中学数学课外读物

复数的巧用

宁 挺 编著

四 川 教 育 出 版 社

中学数学课外读物

复 数 的 巧 用

宁 挺 编著

四 川 教 育 出 版 社

一 九 八 七 年 · 成 都

责任编辑：余秉本
封面设计：何一兵
版面设计：刘　江

复数的巧用

四川教育出版社出版　（成都盐道街三号）
四川省新华书店发行　内江新华印刷厂印刷

开本787×1092毫米　1/32　印张5　字数103千
1987年9月第一版　1987年9月第一次印刷
印数：1—2,340册

ISBN7—5408—0199—9/G·197
书号：7344·939　定价：0.90元

内 容 简 介

本书在阐明复数及其运算的基础上，叙述了复数在代数、三角和几何中的各种应用。讨论简明扼要，内容丰富多采，充分说明了数学问题淡中有雅，朴中藏巧。

书中例题取材新颖，解法巧妙，附大量习题供读者练习。有答案与提示，以利自学。

本书叙述层次分明，深浅得当，是学习复数的一本好书。可供高中学生阅读或中学数学教师教学参考。

目　　录

第一章　复数……………………………………………（1）
一、从解方程谈起………………………………………（1）
二、虚数单位 i 的争论……………………………………（3）
三、什么是复数…………………………………………（6）
四、复数无大小…………………………………………（9）
五、复数的四则运算……………………………………（12）
六、复数的乘方与开方…………………………………（15）
七、复数的三角函数式…………………………………（18）
习题一……………………………………………………（23）
第二章　复数的巧用……………………………………（27）
一、复数运算的代换法…………………………………（27）
二、共轭复数的应用……………………………………（38）
三、复数相等的应用……………………………………（47）
四、复数三角函数式与三角解题………………………（56）
五、反三角函数与复数…………………………………（67）
习题二……………………………………………………（70）
第三章　复数与几何……………………………………（76）
一、复数的几何意义……………………………………（76）
二、几何证题举例………………………………………（86）

三、正三角形与复数 …………………………………… (98)
四、复数与轨迹 ………………………………………… (106)
五、极坐标与复数解题 ………………………………… (111)
习题三 …………………………………………………… (118)
答案与提示 ………………………………………………… (122)

第一章　复　数

一、从解方程谈起

当人们仅仅知道自然数时，对于形如 $3x-1=0$ 这样的方程不能解。于是人们引进了正分数，从而知道这个方程的解为 $x=\frac{1}{3}$。但是对于形如 $x+1=0$ 这样的方程还是不能解，于是人们引进了负数，从而知道这个方程的解为 $x=-1$。可是这时对于形如 $x^2-2=0$ 这样的方程还是不能解，于是人们又引进了实数，从而知道这个方程的解为 $x=\pm\sqrt{2}$。

数的范围扩充到实数集时，某些方程，如 $x^4+x^2+1=0$，仍然没有实数解。这类方程中最简单的是 $x^2+1=0$。为了解决这个问题，必须再引进新数。显然这个数的平方应是 -1。因为以 -1 代替 x^2，对于方程 $x^2+1=0$，有 $-1+1=0$，便完全成立了。

根据实数的开方运算，人们知道，要使 x^2 等于 -1，则 x 就是 -1 的平方根。

-1 的平方根 $\sqrt{-1}$ 是怎样的一个数？

它肯定不是实数，因为当它自乘时，得到 -1。正数和负数集合里，都没有这个数，首先 $+1$ 乘上 $+1$，等于 $+1$。其

次-1乘上-1，还是等于$+1$。由此可知它是一类全新的数，与实数相对应，人们称其为虚数。

虚数的诞生，渊源于负数开平方，历史上也确是如此。1150年，培斯卡拉（Bhaskara）认为负数不能开平方，当时的数学家都持这种见解。

十六世纪的前半期，意大利米兰城的医生卡当（Cardan）找到了解三次方程 $x^3+px+q=0$ 的著名公式——卡当公式：

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}.$$

使用卡当公式解方程 $x^3-6x+4=0$时，由于 $p=-6$，$q=4$，$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=-4$，

故得 $x=\sqrt[3]{-2+\sqrt{-4}}+\sqrt[3]{-2-\sqrt{-4}}$. （*）

（*）式中出现了在实数范围内无法解决的求负数平方根的情况，这个方程不能应用卡当公式来求解了。

另一方面，对于方程 $x^3-6x+4=0$的左端多项式分解因式可得

$$(x-2)(x^2+2x-2)=0.$$

解得三个实数根：$x_1=2, x_2=-1+\sqrt{3}$，$x_3=-1-\sqrt{3}$。

因此卡当认为，使用他的公式解方程$x^3-6x+4=0$时，也应得到三个实数根x_1、x_2、x_3，这便涉及这些实根与（*）式的关系。

卡当认真地讨论了虚数，发现负数的平方根，按照与实数同样的方法来运算并没有矛盾发生，于是一向被认为“不可能”的数字，竟能与实数有同样的运用。

尽管如此，由于这些数不能用来测量长度、面积、时间等类的量，因而卡当认为虚数是“虚幻而不存在的数”，称为“诡辩量”，怀疑这种数运算的合法性。

虚数的虚幻观点，持续了很久，据历史记载，十八世纪中叶以前，除了牛顿等个别数学家有时提到虚数以外，关于虚数的理论很少发展，人们一直把它看成是无实际意义的东西而加以抵制。

此后，世界各地的数学家，如法国的棣莫佛（DeMoivre 1667—1754）、瑞士的欧拉（Euler 1707—1783）陆续发现了负数开平方的新用途。欧拉提出用拉丁文imaginarius的第一个字母i代表$\sqrt{-1}$，imaginarius的本意是想象的，可见对于虚数，仍有虚幻之感。

欧拉称i为虚数单位，按照他的建议，人们写成$i^2=-1$或$i=\sqrt{-1}$。

二、虚数单位i的争论

引进虚数单位i，方程$x^2=-1$有了解，解决了负数开平方的问题。反映在数学里，便同时解决了在数的原有范围内，某种运算不能实施的矛盾。

$i^2=-1$，因之i是-1的一个平方根。然而$(-i)^2=i^2=-1$所以$-i$也是-1的一个平方根。因此在i与$\sqrt{-1}$是否划等号的问题上，历来有争议。

一种意见是：不规定$i=\sqrt{-1}$。

另一种意见与其相反，主张明确规定$i=\sqrt{-1}$。

持第一种意见的理由是：

规定 $i=\sqrt{-1}$ 便有 $i^2=i\cdot i=\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}=\sqrt{(-1)(-1)}=1$，背离了$i$的原意。

其次，规定$i=\sqrt{-1}$，在复数开平方的运算中便产生了概念上的混乱。

例如，在复数范围内，$\sqrt[4]{-1}$ 便应有四个值。但如果把-1开四次方，作为连续两次开平方的运算，便有

$\sqrt[4]{-1}=\sqrt{\sqrt{-1}}=\sqrt{i}$，结果只有两个值。

如果不规定$\sqrt{-1}=i$，那么自然地有$\sqrt{-1}=\pm i$，于是$\sqrt[4]{-1}=\sqrt{\sqrt{-1}}=\sqrt{\pm i}$。

而 $\sqrt{i}=\sqrt{\frac{1}{2}(1+i)^2}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$，

$\sqrt{-i}=\sqrt{\frac{1}{2}(1-i)^2}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$，便有了四个根。

持第二种意见的理由是：在实数中解方程 $x^2=3$，可得$x=\pm\sqrt{3}$。现在要解方程$x^2=-1$，令$i=\sqrt{-1}$，则方程$x^2=-1$的解便是$x=\pm i$。因此规定$i=\sqrt{-1}$，便使虚数单位i成为看得见、摸得着的了，起到了虽“虚”而不抽象的作用，其直接的效果是解方程的顺利。例如解方程$x^2-2x+2=0$时，利用二次方程的求根公式得：

$$x=\frac{2\pm\sqrt{4-8}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{-4}}{2}=\frac{2\pm 2i}{2}=1\pm i.$$

对于一般的二次方程$ax^2+bx+c=0$，其解的公式仍为：

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

而不管b^2-4ac是等于零、大于零、还是小于零，都可以应

用。这里同时还充分体现了虚根成对出现的性质，且使运算结果正确无误。

如果不规定$i=\sqrt{-1}$，则会使学生感到虚数单位抽象模糊。只知$i^2=-1$，却不见i是什么东西。直接的影响是解方程不顺利。

如在解方程$x^2+2=0$时，便需采用下面开平方的步骤：

$\because\quad (\sqrt{2}i)^2=2i^2=-2,\quad (-\sqrt{2}i)^2=2i^2=-2.$

$\therefore$ 方程的解为$x_1=\sqrt{2}i$，$x_2=-\sqrt{2}i$。

又如解方程$x^2-2x+2=0$时，

$\because\ b^2-4ac=4-8=-4<0$，应用配方的方法，得$x^2-2x+2=(x-1)^2+1$，于是原方程成为：

$$(x-1)^2=-1.$$

由此可得$x-1=\pm i$，即 $x=1\pm i$。

对于一般的二次方程$ax^2+bx+c=0$，其根的表达式必须使用两种不同的形式：

当 $b^2-4ac\geqslant 0$时，方程的解为

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

当 $b^2-4ac<0$时，方程的解为

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{-(b^2-4ac)}\,i}{2a}.$$

（被开方数为非负数）

从而使简单问题复杂化。

至于解决其弊端的方法，他们建议给$\sqrt{-1}$一个特殊的双重身份，即$\sqrt{-1}$一方面可以表示虚数单位i，这时$\sqrt{-1}=i$。另一方面它又可以表示-1的平方根，这时

$\sqrt{-1}=\pm i$。

或有人说，似此，等式岂不变成下面的荒谬形式吗？

$$\sqrt{-1}=\pm\sqrt{-1}.$$

事实并非如此，要知道，规定了$\sqrt{-1}$的双重身份，则上式左边的$\sqrt{-1}$含义是-1的平方根。而右边的$\sqrt{-1}$含意就是虚数单位i。在实数中学习算术根时，也使用过类似的方法。如4的平方根为±2，而$\sqrt{4}=2$。因此给$\sqrt{-1}$一个双重身份，不会增加学生的负担。

至于错误$i^2=i\cdot i=\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}=\sqrt{(-1)(-1)}=\sqrt{1}=1$的出现，则是由于套用了实数算术根的运算公式$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$而引起的。复数里没有算术根的概念，$\sqrt{-1}$不是根式，不能随便乱套。

权衡利弊，比较得失，可知第二个意见比较方便，因此本书对于一些问题的处理，都是按照$\sqrt{-1}=i$进行。

三、什么是复数

对i下了定义后，就可以用它来表示任何负数的平方根。比如$\sqrt{-4}$可写成$\sqrt{4}$乘$\sqrt{-1}$或$2i$。一般说来，任何负数的平方根$\sqrt{-n}$（$n>0$ $n\neq1$），都可以写成相应的正数平方根乘以负1的平方根，即$\sqrt{-n}=\sqrt{n}i$。人们称这样的数为纯虚数。

纯虚数与实数是两种绝然不同的数，因此不能把实数所适合的规律，硬搬到纯虚数的运算中。纯虚数的运算规则，主要取决于i的运算。

采用实数中的乘幂的记法，可以得到

$i^2=-1$, $\quad i^3=i(i^2)=-i$,

$i^4=(i^2)(i^2)=1$, $\quad i^5=i(i^4)=i$,

$i^6=(i^4)(i^2)=-1$, $\quad \cdots\cdots$

我们规定$i^0=1$后，一般有

$i^{4P}=1$； $\quad i^{4P+1}=i$； $\quad i^{4P+2}=-1$； $\quad i^{4P+3}=-i$。

这里P是整数。

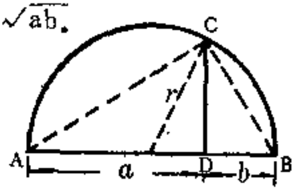
数学家致力于纯虚数的代数运算法则，随之引出所谓的复数。

什么是复数？

复数是写成和式 $a+bi$的一组特殊类型的数，这里 a、b 是通常的实数，i便是虚数单位。

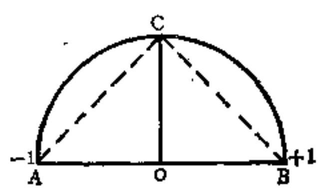
第一个将复数巧妙地运用在平面上的人是威西，他是一个自学成功的挪威测量员，1797年发表了他的创见，可惜当时未受到广泛的注意．他描述虚数的方法，受到了欧几里得的启发。

作两线段a、b的几何平均数，作图程序是在一直线上同向截取AD＝a，DB＝b。取a、b的算术平均数$r=\frac{a+b}{2}$。以r为半径，AB 的中点为圆心，作一半圆〔见 图1(a)〕，从D点画一直线垂直于AB交圆于C点，三角形 ACD 与三角形BCD为相似直角三角形。令CD＝h，则$a/h=h/b$，$h^2=ab$，$h=\pm\sqrt{ab}$。



欧几里得作两线段a与b的几何平均

(a)



威西说明虚数单位$i=\sqrt{-1}$

(b)

图1

威西利用一个特殊情形来描述虚数单位 i，他在实数 轴上分别取 $x=\pm1$ 两点。画一半圆〔见图1(b)〕，

$$OC=\sqrt{(-1)\times1}=\sqrt{-1}=i.$$

但这并不是纯几何的描述，因为线段或距离 是 不 能 为负的，可是在形式上可以说 i 是x轴上两坐标 $+1$ 与 -1 的几何平均。

实际上用平面上的点表示复数的功劳，应归功于被誉为“数学王子”的德国数学家高斯（Carl Friedrich Gauss 1777—1855）。由图1的推论，高斯得出复数平面，首次将复数以纯逻辑方式表示为数对。

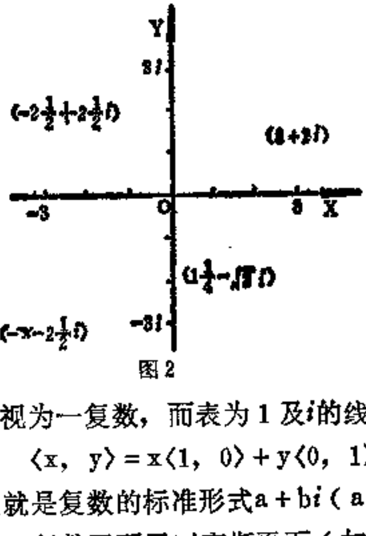


图2

大家知道，在笛卡儿平面上，点与有序数对有良好的一一对应关系。据图1(b)知，1和 i 对应的点分别是(1,0)和(0,1)，把实数对（x，y）与点（x,y）看成一样，规定 $\langle1,0\rangle=1$，　$\langle0,1\rangle=i$。则每一有序实数对 $\langle x,y\rangle$ 可视为一复数，而表为1及 i 的线性组合，即

$$\langle x,\ y\rangle=x\langle1,\ 0\rangle+y\langle0,\ 1\rangle=x+yi.$$

这就是复数的标准形式 $a+bi$（$a、b\in R$）。

复数平面又叫高斯平面（如图2），它不过是把笛氏直角坐标系里的y轴代以虚轴而已。由于复数平面及复数运算法则的引进，扩大了复数的应用。在复数范围内，任何方程都有解，补充了实数的不足。

为了划分实数、虚数、复数等的界线，人们对复数的有关概念定义如下：

复数$a+bi$（a、b都是实数），当$b=0$的时候就是实数。当$b\neq0$的时候，叫做虚数。当$a=0$，$b\neq0$时，叫做纯虚数，a与b分别叫做复数$a+bi$的实部和虚部。

要注意实数、虚数、纯虚数、复数之间的区别和联系。从集合的观点看，实数集与虚数集不相交，它们都是复数集的真子集，它们的并集就是复数集，纯虚数集是虚数集的真子集，它可以同非零实数所组成的集合一一对应。这些集合之间的关系，可以用图3来表示。$a+bi$形成一个新数系——复数系，它具备数系扩充的各项原则。例如，由旧的实数系，可得到新的复数系，实数系是复数系的一部分，复数系基本上维持了实数系的性质和运算等。

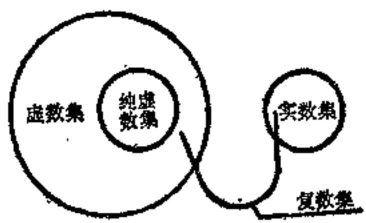


图3

复数系对于四则运算和乘方、开方运算都具有封闭性。并且在微分、积分的运算下也是封闭的。因为这个事实，产生了内容丰富的复变函数论。同时，复数还是物理学家手中的有力武器。没有复数，许多现代物理学方面的重大发现是无法想象的。

四、复数无大小

人们常说“复数无大小”。

复数为什么无大小？是不能或是不为？初学复数的人常

为此困惑。

我们知道，实数间用符号“<”表示的小于关系，具有以下性质：

（1）三歧性．对任意两个数a与b来说，以下三种情况：$a=b$，$a<b$，$b<a$有且仅有一种成立；

（2）传递性若$a<b$，且$b<c$，那么$a<c$；

（3）加法单调性若$a<b$，那么$a+c<b+c$；

（4）乘法单调性若$a<b$，且$0<c$，那么$ac<bc$。

如果我们要在复数间引入一个“小于”关系，按新数扩充的要求，自然应该使它具有上述性质。但是在复数间具有上述性质的关系是不存在的。

事实上，假定在复数间存在一个“小于”关系具有性质（1）—（4），

$\because$ $i\neq 0$，由（1） $0<i$ 或 $i<0$。

假定$0<i$，则由（4）得$0\cdot i<i^2$，

即 $0<-1$。 ①

由（3），得 $0+1<(-1)+1$，即 $1<0$。 ②

①的两边同乘以-1，由于$0<-1$，且根据（4），

得 $0\cdot(-1)<(-1)(-1)$，即 $0<1$。 ③

可见：①与实数大小的规定矛盾，且从$0<i$又导出②和③与三歧性相矛盾的结果，故$0<i$不成立。

假定$i<0$，由（3），得$-i+i<0+(-i)$，

即 $0<-i$。

由（4） $0\cdot(-i)<(-i)(-i)$，即 $0<-1$。

重复上面的做法，又得$1<0$及$0<1$，矛盾情况与前同，故$i<0$亦不成立。

一般的说，复数之间不存在一个小于关系具有性质(1)—(4)。在此不作过多的证明了。

附带说一下，复数之间虽不能建立大小关系，但是却可以建立一个"普通顺序"的。例如，对于复数$z_1=a_1+b_1i$，$z_2=a_2+b_2i$，我们可以规定：

当$a_1<a_2$时，则说z_1在z_2之前，记为$z_1<z_2$；

当$a_2<a_1$时，则说z_2在z_1之前，记为$z_2<z_1$；

当$a_1=a_2$，若$b_1<b_2$，则$z_1<z_2$；

若$b_2<b_1$，则$z_2<z_1$；

若$b_1=b_2$，则$z_1=z_2$。

这样定义的顺序关系就是，把复平面用平行于虚轴的直线来划分，即过实轴上的每一个点x，都作一条平行于虚轴y的直线，规定直线左边的点，在右边的点的前面。而同一条直线上的点，认为下面的点在上面的点的前面。这样，就把平面上的点规定了前后次序，如图4：$z_1<z_2<z_3$。

显然，这样定义的"顺序"只具有性质(1)、(2)、(3)，但不具备性质(4)。因此正确的说法应该是"复数有顺序，复数无大小。"

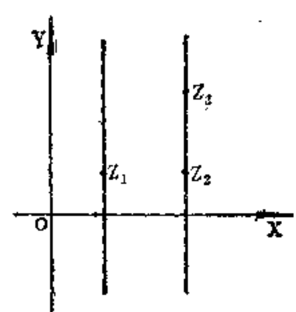


图4

复数之间尽管不能规定大小，但是可以规定相等。二复数当且仅当它们在复平面上对应同一个点时，叫做相等。这就是说，当a、b、c、d都是实数时，如果$a=c$，$b=d$，那么$a+bi=c+di$。反过来，如果$a+bi=c+di$，那么$a=c$，$b=d$。特别地，如果$a=b=0$，那