数学解题方法及实例

张斌东●编著

暨南大学出版社

数学解题方法及实例

张斌东　　编著

暨南大学出版社
1994・广州

粤新登字 13 号

数学解题方法及实例

张斌东　编著

暨南大学出版社出版

（广州·石牌）

广东省新华书店经销

封开县人民印刷厂印制

*

开本：787×1092　1/32　印张：5.25　字数：11.2 万字

1994 年 4 月第 1 版　　1994 年 4 月第 1 次印刷

印数 1—8000 册

ISBN7—81029—275—7

O·16　定价：3.80 元

内容简介

本书阐述了解数学题的基本要求和一般步骤，提出了提高中学数学解题能力的几点建议，以大量篇幅和深入浅出的实例系统地阐述了有关解数学题的种种方法，对中学数学综合题作了选解。最后，为检查中学数学学习效果，还分文理科附录两套高中会考自测题及答案。

本书可供中学生和中学数学教师及大学数学专业的学生阅读和参考。

前言

目前，广大中学生在学数学的过程中暴露出的突出问题主要是基本概念不清，基本技能不熟，学习方法被动，集中一点就是数学解题能力不高，因而学习效果不很理想。面对这种状况，有些中学教师采用了“大运动量式”的“题海战术”，在教学中只注重灌输具体的“就题解题”方法，而忽视根本能力的培养及学习方法的指导，这样本末倒置，很难抓出成效。不少同学也习惯于埋头演算的学习方法，他们片面地认为“学习数学，只要多解题就一定能学好，因此，一头栽入“题海”，日日夜夜挣扎，弄得疲惫不堪，但解题能力却不见有所提高，甚至越做越糊涂，连最基本、最简单的概念、公式也弄得真伪不辨。这样逐渐使一些同学对学习数学丧失信心，情绪低落，甚至发展到放弃钻研，对教师布置的正常作业量也感到难于完成，到了抄袭应付的地步。

为此，我们希望通过本书针对近年来高考、中考中暴露出来的比较典型的错误，阐明解题的基本要求和步骤，并以较多的篇幅，用大量深入浅出的实例，系统地阐述有关解数学题的种种方法，使每个方法思路清晰，步骤明确。我们相信，本书不但对数学学习效率的提高有促进作用，而且对化学、物理等其他课程的学习也会有所启迪。

目　录

一、解数学题的基本要求

中学数学题虽然在内容和形式上五花八门，千姿百态，各有差异，但如何解题其基本要求是完全一致的. 我们必须严格遵照解题这一规律，按照习题的基本要求去解答，才能达到解题的目的，收到理想的效果.

1. 解答必须符合题意

解数学题首先必须保证答案的正确性和合理性. 正确性要求已被公认，但合理性要求却往往被忽视，经常错而不觉.

例 1.1 1978 年高考试题：已知 $\log 18^{9}=a$ $(a\neq 2)$，$18^{b}=5$，求 $\log 36^{45}$.

不少同学认为：$\log 36^{45}=\dfrac{\lg 45}{\lg 36}=\dfrac{\lg 9+\lg 5}{\lg 4+\lg 9}=\dfrac{2\lg 3+\lg 5}{2\,(\lg 2+\lg 3)}$

$$=\frac{2\times 0.4771+0.6990}{2\,(0.3010+0.4771)}\approx 1.06$$

这个解答，运算并无错误，但由于不合题意，解答是不合理的，然而同学们却错而不觉. 原来，这个题中，a、b 是已知数，题目要求用已知的 a、b 表示 $\log 36^{45}$，而并非求 $\log 36^{45}$的数值. 正确的解答是：

由 $18^{b}=5$，得 $\log 18^{5}=b$

$$\log 36^{45}=\frac{\log 18^{45}}{\log 18^{36}}=\frac{\log 18^{9}+\log 18^{5}}{\log 18^{18}+\log 18^{2}}=\frac{a+b}{1+\log 18^{\frac{18}{9}}}$$

$$=\frac{a+b}{1+\log 18^{18}-\log 18^{9}}=\frac{a+b}{2-a},\qquad (a\neq 2)$$

2. 解答必须理由充分

解数学题无论是计算题、证明题还是作图题，都应做到言必有据，理由充分，不能以想象做为依据，不能以直观代替证明. 解题中每一步的推演都必须以前一步推演成立为前题，使推演建立在牢固可靠的逻辑基础上.

例 1.2 1980 年高考试题：直升飞机上一点 P 在地面 M 上的正射影是 A. 从 P 看地平面上一物体 B（不同于 A），直线 PB 垂直于飞机窗玻璃所在的平面 N（如图 1.1），证明：平面 N 必与平面 M 相交，且交线 L 垂直于 AB.

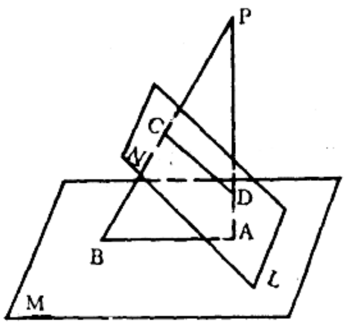

图 1.1

一些同学这样证：

设 PB 交平面 N 于 C，PA 交平面 N 于 D，连 CD，

$PA\perp$平面 M，$\angle PAB=90°$，$PB\perp$平面 N，$\angle PCD=90°$，$\Delta PAB\backsim\Delta PCD$，$\angle PDC\neq\angle PAB$，则 $CD \nparallel AB$.

又 $CD\subset N$，$AB\subset M$.

$\because$ CD 与 AB 相交，$\therefore$ 平面 N 必与平面 M 相交.

以上证法的根据是“线线不平行，面面不平行”，两平面不平行，则必相交. 显然这一根据完全是臆造的“定理”，不能成立. 推理论据不真，证明当然谬误.

正确的证法是：

若 N 与 M 不相交，则 $N /\!/ M$，$\because PB \perp N$，则 $PB \perp M$，又 $PA \perp M$，$\therefore A$、B 重合与题设矛盾，$\therefore N$ 与 M 必相交.

又 $PB \perp N$，L 在 N 内，则 $L \perp PB$. 由三垂线定理逆定理得 $L \perp AB$.

3. 解答必须详尽完整

数学题的答案是确定的，但往往不是唯一的. 我们必须对题目的已知条件进行全面的考虑，分析解答的各种可情况，从而求出所有的解，使解答详尽完整.

例 1.3 1981 年高考试题：给定双曲线 $x^2-\frac{y^2}{2}=1$.

(1) 过点 $A(2,1)$ 的直线 L 与所给双曲线交于两点 P_1 及 P_2，求线段 P_1P_2 的中点 P 的轨迹方程.

(2) 过点 $B(1,1)$ 能否作直线 m，使 m 与所给双曲线交于 Q_1 及 Q_2，且点 B 是线段 Q_1Q_2 的中点；这样的直线 m 如果存在，求出它的方程；如果不存在，说明理由.

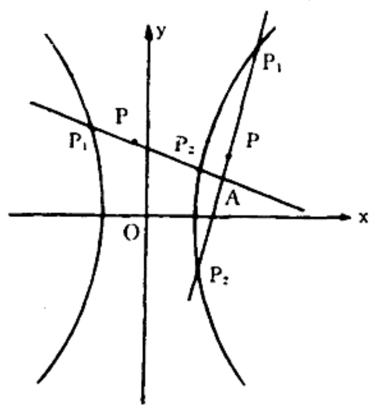

图 1.2

对于问题 (1) 大部分同学这样解：

设各点坐标为 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$，$P(x,y)$.

由点斜式，直线 L 的方程为：$y=k(x-2)+1$. 代入双曲线方程得

$$(2-k^2)x^2+(4k^2-2k)x-4k^2+4k-3=0$$

由此得　　$x_1+x_2=\dfrac{4k^2-2k}{k^2-2}$

$\therefore\quad x=\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{2k^2-k}{k^2-2}$，又 (x,y) 在直线 L 上，代入得 $y=k\cdot\left(\dfrac{2k^2-k}{k^2-2}-2\right)+1=\dfrac{2(2k-1)}{k^2-2}$

$\therefore$　所求轨迹的参数方程为 $\begin{cases}x=\dfrac{2k^2-k}{k^2-2}\\[2mm] y=\dfrac{4k-2}{k^2-2}\end{cases}$（$k$ 为参数）.

这个解答是不完整的. 当直线 L 的倾斜角为 90°时，k 不存在，无法用点斜式. 这时 L 的方程为 $x=2$，由双曲线方程得 $P_1(2,\sqrt{6})$，$P_2(2,-\sqrt{6})$. P 点为 $(2,0)$，应把 P 点补入.

因此，轨迹方程为

$$\begin{cases}x=\dfrac{2k^2-k}{k^2-2}\\[2mm] y=\dfrac{4k-2}{k^2-2}\end{cases}\quad 及\quad \begin{cases}x=2\\ y=0\end{cases}\ (k\ 为参数).$$

有些同学由参数式轨迹方程消去参数 k 后，得轨迹的普通方程：

$$\frac{8(x-1)^2}{7}-\frac{4\left(y-\frac{1}{2}\right)^2}{7}=1.$$

轨迹为双曲线. 但又想到 P_1P_2 在双曲线内部，于是判定轨迹为以上双曲线的右枝. 表面上看，似乎想得很周到，其

实错了. 原来，直线 L 与双曲线 $x^2-\frac{y^2}{2}=1$ 相交有两种情况：

①L 与双曲线右枝相交，轨迹为所得双曲线右枝；

②L 与双曲线左、右两枝相交，轨迹为所得双曲线的左枝.

$$\therefore \quad \text{轨迹方程为} \quad \frac{8\ (x-1)^2}{7}-\frac{4\ \left(y-\frac{1}{2}\right)^2}{7}=1.$$

4. 解答必须表达合理、层次分明

数学题的解答过程不可能规定具体的叙述形式，但叙述表达必须合乎逻辑、准确恰当、条理清楚、简捷明了. 叙述中应当层次分明地交代清楚主要的判断、推演过程和依据，以及答案的合理. 当然，随着年级的不同对表达的要求也不一. 初二同学开始学习平面几何时，叙述就应当要求详尽，每步推证都要求在判断句后把依据注出. 随着年级的升高，叙述就可逐步简略，但基本逻辑层次是不能改变的. 同时在叙述中还要注意正确合理地使用数学符号，使表达准确简洁.

例 1.4 1979 年高考试题：设等腰△OAB 的顶角为 2θ，高为 h.

(1) 在等腰△OAB 内有一动点 P，到三边 OA、OB、AB 的距离分别为 $|PD|$、$|PF|$、$|PE|$，并且满足关系式 $|PD|\cdot|PF|=|PE|^2$，求 P 点的轨迹.

(2) 在上述轨迹中定出点 P 的坐标，使得

$$|PD|+|PE|=|PF|.$$

对问题 (1) 应该这样解：

如图建立坐标系，OA 的方程为

$$y=x\text{tg}\theta,$$

即 $\quad x\text{tg}\theta-y=0.$

OB 的方程为

$$y=-x\text{tg}\theta,$$

即 $\quad x\text{tg}\theta+y=0$

AB 的方程为 $\quad x=h.$

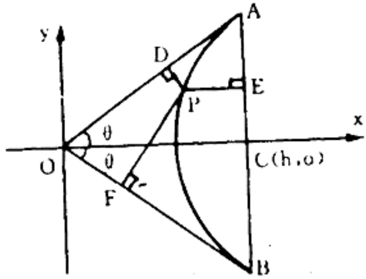

图 1.3

设 P 点坐标为 (x, y)，因点 P 在 $\triangle OAB$ 内，

$$|PD|=\frac{x\text{tg}\theta-y}{\sqrt{1+tg^2}}=x\sin\theta-y\cos\theta$$

$$|PF|=\frac{x\text{tg}\theta+y}{\sqrt{1+tg^2}}=x\sin\theta+y\cos\theta.$$

$$|PE|=h-x.$$

代入条件，$|PD|\cdot|PF|=|PE|^2$ 得

$$x^2\sin^2\theta-y^2\cos^2\theta=(h-x)^2$$

即 $\quad x^2\cos^2\theta-2hx+y^2\cos^2\theta+h^2=0.$

由题设知 $\cos^2\theta\neq0$，故得 P 点的轨迹为

$$\left(x-\frac{h}{\cos^2\theta}\right)^2+y^2=\left(\frac{h\sin\theta}{\cos^2\theta}\right)^2,\ x\in\left[\frac{h}{1+\sin\theta},\ h\right].$$

此题同学们在表达时存在的主要问题是：

①表出 $|PD|$、$|PF|$、$|PE|$ 时，不提 P 点在 $\triangle OAB$ 内，这是不妥的. 因 P 点在 $\triangle OAB$ 外部则表达式不尽相同，这个判断依据必须有，并非可有可无.

②在由普通式化标准式时，用 $\cos^2\theta$ 去除两边，不判定 $\cos^2\theta\neq0$，是不能这样做的.

③答案的最后叙述，有的同学认为是圆：

$$(x-\frac{h}{\cos^2\theta})^2+y^2= (\frac{h\sin\theta}{\cos^2\theta})^2$$

这是有错的. 显然 P 点的轨迹是上述圆在三角形内部的部分圆弧.

5. 解法必须力求简捷

一个数学题的解法往往不是唯一的，我们应当在牢固掌握一般解法的基础上，逐步选择最优解法，使我们具有针对各种特殊问题应用各种特殊解法的本领，达到知识的融汇贯通，技能灵活熟练.

例 1.5 1980 年高考题：CD 为直角三角形 ABC 中斜边 AB 上的高，已知$\triangle ACD$、$\triangle CBD$、$\triangle ABC$ 的面积成等比数列，求$\angle B$.（用反三角函数表示）.

这题解法甚多，可从边下手，由已知面积比推出边之间关系，再由正弦定理转化到角，解关于$\angle B$ 的三角方程求出$\angle B$；也可以从角下手，用正弦定理表出各边，求出面积，由

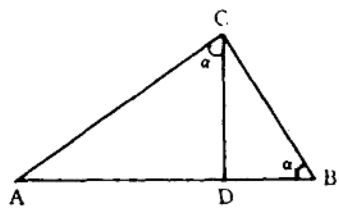

图 1.4

已知面积关系列出关于$\angle B$ 的三角方程，求出$\angle B$. 但由于$\triangle ABC$ 是直角三角形，针对这一点，用解直角三角形的办法较简捷.

由题设 $AB=1$，$\angle B=\alpha$，则$\angle ACD=\alpha$.

这样可通过解直角三角形，用角变量 α 表出各有关线段.

$AC=\sin\alpha$，

$AD=AC\cdot\sin\alpha=\sin^2\alpha$，

$BC=\cos\alpha$，$BD=BC\cdot\cos\alpha=\cos^2\alpha$.

$\triangle ABC$ 的面积 $=\frac{1}{2}AB\cdot CD$.

$\triangle ACD$ 的面积 $=\frac{1}{2}AD\cdot CD$.

$\triangle CBD$ 的面积 $=\frac{1}{2}BD\cdot CD$.

由题目条件得

$$(BD\cdot CD)^2=(AB\cdot CD)\cdot(AD\cdot CD)$$

即 $BD^2=AB\cdot AD$. 由此有

$\cos^4\alpha=\sin^2\alpha$，$0<\alpha<90°$，

$\cos^2\alpha=\sin\alpha$，即 $\sin^2B+\sin B-1=0$.

解上述方程得

$$\sin B=\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\ \sin B=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\text{（不合题意舍去）}.$$

$$\therefore\quad B=\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

二、解数学题的一般步骤

中学数学习题的内容及形式是极为广泛多样的，但一般来说，主要是根据已知条件求出未知结果的计算题和证明某些已知数学结论正确性的证明题．这些习题涉及的知识不可能是单一的，解题的途径也不同，但解题都必须遵循一定的

思维程序，并按一定的解答步骤去完成.

解数学题的一般步骤是：

1. 认真审题，吃透已知条件的含义

解数学题，就是应用一般的数学原理求解特殊的数学问题，所以必须具体分析题目中矛盾的特殊性. 这些特殊性，完全是题目给出的特殊条件的必然反映，因此，在解数学题时，首先必须认真看题，反复审题，真正把题目的已知条件、最终目的、搞得明明白白，吃透已知条件的含义，把已知条件转化到数学概念、公式定理的形态上来，这是解题的首要一步.

但是，有一些同学在解题时往往连题目条件还没看清，对题目各条件如何转化到数学概念、公式定理形式上来还没有搞清楚，甚至有时连某些已知条件都丢在一边不考虑，就埋头解题，这往往就要碰壁. 有时碰巧能弄出答案，但往往由于不符合题目要求，而白花力气，本书例 1.1 就是一个明显的例子.

例如，列方程解应用题，这是初中同学学习中的一个难点，突破这一难点的首要一条就是反复看题，认真审题，真正做到正确领会题意，准确地把题目中有关量进行转化，用代数式表示它们，然后根据题目中未用过的直接等量关系或间接等量关系布列方程.

例 2.1 某机械厂生产车床 360 台，原计划若干天完成，由于进行了技术革新，实际每天比原计划多生产 12 台，结果比原计划提前 8 天完成任务，问实际每天生产多少台车床？

解法 1. （直接选元）

设实际每天生产 x 台车床，则原计划每天生产 $(x-12)$ 台车床. 已知总生产台数 360，可表示出时间：

实际生产时间 $\frac{360}{x}$ 天，计划生产时间 $\frac{360}{x-12}$，从时间上找等量关系：$\frac{360}{x-12}-\frac{360}{x}=8$.

整理得 $x^2-12x-540=0$. 解得 $x_1=30$，$x_2=-18$. 经检验都是方程的根，但负根不合题意.

答：实际每天生产车床 30 台.

解法 2.（间接选元）

设实际生产用 x 天，则原计划生产用 $(x+8)$ 天. 已知总生产台数 360，可表出每天生产台数：实际每天生产 $\frac{360}{x}$ 台，原计划每天生产 $\frac{360}{x+8}$ 台.

从每天生产的台数上找等量关系：

$\frac{360}{x}-\frac{360}{x+8}=12$. 整理得 $x^2+8x-240=0$，解得 $x_1=12$，$x_2=-20$.

经检验都是方程的根，但负值不合题意. 故每天生产台数 $=\frac{360}{12}=30$.

答：实际每天生产车床 30 台.

2. 用好已知条件，寻求解题途径

数学题目中的已知条件是未知与已知间转化的因素，数学概念、公式、定理是转化的根据，解题技巧是转化的手段. 既然已知条件是解题的根本所在，那么我们解题时必须从始至终紧扣已知条件. 由条件打开思路，由条件启示方法，由