中 学 生 数 学 视 野 丛 书

ZHONGXUESHENGSHUXUESHIYECONGSHU

从哥尼斯堡七桥问题谈起

CONG GENISIBAO QIQIAO WENTI TANQI

王树禾 编著

湖 南 教 育 出 版 社

责任编辑 郑绍辉 胡 坚 装帧设计 熊玉心

ISBN 7-5355-2998-4

9 787535 529985 >

ISBN7—5355—2998—4/G·2993
定价:8.80 元

中 学 生 丛 书

从哥尼斯堡七桥问题谈起

CONG GENISIBAO QIQIAO WENTI TANQI

王树禾 编著

湖 南 教 育 出 版 社

ZHONGXUESHENGSHUXUESHIYECONGSHU

序　　言

我们有一个数学世界，它为现实世界(科学)提供大量有力的工具，它还为精神世界(哲学)贡献丰富深刻的思想.

人们创造数去记载物件的个数、长度、速度等，运用多项式去表述物理定律，用矩阵去作多种商品的价目表，去刻画几何中的变换，人们创造微积分，使得在研究几何图形和物理现象时有了强有力的工具.例如，根据物理定律数学工作者通过计算能判定某一从未发现的星体必将在某天某时在某方向上出现，而后天文观测者的确在该天该时该方向观测到它.数学世界在爱因斯坦的相对论出现之前已准备好一种几何空间，刚好满足它的需要，我们日常生活中离不开的计算机也是先在数学世界中酝酿，而后由数学工作者设计出来的.只要想一下，装进一个特殊软件，计算机就能帮你证明平面几何定理，就能和国际象棋冠军对阵，就能在平稳对接宇宙飞船中起重要作用，只要想一下数学和计算机科学的手足关系，谁都会赞赏数学世界提供解决问题能力的神奇和伟大，今日数学世界仍在继续为我们创造和贡献新工具、新方法、新理论.

数学世界中的确还有另外一面.按照数学自身发展的规律提出和研究的一些问题，它们是数学世界中特有的现象，例如大家都听说过的哥德巴赫问题，当你触触、研究它们时，你会感到

一种棋艺味、艺术味、哲学味，它们本身看来不像是研究现实世界可以用得上的工具，然而它们却和数学世界中的工具性质部分相互呼应、相互影响、紧密联系而共同组成一个绚丽多彩的统一世界.

中学数学是数学世界的基石，是进入数学世界的必经之路，是数学教育工作者精心为全体中学生设计的多层台阶.然而他(她)们中的一些数学爱好者一定会希望向周围看一看，或者爬到一个山头，或者钻入小林的深处，领略一下数学世界中的风采，体验一下数学世界的气氛，从而获得一些数学兴趣和数学修养，我们这套丛书就是为这些中学生编写的.如果说英语给我们打开一个通向境外世界的窗口，那么中学数学给我们打开了通向数学世界的大门，而这套丛书将引导我们去欣赏它的一些景点，扩大我们的数学视野.

我们常谈论数学的力量(这是大家都同意的).的确，搞经济理论的人，常是数学出身的人得到大奖，搞计算机科学的人，也常是数学出身的人有出色表现.人们还谈论数学的美(有人不同意).的确，在形式符号掩盖下，数学中完美的结构、深刻的和谐、意外的联系都给人一种美的享受，美是有力量的.无疑，在青少年时期给自己建立一个好的数学基础和数学修养，那将是一笔终身享受、终身受益的资本.

但愿这套丛书在这方面能对有数学兴趣的中学生们有所帮助.

刘绍学

1997年11月写于北京师范大学

引　　言

本书用与教室里讲课不同的方式，比较自由、比较轻松地讲述图论的重要内容、思想方法和典型应用，作者的动机是把图论学科的知识性、趣味性、教育性与实用性熔于一炉，飨献聪明好奇、勤于思考的中学生朋友们，以期对读者的现代科学素质培养小有裨益．由于图论自身固有的诱惑力，今昔“读图成瘾”者，包括作者本人在内，的确大有人在，希望本书将成为你永远的好朋友．

图论在民间游戏中诞生，在现代数学、工程技术、优化管理等科技与生产活动中脱俗而立，它在数学阵营中异军突起，急剧发展．事实上，当今科学技术面临新的突破，主要由于计算机科学技术的崛起，要求每个科学技术工作者接受足够多的图论训练；1997年爆出了人类科技史上令人目瞪口呆的新闻，人造机器“深蓝”计算机在国际象棋盘上战胜了国际头号象棋大师卡斯帕罗夫．计算机是机械化地处理离散事物的(例如棋子布局)工具，它的理论基础是离散数学，而图论则是离散数学的重要分支．由于计算机与图论结盟，解决了和正在解决着大量的优化问题，这也正是图论日益受到宠爱的大背景．就其教育价值而论，由于图论问题的提法通俗简单、直观活泼，实际上又往往十分难解，向我们的机敏性和逻辑性进行挑战，所以它也是一门适合中

学生的极佳教育科目.读了这本书,你就会知道,有的图论问题,百思方得其解,把人训练得更加足智多谋;有的图论问题则不是百思能得其解的,教会我们谦虚谨慎,知难而学.

为了尽快认识图论的面貌,有必要先介绍十则图论要例.

1. 哥尼斯堡七桥问题

欧洲的普瑞格尔河流过古城哥尼斯堡市中心,河中有岛两座,筑有七座古桥,如图1所示.每逢节假日,市民们纷纷上岛,老幼携扶,游玩散步,不知何日何人提出如下的智力问题:请过每座桥恰一次,再返回出发点.反复的奔走与失败,使人们不知其所以然地猜想其答案是否定的.1736年,年方29岁的著名数学家欧拉(Euler)严格地证明了上述七桥问题无解,并且由此开创了图论的典型的思维方式与论证方式,1736年遂公认为图论元年.

图 1

2. 哈密顿(Hamilton)周游世界游戏和货郎问题对计算机科学的挑战

1857年,英国著名数学家哈密顿发明了一种游戏:在正十二面体的20个顶点上分别标注北京、东京、柏林、巴黎、纽约、旧金山、莫斯科、伦敦、罗马、里约热内卢、布拉格、新西伯利亚、墨尔本、耶路撒冷、爱丁堡、都柏林、布达佩斯、安亚伯、阿姆斯特丹、华沙20个遍布世界之大都市,要求从某城出发,沿正十二面体的棱行进,每城恰过一次,再返回出发地.

哈密顿将此项专利出卖给一位玩具商,得高酬25个金币,

但由于这种游戏数学含金量高,无奈智商不足的大多数市民玩不转它,销路并不看好.这个游戏是可以成功的,但路线并非唯一.哈密顿周游世界的游戏貌似欧拉解决的七桥问题,都是要求一次性走遍,但七桥问题中一次性走遍所有的桥的判定与"周游世界"时一次性走遍所有的城的判定,在难度上一般而言不是同一个级别的问题,后者比前者要困难得多!走遍"桥"的问题的一般化问题皆已彻底解决,而走遍各顶点的一般问题则是当今最难判定的问题之一,至今尚无有效方法来解决.本书稍后的章节中会把个中难处说明白.

把哈密尔顿周游世界的游戏推而广之,提出了一个理论上与实用上价值连城的所谓货郎问题:

一位货郎到各村去卖货,再返回出发地,每村都要串到,要求为其设计一种路线,使得货郎走过全程的时间最短.

假设每两个村子之间都有一条已知长度的路相通,劝你千万不要用下面的方式去求解:把这几个村子进行全排列($abcd$与$dcba$认为是一种方案),再以全排列为序分别求出相应的总路程,再从总路程当中取用最小值对应的那条售货路线.由于村子个数是有限的,所以货郎问题的最优解是存在的,而且如上所述,似乎求取有方.只可恨这$\frac{1}{2}\times n!$种不同的方案个数过多,即使处理一种方案算做一次运算,在每秒百亿次运算的巨型机上,对例如128个村子,也要连续运算10^{700}个世纪以上!可见这种愚公移山式的解决方式是绝对不可取的,应当设计有效的计算方法,但至今对此仍无本质进展,读完本书的后面章节,你就会感到,也许这类问题是永世不会有效解决了!

3. 四色猜想

1852 年,伦敦一位学生高思利(Guthrie)提出一个猜想:任意给定一张无色地图,把每国版图染上一种颜色,且使邻国异色,用 4 种颜色足矣. 1879 年,伦敦数学会的数学家肯普(Kemple)发表了极为精巧的论证,宣称证明了四色猜想成立,不幸十年之后被人指出错误;1890 年,希伍德(Heawood)沿用肯普的方法证明了五色定理,即四色猜想中的 4 改成 5 确实成立. 1976 年,美国数学家阿佩尔(Appd)和哈肯(Haken)宣布用计算机证实了四色猜想成立,他们用了一百亿个逻辑判断,耗用 1200 多个机时. 但这种不可视性的机器证明存在一个用肉眼看不清其真伪的缺点,至于手写的四色猜想之证明,作者认为距成功的时日尚远.

粗看四色猜想,平易近人到这种程度,可以把它向公路上和我们随机而遇的任何人用不了三分钟就能讲清楚,即使是文盲,也可以用树棍在地上画几个实例来验证四色猜想可以成立,但它的严格证明,百余年间,有多少精干的数学家绞尽脑汁亦不得其果.(在这里劝同学们循序渐进,不宜沉迷于四色猜想的手笔证明而过多耗费时光.)

4. 拉姆赛问题

1928 年,英国数学家、哲学家、经济学家拉姆赛(Ramsey)在伦敦数学会宣读了一篇论文,提出了所谓拉姆赛问题和有关定理. 1930 年,他因腹部手术并发症不幸早逝,亡年仅仅 26 岁!但他的关于拉姆赛问题的遗产却福泽数学界. 数学家们认为,如果要从组合数学当中挑选一个最精美的成果,那么大多数数学

家将投拉姆赛理论的票．用图论的方式表述的拉姆赛问题为：

任意指定两个自然数 p,q，再把一个画上全部对角线的正 n 边形上的直线段用红与蓝任意上色，每条线段一种颜色，结果或者有一个红色 p 边形，连同其全部对角线皆是红色的；或者有一个蓝色 q 边形，连同其全部对角线都是蓝色的．问 n 最小是多少才能有此结果？

如果把上述最小的 n 记成 $r(p,q)$，那么直观地，上述拉姆赛问题可以改述成：任给一人群，其中必有 p 人彼此相识或 q 人彼此不相识，问这群人至少几人？例如 $r(3,3)=6$．事实上，设 v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6 是任取的 6 个人，两人相识时，在两人之间用红色线绳相连，两人不相识时，在两人之间用蓝色线绳相连．与 v_1 相连的五条线绳中至少有三条同色，不妨设其为红色，设这三条红线绳的另一端连着 v_2,v_3,v_4，若 v_2,v_3,v_4 三人之间有一条是红色线绳，则与 v_1 一起出现三位彼此相识者，不然，即 v_2,v_3,v_4 之间无红色线绳，则 v_2,v_3,v_4 是三位彼此不相识者，所以 $r(3,3)\leqslant 6$；而任取的五个人 v_1,v_2,v_3,v_4,v_5，可以出现如图 2 所示的关系．实线表示相识(红)，虚线表示不相识(蓝)，于是不出现 3 人相识或 3 人不相识的现象，所以 $r(3,3)=6$．

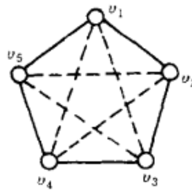

图 2

$r(p,q)$ 称为拉姆赛数，经过好几代数学家的奋斗，加上计算机的帮助，迄今总共只求出了九个非平凡的拉姆赛数，它们是 $r(3,3)=6$，$r(3,4)=9$，$r(3,5)=14$，$r(3,6)=18$，$r(3,7)=$

23, $r(3,8)=28$, $r(3,9)=36$, $r(4,4)=18$, $r(4,5)=25$. 著名匈牙利数学家厄尔多斯(Erdös)曾经用下面的比喻来形容求拉姆赛数的困难程度：一伙外星强盗入侵地球，威胁人类说，若不能在一年内求出 $r(5,5)$，他们就灭绝人类！此时人类的最佳对策是调用地球上所有的计算机和计算机专家，日以继夜地来计算 $r(5,5)$，以求人类免于灭顶之灾；如果外星人威胁说要求得 $r(6,6)$，那我们已别无选择，只有同仇敌忾，对这批入侵者进行先发制人的打击. 事实上，1993 年算出的 $r(4,5)=25$，相当于一台标准微机 11 年的工作量，$r(5,5)$ 与 $r(6,6)$ 的难度就可想而知了.

5. 伯努利——欧拉(Bernoulli-Euler)错放信笺问题

某人给 6 位朋友分别写了一封信，且准备了 6 个写有收信人地址姓名的信封，问有多少种装入信笺的可能，使每份信笺与信封上的收信人不相符？把 6 改成 60 试试看！

6. 姊妹洗碗问题与卡塔兰(Catalan)数

饭后，姐姐洗碗，妹妹把姐姐洗过的碗一个一个放进碗橱摞成一摞. 共有 n 个图案两两相异的碗，洗前也摞成一摞. 也许因为小妹贪玩，洗好的碗拿进橱子不及时，姐姐就把洗过的碗摞在旁边，问小妹摞起的碗有几种可能的方式.

与上述姊妹洗碗问题解法相同的还有不少实际问题. 例如一个汽车队在狭窄路面上行驶，不许超车，但可以经过某胡同口时进入该胡同去加油，之后退出此死胡同再插队行进，共有 n 辆汽车，问可能有几种排列不同的车队开出城去？

又例如，一个代数式中有 $2n$ 个括号，这些括号的配对有多

少种可能？此例也与上面两例同解.它们的答案皆为$\frac{1}{n+1}\cdot C_{2n}^{n}$,这个数称为卡塔兰数,记成$C(n)$.

卡塔兰数用处很多,例如一个家族中有血缘关系者共n位,且是在每人有且仅有两个子女的情况下形成的家族关系,问这种家族关系一共可能有多少种？答案是$C(\frac{n-1}{2})$.

7. 中国邮路问题与多邮递员中国邮路问题

一位邮递员从邮局选好邮件去投递,然后返回邮局.当然他必须经过他所管辖的每条街道至少一次.请为他设计投递行程,使其耗时最少.如果有k位邮递员,又应如何安排他们的投递路线,使最后一位完成任务的邮递员完工的时间最早？

8. 追捕逃犯问题

逃犯若干,在公路网上流窜,应至少派几名刑警,才能保证把逃犯们捉拿归案？或曰:纵横交错的河道网中有大鱼多条,渔翁至少要准备几张与河面一样宽的鱼网,才能保证把这些大鱼都捞上来？

9. 迷宫问题

希腊神话云:专门以人肉为食的牛身人面妖精米诺托害怕被它残害的冤鬼向它讨还血债,在克里特岛建造了一座迷宫.外人不知其结构,如果冒然冲入,去对米诺托行刺,恐怕不易找到它的藏身之处,即使找到米诺托且把它除掉,由于退路不明,也有被它的帮凶截获的危险.传说希腊雅典王子忒修斯在公主丽阿特涅的帮助下终于顺利闯入迷宫,且为受害者雪了恨.这位公主当时正给王子编织绒线衣,她把一个线球递给王子,让王子把

线的一头栓在迷宫门上，一边走一边放开线球以标明哪些通道已经经过，他沿着未走过的通道尽可能远地走下去，当走到死胡同或那里已无未走过的走廊可选择时可沿原路返回，再寻找未走过的走廊.

1690 年建造的独裁者威廉王的迷宫至今还保留着(见图 3).

图 3

迷宫问题：一座未知结构的迷宫，要求沿其每条走廊右侧行走两遍，且仍由入口退出，应如何行走？给出一种普遍适用的行走规则.

10. 敌我渡河问题

我方两名军事人员与敌方两名军事人员同时到某现场视察，途中要经过一条河，河上无桥，只有一条小船，且每次最多能乘二人.为安全起见，敌我双方同在一处时，我方人员不能少于敌方人员，船过河一次需 10 分钟，问最少要用几分钟才能使双方人员都渡过河去？

同类的问题还有：人、狗、鸡、米均要运过河去，船上除一人划船外，最多还能运载一宗物品，但人不在场时，狗咬鸡、鸡吃米，问应如何安排摆渡？

本书各章都提供了许多生动有趣的图论问题，连同上述十个问题，我们都将给出分析和解答.读者将会发现，图论最吸引人的地方是它蕴涵着大量不俗的新思想、漂亮的图形和巧妙的

论证，即使是非常困难且尚未解决的问题，也能容易地表述成使文化水平不高的人听明白的问题．现实世界处处潜藏着图论的原始模型，它是最接近群众生活的一门数学．问题外表的简单朴素和本质上的刁难复杂，使得我们在图论问题面前必须谨慎严肃地思考问题．

图论科学包含的主要分支有图论、算法图论、极值图论、网络图论、模糊图论、随机图论和超图理论等．

图论能有今日之蓬勃发展，不仅因为它具有得天独厚的美学意义下优雅有趣的形象，而且更因为它的有用．无论在数、理、化、天、地、生等基础学科当中，还是在有线电、无线电、交通运输、军事作战、通讯网络等高技术应用领域，图论都是大有作为的，对于开关网络、形式语言、数据结构、编译程序、操作系统、人工智能、计算机网络等方面，亦有显著贡献．

本书共设九章，比较全面地讲述了图论的主干内容，由于采用了深入浅出的表达方式，书中百分之百的内容都可被高中同学读懂，如果读者是一位有认真思考问题习惯的人，甚至还可以在本书的启发之下，选一些图论题目来研究研究．事实上，作者的写作目的不仅是为了传授图论知识，更主要的是希望用图论里一些生动的题目激活同学们对科学的好奇心和参与研究的欲望，培养读者的数学机敏性和独立思考的能力，我们坚信这些素质的养成，必将对科学事业和社会活动有所助益．

目　　录