a)中的9个应力分量只有6个是独立的。

2.4 平面应力状态分析的解析法

当微元体只有两对面上承受应力且所有力作用线都处于同一平面内时,这种应力状态称为平面应力状态或双轴应力状态。其一般形式如图2.6所示。

当 $\sigma_x = \sigma_y = 0$ 时,是一种特殊的平面应力状态(图2.7),也称为纯剪切应力状态。当图2.6中 $\tau_{xy} = 0$,且只有一个方向有正应力作用时(图2.8),为单向应力状态或单轴应力状态(也是平面应力状态的特殊情况)。

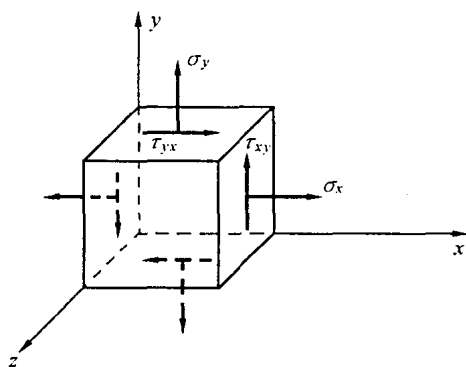


图 2.6

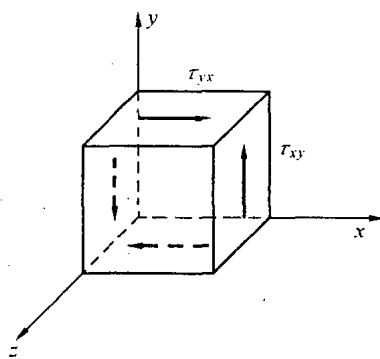


图 2.7

一、任意斜截面上的应力

设构件内某点处于平面应力状态,如图2.9(a)所示,且 σ_x 、 σ_y 及 τ_{xy} 均为已知。现讨论与 z 轴平行的任意斜截面上的应力。

过给定点用外法线 n 与 x 轴的夹角为 α 的斜截面在微元体中截取一分离体并考虑其

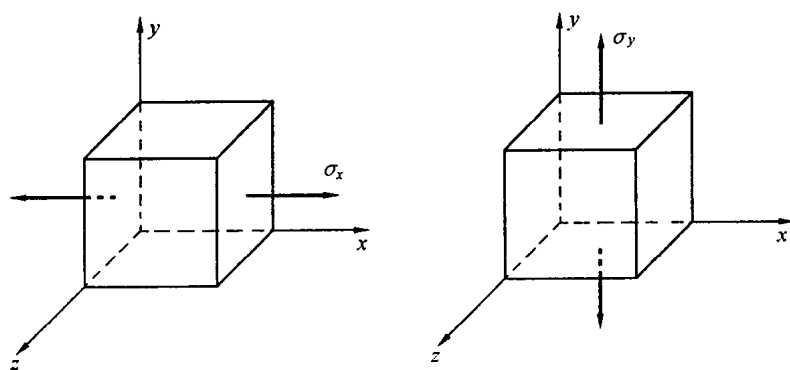


图 2.8

平衡(图 2.9(b)、(c))。图 2.9(c) 中, n 和 t 分别为斜截面的外法线方向和切线方向, σ_n 和 τ_{nt} 分别为斜截面上的正应力和剪应力。角度 α 为 x 轴旋转至截面外法线的方向角, 按三角学中规定, 逆时针旋转为正, 反之为负。

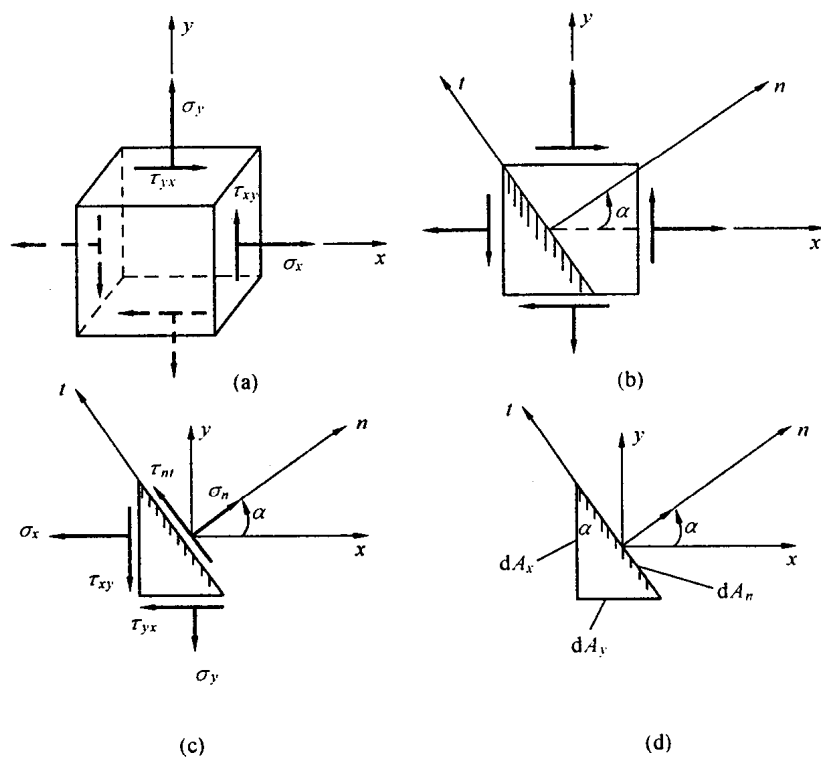


图 2.9

由平衡条件 $\sum n = 0$ 和 $\sum t = 0$, 得

$$\begin{aligned} \sigma_n dA_n - \sigma_x dA_x \cos \alpha - \sigma_y dA_y \sin \alpha - \\ \tau_{xy} dA_x \sin \alpha - \tau_{yx} dA_y \cos \alpha &= 0 \\ \tau_{nt} dA_n + \sigma_x dA_x \sin \alpha - \sigma_y dA_y \cos \alpha - \\ \tau_{xy} dA_x \cos \alpha + \tau_{yx} dA_y \sin \alpha &= 0 \end{aligned}$$

式中, dA_n 为保留部分斜截面的面积, dA_x 、 dA_y 分别为与 x 、 y 轴相垂直的两面面积。注意 $dA_x = dA_n \cos \alpha$, $dA_y = dA_n \sin \alpha$, $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, 故上两式简化为

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + 2\tau_{xy} \cos \alpha \sin \alpha \quad (a)$$

$$\tau_{nt} = -(\sigma_x - \sigma_y) \cos \alpha \sin \alpha + \tau_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \quad (b)$$

利用三角函数关系

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha), \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$$

$$2\cos \alpha \sin \alpha = \sin 2\alpha$$

式(a) 和(b) 化为

$$\sigma_n = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha \quad (2.5)$$

$$\tau_{nt} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha \quad (2.6)$$

式(2.5) 和式(2.6) 即为平面应力状态下, 任意斜截面的正应力及剪应力计算公式。

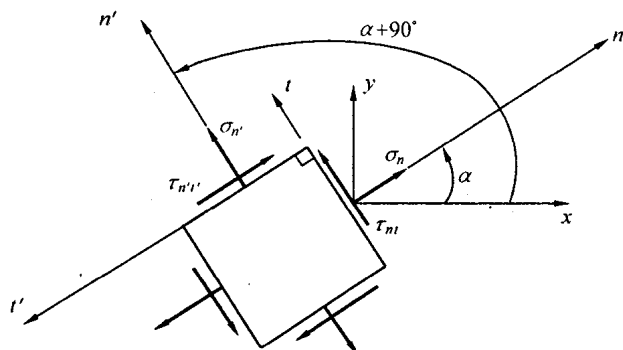


图 2.10

若将式(2.5) 和式(2.6) 中的 α 用 $\alpha + 90^\circ$ 置换(图 2.10), 有

$$\sigma'_{n'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha \quad (c)$$

$$\tau_{n't'} = -(-\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha) \quad (d)$$

式(a) + (c) 有

$$\sigma_n + \sigma_{n'} = \sigma_x + \sigma_y \quad (2.7)$$

即平面应力状态下, 过一点互相垂直的两个截面上正应力之和为一常量。式(2.6) 与式(d) 比较, $\tau_{n't'} = -\tau_{nt}$, 再次证明了剪应力互等定理。

二、主应力、主平面、主剪应力、主剪切面

由式(2.5) 和式(2.6) 可知, 斜截面上的应力分量是方位角 α 的连续函数, 因而必存在极值, 这也是我们所关心的。

1. 主应力和主平面

σ_n 的极值将出现在 $\frac{d\sigma_n}{d\alpha} = 0$ 的截面上

$$\frac{d\sigma_n}{d\alpha} = -(\sigma_x - \sigma_y)\sin 2\alpha + 2\tau_{xy}\cos 2\alpha = 0$$

或

$$-\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\alpha + \tau_{xy}\cos 2\alpha = 0$$

此式与式(2.6)比较,有 $\tau_{nt} = 0$,即剪应力等于零的面正应力达极值。称剪应力等于零的面为主平面,正应力的极值为主应力。

由上式解得主平面方位角 α_σ 的表达式

$$\tan 2\alpha_\sigma = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (2.8)$$

在 360° 范围内,上式应有两个解,分别为 α'_σ 和 α''_σ ,它们之间相差 90° ,说明主平面互相垂直,其上主应力用 σ' 和 σ'' 表示(图 2.11)。

将式(2.8)代入下列三角关系式

$$2\alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 2\alpha}}, \cos 2\alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 2\alpha}}$$

(e)

再代回到式(2.5),简化后,即得主应力的表达式

$$\left\{ \begin{matrix} \sigma' \\ \sigma'' \end{matrix} \right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (2.9)$$

由主平面的定义,微元体(图 2.11)上没有应力作用的平面(垂直 z 轴的一对)也是一对主平面,其上主应力 $\sigma''' = 0$ 。从以上的分析推知,对一般的应力状态,有三个互相垂直的主平面,三个主平面上的主应力分别为 σ_1 、 σ_2 和 σ_3 。习惯上将它们按代数值的大小排列,即 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ 。三个主应力只有一个不等于零时,称单轴应力状态(图 2.8)。两个主应力不等于零时,称平面应力状态(图 2.11)。三个主应力都不为零时称空间应力状态。

2. 主剪应力和主剪切面

在所有平行于 z 轴的一组平面内剪应力的极值称为主剪应力,其作用面为主剪切面。同主应力的推导类似,令

$$\frac{d\tau_{nt}}{d\alpha} = 0$$

即

$$-\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}2\cos 2\alpha - 2\tau_{xy}\sin 2\alpha = 0$$

或

$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\alpha + \tau_{xy}\sin 2\alpha = 0 \quad (f)$$

由此式得到主剪切面的方位角 α_τ 的表达式

$$\tan 2\alpha_\tau = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} \quad (2.10)$$

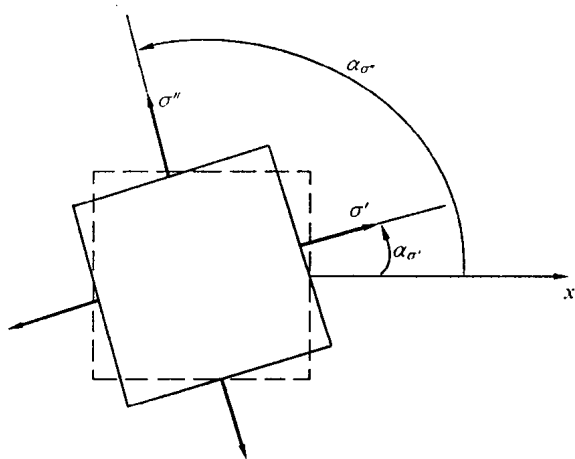


图 2.11

将上式代入式(e)后,再代回式(2.6),简化后,即得主剪应力的表达式

$$\frac{\tau'}{\tau''} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (2.11)$$

由式(f),并利用式(2.5)可知,主剪切面上的正应力恒为平均应力

$$\sigma_m = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

3. 主剪应力与主应力间的关系

由式(2.9)与式(2.11)可得,主剪应力与主应力间的关系

$$\left\{ \begin{matrix} \tau' \\ \tau'' \end{matrix} \right\} = \pm \frac{\sigma' - \sigma''}{2} \quad (2.12)$$

由式(2.8)和式(2.10)看出,两个正切互为倒数且符号相反。因此 $2\alpha_\sigma$ 和 $2\alpha_\tau$

两个角相差 90° , α_σ 和 α_τ 相差 45° ,即主剪切面与主平面相差 45° (图 2.12),经判断

$$\begin{aligned} \alpha'_\tau &= \alpha'_\sigma - 45^\circ \\ \alpha''_\tau &= \alpha'_\sigma + 45^\circ \end{aligned} \quad (2.13)$$

【例 2.1】 两木杆用胶粘在一起,如图 2.13 所示。已知载荷 $P = 35 \text{ kN}$,求胶缝面的正应力及剪应力。

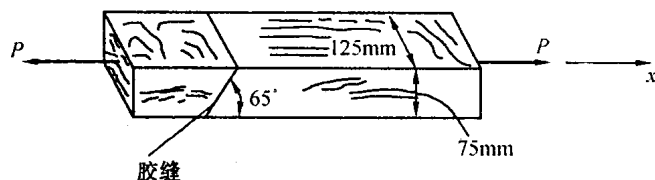


图 2.13

解 在胶缝处沿杆的横截面和纵截面取出一微元体,如图 2.14 所示。

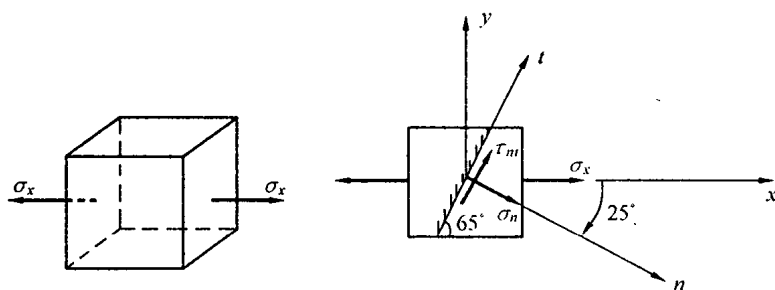


图 2.14

$$\{\sigma_x\}_{\text{MPa}} = \frac{P}{A} = \frac{35 \times 10^3}{125 \times 75 \times 10^{-6}} = 3.73$$

$$\sigma_y = 0, \tau_{xy} = 0, \alpha = -25^\circ$$

由式(2.5)和式(2.6),胶缝面的正应力为