几何不等式在中国

主编 单墫

江苏教育出版社

几何不等式

在中国

主　编　单　墫

副主编　陈　计　张　垚

杨世国

江　苏　教　育　出　版　社

几何不等式在中国

单　墫　主编

责任编辑　王建军

出　　版：江 苏 教 育 出 版 社
（南京中央路165号，邮政编码：210009）
经　　销：江 苏 省 新 华 书 店
照　　排：南京理工大学激光照排公司
印　　刷：金 坛 教 学 印 刷 厂
（金坛市江南路1号，邮政编码：213200）

开本850×1168毫米　1/32　印张14.375　插页1　字数353,600
1996年9月第1版　1996年9月第1次印刷
印数1－2,000册

ISBN　7－5343－2810－1

G·2541　　　　定价：13.40元

序

几何不等式是一个魅力无穷的数学分支。

近二十多年来，几何不等式的研究蓬勃发展，速度之快令人吃惊。1969年，O. Bottema等人对到那时为止的成果作了一个很好的总结，搜集了400多个平面几何中的不等式，出了一本《几何不等式》，中译本(单墫译，北京大学出版社1991年出版)仅180页。而1988年，D. Mitrinović等所编的《几何不等式的新进展》，已经是一本包含3000多个不等式的大部头的著作(1991年，陈计与D. Mitrinović等写的《补遗》又增添了1987—1990年中出现的147个不等式)。

我国几何不等式的研究在80年代走向高潮。常庚哲先生、彭家贵先生等介绍了Pedóe不等式并作了种种推广。张景中先生、杨路先生不仅研究平面问题，而且对高维空间的几何不等式作了开拓性的工作。笔者在1980年写了一本通俗的小册子《几何不等式》(上海教育出版社出版)，起了一点“煽风点火”的作用。近十几年来，国内几何不等式的文章举不胜举，其中以陈计先生的工作最为突出，无论是质量，还是数量，在国内外都居领先地位。

为了交流成果，继续前进，1994年12月，由中国科学院成都分院与南京师范大学等单位联合在南京师范大学举办了首届全国几何不等式会议。会上宣读了数十篇研究论文，经过整理，汇编成这本《几何不等式在中国》。除会议交流的论文外，本书的第Ⅱ编还收集了一批有较大影响的论文，又有一个较详细的文献索引，可供参考。由于篇幅所限，很多好文章不能不割爱，收入的文章有些也只能摘要刊载。希望将来能出一本更加完整的集子，更好地反映国

内几何不等式研究的全貌。

从这本论文集可以看出，无论平面或者高维的几何不等式，我国都有深入的研究。前者可以陈计、王振、李文志、石世昌、陈胜利、刘健等先生的文章为代表，后者可以张景中、杨路、张垚、杨世国、苏化明、左铨如、毛其吉、冷岗松等先生的文章为代表。这些工作或技巧精湛，或思想新颖，其中有不少深刻的结果，已经引起国内外数学同行的关注。

几何不等式这一数学分支，不仅自身有众多的问题，而且其他数学分支，特别是组合几何，也不断产生出涉及几何不等式的问题。这持续涌现出的问题，标志着几何不等式的研究方举未艾。这本论文集是对国内几何不等式研究的第一次总结，我们相信这本论文集的出版一定会将几何不等式的研究推向新的高潮。

非常感谢江苏教育出版社与王建军编辑，由于他们的支持与努力，这本论文集得以及早地问世。

单 墫

1995 年 12 月

目　　录

第Ⅰ篇

第Ⅱ篇

第　I　篇

有限点集的一类组合几何不等式

杨 路 曾振柄

中国科学院成都计算机应用研究所(610041)

Heilbronn 问题是组合几何的一个最优化问题. 设 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 是平面上的 $n(n\geqslant 3)$ 个点,定义

$$(p_1 p_2 \cdots p_n)=\min\{\mathrm{Area}(p_i p_j p_k) \mid 1\leqslant i<j<k\leqslant n\}.$$

设 K 是平面上的凸集,定义

$$H_n(K)=\frac{1}{\mathrm{Area}(K)}\sup\{(p_1 p_2\cdots p_n) \mid p_1, p_2, \cdots, p_n\in K\},$$

数 $H_n(K)$ 称为 K 的 Heilbronn 数,而满足

$$\frac{(p_1 p_2\cdots p_n)}{\mathrm{Area}(K)}=H_n(K)$$

的图形 $p_1 p_2\cdots p_n$ 称为 K 中的 n 个点的 Heibronn 分布.

1950 年,Heilbronn 猜测存在常数 c,使得

$$H_n<\frac{c}{n^2}.$$

这一猜测后来为 J. Komlós 等人所否定. 他们证明存在常数 c,满足

$$\frac{c(\log n)}{n^2}<H_n.$$

J. Komlos 等在 1981 年获得 H_n 的上界:

$$H_n < \frac{c}{n^{\mu}},$$

这里 c 是常数，$\mu = \frac{8}{7} - \varepsilon = 1.1428\cdots - \varepsilon, \varepsilon > 0$.

关于 Heilbronn 问题另一方面的工作是给定凸集 K 和较小的自然数 n，计算 $H_n(K)$ 的准确值并找出相应的 Heilbronn 分布. M. Goldberg 在 1972 年提出关于正方形的 Heilbronn 数和 Heilbronn 分布的若干猜想，它们的大部分到现在还没有被证明或否定. 1979 年以来，杨、张、曾* 等人研究了 Goldberg 的猜测和正方形、三角形、圆盘等凸集的 Heilbronn 数，获得了一些结果. 这些结果包括：

定理 1 设□表示正方形，则

$$H_5(\square) = \frac{\sqrt{3}}{9}, H_6(\square) = \frac{1}{8}.$$

定理 2 设△表示三角形，则

$$H_5(\triangle) = 3 - 2\sqrt{2}, H_6(\triangle) = \frac{1}{8}.$$

定理 3 设 D 是圆盘，则

$$H_5(D) = \frac{2}{\pi}\sin^2\frac{\pi}{5}\sin\frac{2\pi}{5}, H_6(D) = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi},$$

$$H_7(D) = \frac{2}{\pi}\sin^2\frac{\pi}{7}\sin\frac{2\pi}{7}.$$

图 1—7 分别表示正方形和三角形内 $n=5,6$ 个点的 Heilbronn 分布. M. Goldberg 猜测当 $n<8$ 时，正方形的最大内接正仿射正 n 边形是 Heibronn 分布。定理 1 说明 Goldberg 的猜测当 $n=5$ 是错的；当 $n=6$ 是对的；当 $n=7$，由 Goldberg 的猜想有

$$H_7(\square) = 0.0794\cdots,$$

* 杨为杨路，张为张景中，曾为曾振柄，下同. ——编者

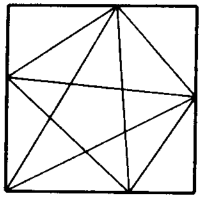

图 1

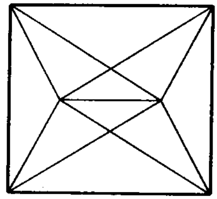

图 2

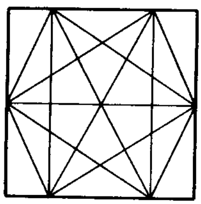

图 3

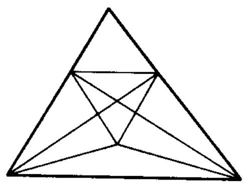

图 4

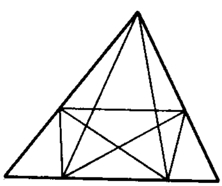

图 5

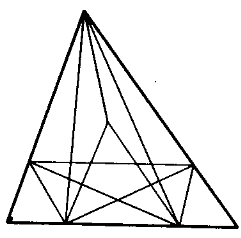

图 6

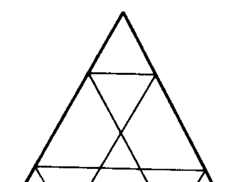

图 7

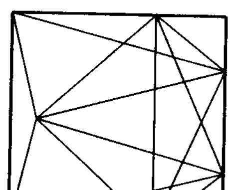

图 8

而图 8 给出的图形则证明了

$$H_7(\square)\geqslant\frac{1}{12}>0.0794\cdots$$

这说明正方形的最大内接仿射正七边形不是 Heilbronn 分布。圆盘内 n 个点的 Heilbronn 分布，当 $n<8$ 时是圆内接正 n 边形，而当 $n=8$ 时圆内接正 n 边形不是 Heilbronn 分布。如图 9、10，设

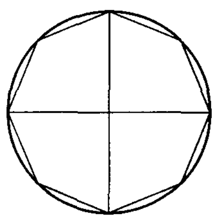

图 9

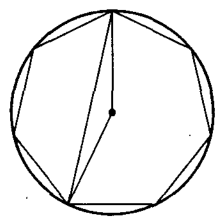

图 10

$p_1p_2\cdots p_8$ 是单位圆内接正八边形，$q_1q_2\cdots q_7$ 是单位圆内接正七边形，q_8 是圆心，则有

$$(p_1p_2\cdots p_8)=\frac{\sqrt{2}-1}{2\pi},(q_1q_2\cdots q_8)=\frac{\sin\frac{\pi}{7}}{2\pi}.$$

关于 Heilbronn 数 $H_n(K)$ 的上界，杨、Dress、曾等证明下面的结果.

定理 4 设 K 是平面任一凸集，则

$$H_5(K)\leqslant\frac{5-\sqrt{5}}{10},H_6(K)\leqslant\frac{1}{6},$$

$$H_7(K)\leqslant\frac{1}{9},$$

等号成立的条件当 $n=5,6$ 时，K 分别是仿射正五边形和仿射正六边形；当 $n=7$ 时，K 如图 11 所示。

由 Blaschke 关于仿射微分几何的一个结果，可得下面的定

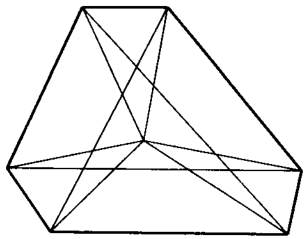

图 11

理.

定理 5 设 K 是平面任一凸集,则

$$H_3(K) \geqslant \frac{3\sqrt{3}}{4\pi},$$

等号成立当且仅当 K 是椭圆.

我们猜测,下面的不等式

$$H_4(K) \geqslant \frac{1}{2\sqrt{6}-1}, H_5(K) \geqslant 3-2\sqrt{2},$$

对于平面任一凸集成立.

Heilbronn 数的计算可化为下面的最优化问题. 设 $p_1p_2\cdots p_m$ 是平面上(或者平面上的凸集 K 内)的一个凸 m 边形,$p_{m+1},\cdots,p_{m+l}$是 $p_1p_2\cdots p_m$ 中的 l 个点($m\geqslant 3, l\geqslant 0$),计算

$$h(m,l) = \frac{1}{\mathrm{Area}(p_1p_2\cdots p_m)}\sup(p_1p_2\cdots p_{m+1}\cdots p_{m+l}).$$

这一问题已获得的非平凡结果包括在定理 6 和定理 7.

定理 6 设 $p_1p_2\cdots p_m$ 是平面上凸 m 边形,$p_{m+1},\cdots,p_{m+l}$是 $p_1p_2\cdots p_m$ 中的 l 个点. $h(m,l)$定义如上. 则

$$h(3,2) = \frac{1}{4+2\sqrt{3}}, h(3,3) = \frac{2}{11+3\sqrt{5}},$$

$$h(4,1)=\frac{1}{2+2\sqrt{2}},h(4,2)=\frac{1}{8},$$

$$h(5,1)=0.14860979\cdots,h(6,1)=\frac{1}{9}.$$

其中，$h(5,1)$是方程 $11\mu^3+10\mu^2+5\mu-1=0$ 的唯一实根.

定理 7 设 $h(m,l)$如上定义，则

$$h(m,0)=\frac{4}{m}\sin^2\frac{\pi}{m}$$

对 $3\leqslant m\leqslant 7$ 成立.

我们猜测定理 7 对所有 $m\geqslant 8$ 也是成立的.

定理 6 和定理 7 中的结果，$h(4,1)$是马援、王振得到的. $h(3,2)$，$h(4,2)$，$h(5,1)$，$h(6,1)$以及 $h(m,0)$是由杨、张、Dress、曾等证明的. 图 12—15 给出它们相应的最佳图形.

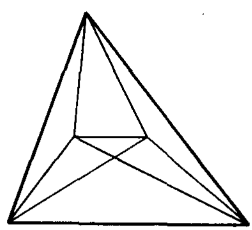

图 12

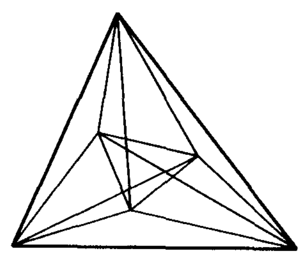

图 13

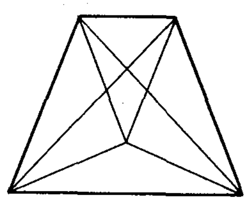

图 14

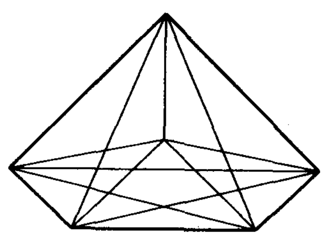

图 15

证明与 Heilbronn 问题有关的几何不等式的一个有效方法是图形的扰动.下面我们用扰动的方法来计算 $h(3,3)$ 并寻找 $h(3,3)$ 对应的最佳图形,我们要证明:

定理 8 设 $p_1p_2p_3$ 是一三角形,p_4,p_5,p_6 是 $p_1p_2p_3$ 中的三点.如果

$$\frac{(p_1p_2p_3p_4p_5p_6)}{\text{Area}(p_1p_2p_3)}=h(3,3)$$

成立,则必可将 p_4,p_5,p_6 重新编号使得

$$\begin{aligned}\text{Area}(p_1p_2p_6)&=\text{Area}(p_2p_3p_4)=\text{Area}(p_1p_3p_5)\\&=\text{Area}(p_2p_4p_5)=\text{Area}(p_3p_5p_6)\\&=\text{Area}(p_4p_5p_6)=(p_1p_2p_3p_4p_5p_6)\end{aligned}$$

成立.

为表达方便,我们记

$$\text{Area}(p_ip_jp_k)=(p_ip_jp_k).$$

如果某一三角形 $p_ip_jp_k$ 满足

$$(p_ip_jp_k)=(p_1p_2\cdots p_6),$$

称 $p_ip_jp_k$ 是紧的(tight).

证明 易知 $h(3,3)\geqslant\frac{1}{9}$,只要取 p_1,p_2,p_3,p_4,p_5,p_6 分别为 $(0,0),(1,0),(0,1),\left(\frac{4}{9},\frac{4}{9}\right),\left(\frac{1}{9},\frac{4}{9}\right),\left(\frac{4}{9},\frac{1}{9}\right)$,即得

$$(p_1p_2p_3p_4p_5p_6)=\frac{1}{9}(p_1p_2p_3).$$

设 $p_1p_2p_3$ 是一三角形,p_4,p_5,p_6 是 $p_1p_2p_3$ 中的三点.如果通过 p_4,p_5,p_6 的三条直线中有两条,例如 p_4p_5,p_4p_6,都和 $p_1p_2p_3$ 的某两边,例如 p_1p_2,p_1p_3 相交,则下面四者总有一个成立:

(1) $p_5,p_6\in p_1p_2p_4$;

(2) $p_5,p_6\in p_1p_3p_4$;

(3) $p_4,p_5\in p_1p_2p_6$;