导航清华北大，启东名师助你全面提速！

启东

大提速

全面涵盖新中考主要考点和重点题型的完全解题手册

启东重点中学一线教师 编写

总主编 盛焕华

一套以“金题”来诠释

以“银题”来感知

以“训练”来全面提高解题能力的新教辅！

初中数学

黑龙江朝鲜民族出版社

启东大提速

初中数学

Chu zhong shu xue

本册主编　张　杰

黑龙江朝鲜民族出版社

图书在版编目(CIP)数据

启东大提速.初中数学/盛焕华主编;张杰等编.牡丹江:黑龙江朝鲜民族出版社,2003.7
ISBN 7-5389-1122-7

Ⅰ.启... Ⅱ.①盛...②张... Ⅲ.数学课-初中-教学参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 028940 号

书　　名/ **启东大提速　初中数学**
编　　者/ 张　杰　等
责任编辑/ 姜贤模
责任校对/ 王　艳　高红霞
出版发行/ 黑龙江朝鲜民族出版社
印　　刷/ 牡丹江书刊印刷厂
开　　本/ 787×1092　1/16
印　　张/ 14.5
字　　数/ 400 千字
版　　次/ 2003 年 7 月第 1 版
印　　次/ 2003 年 7 月第 1 次印刷
印　　数/ 1-15 000 册
书　　号/ ISBN 7-5389-1122-7/G·297
定　　价/ 16.00 元

清华北大不是梦，名师助你跃龙门！

——《启东大提速》丛书序

应试就是解题。学生的学习能力说到底就是解题能力。学生的解题能力不是靠教师“讲”出来的，而是靠学生“练”出来的。

常常听学生说，上课听得懂，作业也会做，可是一考试就砸锅。分析其原因，在于学生缺乏一定量的由例题、普通作业到考试题之间的举一反三式的强化训练。

在新教材、新大纲、新课标、新《考试说明》接连出台，林林总总的辅导材料让人眼花缭乱之时，能不能有一套去掉“花拳绣腿”，强调“少说多做”，以“金题”来诠释，以“银题”来感知，以“训练”来提高应试解题能力的新教辅呢？经过较长时间的研究与精心策划，我们的这套《启东大提速》丛书终于和广大学子见面了。这套丛书集中了江苏省启东市重点中学一线教师的集体智慧和多年的教学经验，在编写上体现了以下几种鲜明的特点：

1. **恰当的试题定位**：注重对试题所关联的考点、题型的再巩固与逐步提高，是运用性练习，是不断向考试要求全真模拟、靠近的反复训练。

2. **明确的使用功能**：每个考点均配有极其典型的“金题”，而每道“金题”都对应三道“银题”。这种“举一反三”式的训练目的就是要解决“为什么听懂了例题却不会解题，不会考试”的普遍问题，故每组练习不是停留在同一层次上的机械重复，而是由双基题——能力题——应用型、开放型、创新型、综合型试题的由低到高的不断递进的训练。

3. **翔实的解题提示**：出示各道试题的详细的“解”、“析”和答案，在解析过程中重思路的点拨，做到对试题进行“精到分析”，让学生了解试题的命题意图，分析最佳切入点、解题关键和技巧，通过提醒审题注意点，点拨解题方法，揭示解题思路，指出“错解”的原因。

《启东大提速》丛书为广大面临中考、高考的学生构建了一个科学、严密而完整的解题训练体系。这套涵盖新中考、高考主要考点和重点题型的解题手册将使你心明眼亮，轻松闯关。

冲刺清华北大，我们助你全面提速！

《启东大提速》编委会

目 录

第一部分　代　数

第一章　有理数

教纲要求

1. 有理数的概念

有理数. 数轴. 相反数. 数的绝对值. 有理数大小的比较.

具体要求：

(1)了解有理数的意义，会用正数与负数表示相反意义的量，以及按要求把给出的有理数归类.

(2)了解数轴、相反数、绝对值等概念和数轴的画法，会用数轴上的点表示整数或分数(以刻度尺为工具)，会求有理数的相反数与绝对值(绝对值符号内不含字母).

(3)掌握有理数大小比较的法则，会用不等号连接两个或两个以上不同的有理数.

2. 有理数的运算

有理数的加法与减法. 代数和. 加法运算律. 有理数的乘法与除法. 倒数. 乘法运算律. 有理数的乘方. 有理数的混合运算.

科学记数法. 近似数与有效数字.

具体要求：

(1)理解有理数的加、减、乘、除、乘方的意义，熟练掌握有理数的运算法则、运算律、运算顺序以及有理数的混合运算(不超过 6 个数)，灵活运用运算律简化运算.

(2)了解倒数概念，会求有理数的倒数.

(3)掌握大于 10 的有理数的科学记数法.

(4)了解近似数与有效数字的概念，会根据指定的精确度或有效数字的个数，用四舍五入法求有理数的近似数；会用计算器求一个数的平方与立方(尚无条件的学校可使用数学用表).

(5)了解有理数的加法与减法、乘法与除法可以相互转化.

举一反三

考点1　正负数

【金题 1】 (2002 年吉林省中考题)如果自行车车条的长度比标准长度长 2 mm，记作＋2 mm，那么比标准长度短 1.5 mm 的记作________ mm.

解：－1.5 mm.

析：把一种量记为“＋”，则与它具有相反意义的量定义为“－”.

银题 1　气温是零下 3 摄氏度，记作　　(　　)

A. －3　　B. 3　　C. －3 ℃　　D. 3 ℃

解:C.

析:用正负数表示某些量时,它含有一定的意义,单位不能漏;按通常记法零上记为"+",相反,从零下记作"−".

➡**跟题 2** 一天中午 12 时的气温是 7 ℃,傍晚 5 时的气温比中午 12 时下降了 4 ℃,凌晨 4 时的气温比中午 12 时低 8 ℃,傍晚 5 时的气温是多少?凌晨 4 时的气温是多少?

解:温度计中,0 ℃以上与 0 ℃以下是两个相反方向,以 0 ℃划分界限,上、下分别记为正和负.因为中午时气温是 7 ℃,到傍晚 5 时气温下降了 4 ℃,所以 $7-4=3$(℃).

这就是说傍晚 5 时气温为 3 ℃.

凌晨 4 时的气温比中午 12 时的气温低 8 ℃,凭直觉可知,这时的温度下降到零下,如果沿用算术中的减法 $7-8=?$,我们知道这是不可能的,由于我们关心的是它们的差值,于是可反转运用 $8-7=1$.所以知道,凌晨 4 时的气温为 -1 ℃.

析:本题以中午 12 时的气温为基准,按习惯记法,0 ℃以上为正,0 ℃以下为负.温度经过变化以后,先弄清变化后这个量的意义,即是 0 ℃以上还是 0 ℃以下,然后确定他们的温差.

➡**跟题 3** 某人在车站西 5 km 处,第一个来回先向西走 1 km,再向东走 2 km;第二个来回先向西走 2 km,再向东走 4 km;第三个来回先向西走 3 km,再向东走 6 km;按此规律走下去,第十个来回后,此人在车站向________ km 处?

解:向东 50 km.

析:规定向东为正,则向西为负.取车站为原点,第一个来回走了$(-1)+2=1$,即原地向东走了 1 km;第二个来回走了$(-2)+4=2$ km,即原地向东走了$(1+2)=3$ km;第三个来回走了$(-3)+6=3$ km,即原地向东走了 $1+2+3=6$ km.按此规律走下去,十个来回共走了 $1+2+3+\cdots+10=55$,$(-5)+55=50$ km.即第十个来回后,此人在车站向东 50 km 处.

点评:用正负数可表示具有相反意义的量,因此在遇到具有相反意义的量时,可考虑用正负数表示.规定一种意义的量为正,则另一种意义的量为负.规定正负数时,必须按习惯,如气温、海拔高度、会计做帐时的盈亏等等.

考点 2 相反数、倒数

【金题 2】 (2000 年北京市崇文区中考题)-6 的相反数是 ( )

A. 6 B. -6 C. $\frac{1}{6}$ D. $-\frac{1}{6}$

解:6.

析:只有符号不同的两个数,其中一个叫做另一个的相反数.它们互为相反数并且它们的绝对值相等。互为相反数的两个数,在数轴上位于原点的两侧,且到原点的距离相等.

➡**跟题 1** 填空:$-m$ 的相反数是________,$-m+1$ 的相反数是________,$m+1$ 的相反数是________.

解:m,$m-1$,$-m-1$.

析:遇到用字母表示数时,不管字母是正数还是负数,先加括号,再在它的前面添上"−"后,就是这个数的相反数.

➡**跟题 2** 一个有理数比它的相反数大 5,则这个有理数是________.

解:$\frac{5}{2}$.

析:设这个数为 x,根据题意得

$x=-x+5$,$x=\frac{5}{2}$.

➡**银题 3** 若$|2a-b|$是$(b-1)^2$的相反数,则$(a+b)^4$的值等于________.

解:$\frac{81}{16}$.

析:由题意设$|2a-b|+(b-1)^2=0$

由非负数的性质可知$a=\frac{1}{2}$,$b=1$.

$\therefore (a+b)^4=\left(\frac{1}{2}+1\right)^4=\frac{81}{16}$.

点评:理解相反数的代数意义及几何意义,相反数一般是成对出现的,是指两个数之间的一种特定关系,它不是指单独的一个数;"相反"的意思仅仅是"符号相反",但是符号不同的两个数不一定互为相反数.对多重符号的化简,一个正数前面不管有多少个"+"号,都可以全部省去不写;一个正数前有偶数个"-"号,也可以把"-"号一起去掉,一个正数的前面有奇数个"-"号,则化简后只保留一个"-"号.

【金题 3】 (2001年鄂州市中考题)$\frac{1}{2001}$的倒数是________.

解:2001.

析:据倒数定义,1除以$\frac{1}{2001}$的商是2001.不能与相反数的概念混淆.一般地$\frac{b}{a}$($ab\neq0$)的倒数是$\frac{a}{b}$;a的倒数是$\frac{1}{a}$.

➡**银题 1** a、b两数倒数和的相反数是________($ab\neq0$).

解:$-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$.

析:倒数和的意义是先写出它们各自的倒数,再求它们的和,写相反数要添括号.

➡**银题 2** 什么数的倒数是它本身?

解:0没有倒数,正数的倒数等于它本身的只有1,负数的倒数等于它本身的只有-1.因此,倒数等于它本身的数是1和-1.

析:用分类讨论的方法,有理数由正数、零和负数三部分组成,在三部分里分别求满足条件的数.

➡**银题 3** 如果a和$2b$互为相反数,且$b\neq0$,那么a的倒数是 ( )

A. $-\frac{1}{2b}$ B. $\frac{1}{2b}$ C. $-\frac{2}{b}$ D. $2b$

解:A.

析:由a和$2b$互为相反数,得$a+2b=0$,即$a=-2b$,

$\because b\neq0$,所以$\frac{1}{a}=\frac{1}{-2b}=-\frac{1}{2b}$.因为0没有倒数,所以求倒数时一定要考虑分母不为零的情况.

点评:求倒数问题,首先弄清倒数的概念.还应知道零没有倒数,对用字母表示的数,求倒数时一定要讨论,除零以外,任何数的倒数只有一个;如果两个数a、b互为倒数,则$ab=1$.反之,若$a\cdot b=1$,则a与b互为倒数.

考点3 绝对值

【金题 4】 (2001年福州市中考题)-7的绝对值是________.

解:7

析:正确理解绝对值的代数意义,负数的绝对值等于它的相反数,故-7的绝对值为7.

➡**银题1** 求下列各数的绝对值：$-\frac{1}{3}$，$-\left(-\frac{1}{2}\right)$，0.

解：$\left|-\frac{1}{3}\right|=\frac{1}{3}$，$\left|-\left(-\frac{1}{2}\right)\right|=\frac{1}{2}$，$|0|=0$.

析：先判断绝对值符号里的数是正数、负数还是0，再根据绝对值的代数意义去掉绝对值符号.特别注意绝对值符号里有负数的情况，去掉绝对值符号后先加括号，再在括号的前面添上负号.

➡**银题2** 下列各组数中，互为相反数的是 （ ）

A. $\left|-\frac{2}{3}\right|$与$-\frac{2}{3}$　　B. $\left|-\frac{2}{3}\right|$与$-\frac{3}{2}$　　C. $\left|-\frac{2}{3}\right|$与$\frac{2}{3}$　　D. $\left|-\frac{3}{2}\right|$与$\frac{3}{2}$

解：A.

析：首先注意绝对值与倒数概念的区别，先把绝对值符号化掉再判断.

➡**银题3** 三个有理数a、b、c，其积是负数，其和是正数，当$x=\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{c}{|c|}$时，代数式$x^{2003}-2x^{2002}+3$的值是________.

解 2.

析：有理数a、b、c其积是负数，有两种情况，一种是三个都是负数，另一种是一负二正.又因和是正数，故a、b、c三数为一负二正.当$a>0$时，$\frac{a}{|a|}=1$；当$a<0$时，$\frac{a}{|a|}=-1$.所以，$\frac{a}{|a|}$、$\frac{b}{|b|}$、$\frac{c}{|c|}$中有一个为-1，有二个为$+1$，其和$x=1$.

∵ $x^{2003}-2x^{2002}+3=1^{2003}-2\times1^{2002}+3=2$.

点评：对绝对值的化简或简单的计算，必须理解绝对值的概念，掌握绝对值的代数意义.步骤：一看，即看绝对值里数的符号；二对照，即对照绝对值的代数意义属哪一种情况；三化简，即将绝对值符号去掉.要注意绝对值里是负数的情况.

【金题5】 计算$|-2|\div\left|-\frac{1}{3}\right|\times|-|-2||$

解：原式$=2\div\frac{1}{3}\times|-2|=2\times3\times2=12$.

析：先把绝对值符号化去，然后计算.

➡**银题1** 计算$|-3|+|-10|+|-\pi|-|3-\pi|$

解：原式$=3+10+\pi-(\pi-3)=16$.

析：由$-\pi<0$，得$|-\pi|=\pi$；由$3-\pi<0$，得$|3-\pi|=\pi-3$.

➡**银题2** 计算$\left(\frac{5}{6}-\left|-\frac{1}{2}\right|+\left|+\frac{1}{3}\right|\right)\times|-6|$

解：原式$=\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\times6=5-3+2=4$.

析：先将绝对值符号化去，然后用乘法的分配律计算.

➡**银题3** 设$a<0$，且有$|a|\cdot x\leqslant a$，化简$|x+1|-|x-3|$

解：∵ $a<0$，∴ $|a|=-a>0$.

∴ $-a\cdot x\leqslant a$，$x\leqslant-1$.

原式$=-(x+1)-(3-x)=-x-1-3+x=-4$.

析：先由$a<0$，求出不等式$|a|x\leqslant a$的解集，注意$-a$是正数，然后在$x\leqslant-1$的条件下化简代数式.

点评：对含有绝对值的运算，用化归的思想，根据已知条件将绝对值符号先化去，即把绝对值的运算转化为数的运算.

【金题 6】 (2002 年河北省中考题)已知$|x-2|+\sqrt{y-3}=0$,求 xy 的值.

解:因为$|x-2|$、$\sqrt{y-3}$都是非负数,由非负数的性质得$\begin{cases}x-2=0\\y-3=0\end{cases}$,即 $x=2$;$y=3$.

$xy=6$.

析:∵任何数的绝对值一定是非负数,∴ $|x|\geqslant0$. 常见非负数有$|a|$,$\sqrt{a}(a\geqslant0)$,a^2,(a 可以是代数式),非负数的性质是如果几个非负数的和为零,那么,这几个数都必须为零.

➡**银题 2** 已知$|a-2|+|b-3|+|c-4|=0$,计算 $a+2b+3c$ 的值.

解:由已知得 $a-2=0,b-3=0,c-4=0$,即 $a=2,b=3,c=4$.

所以 $a+2b+3c=2+2\times3+3\times4=20$.

析:∵ $|a-2|$、$|b-3|$、$|c-4|$均为非负数,由非负数的性质可知 $a-2=0,b-3=0,c-4=0$ 同时成立.

➡**银题 3** 有理数 m、n、p 满足$\left|\frac{3}{2}m\right|+m=0$,$|n|=n$,$p\cdot|p|=1$,则代数式$|n|-|m-p+1|+|p+n|-|3m^2+m+1|=$________.

解:$2n$.

析:因为$\left|\frac{3}{2}m\right|+m=0$,所以 $m\leqslant0$. $-\frac{3}{2}m+m=0$,所以 $m=0$. 因为$|n|=n$,所以 $n\geqslant0$,又因 $p\cdot|p|=1$,所以 $p=1$.

原式$=n-0+1+n-1=2n+1-1=2n$.

点评:凡遇形如$|x_1-a_1|+|x_2-a_2|+\cdots+|x_n-a_n|=0$ 的式子,由非负数的性质可得 $x_1=a_1,x_2=a_2,\cdots x_n=a_n$.

【金题 7】 比较$-\frac{13}{24}$和$-\frac{5}{8}$的大小.

解:∵ $\left|-\frac{13}{24}\right|=\frac{13}{24}$,$\left|-\frac{5}{8}\right|=\frac{5}{8}=\frac{15}{24}$.

$\frac{13}{24}<\frac{15}{24}$

∴ $-\frac{13}{24}>-\frac{5}{8}$.

析:两个负数比较大小,绝对值大的反而小. 往往先比较它们绝对值的大小,还可以用求差法比较大小.

➡**银题 1** 下列各式的结论,成立的是 ( )

A. 若$|m|=|n|$,则 $m=n$ B. 若 $m>n$,则$|m|>|n|$

C. 若$|m|>|n|$,则 $m>n$ D. 若 $m<n<0$,则$|m|>|n|$

解:D.

析:用淘汰法,若 m、n 互为相反数,则$|m|=|n|$. 所以 A 不成立;若 $m=2$、$n=-3$,而$|2|<|-3|$,所以 B 不成立;取 $m=-3,n=2$,因为$|-3|>|2|$,而$-3<2$,所以 C 不成立. 故结论 D 成立.

析:证明一个结论不成立,只要举一个反例即可;对含绝对值符号的不等式,可采用分类讨论的思想.

➡**银题 2** $\frac{1}{|mn|}=\frac{1}{mn}$且 $m>n$,则$\frac{1}{m}$____$\frac{1}{n}$.(用"<"或">"连接).

解:由已知$\frac{1}{|mn|}=\frac{1}{mn}$可得$|mn|=mn$ 且 $mn\neq0$,所以 $mn>0$. 若 m、n 同为正,则$\frac{1}{m}<\frac{1}{n}$;若 m、n 同

为负，则$\frac{1}{m}<\frac{1}{n}$.

析：$\frac{1}{|mn|}=\frac{1}{mn}$与$|mn|=mn$是等价的. 对$mn>0$的情况，还需用分类讨论的思想，比较字母式子的大小，采用取特殊值的方法.

➡**银题3** 已知$|a|<|b|$，$a>0$，$b<0$，把a，b，$-a$，$-b$按顺序由小到大排列.

解：取$a=1$，$b=-2$，则$-a=-1$，$-b=2$

$\because\ -2<-1<1<2$

$\therefore\ b<-a<a<-b$

析：对此类题，满足条件的值有无数对，不可能一一加以检验，通常采用满足条件的一组或几组值，然后代入检验. 这种解选择题的方法称为"特殊值"法.

点评：比较两个负数的大小，是通过比较它们的绝对值的大小来进行的. 把两个负数大小的比较化归为比较两个正数的大小. 对含字母的绝对值不等式，要用分类讨论的思想或采用特殊值法.

【金题8】 （2002年烟台市中考题）a、b两数在数轴上的位置如图1－1，设$M=a+b$，$N=-a+b$，$H=a-b$，$G=-a-b$，则下列各式中正确的是 （　　）

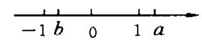

图1－1

A. $M>N>H>G$　　B. $H>M>G>N$　　C. $H>M>N>G$　　D. $G>H>M>N$

解：B.

析：由图可知，$-1<b<0$，$a>1$. 由此可得出M、H均为正值，N，G均为负值，正数中H的绝对值最大，负数中N的绝对值最大. 故可判断出$H>M>G>N$.

➡**银题1** （2002年临沂市中考题）如果表示两个实数a、b的点在数轴上的位置如图1－2所示，那么化简$|a-b|+\sqrt{(a+b)^2}$的结果等于 （　　）

A. $2a$　　B. $2b$　　C. $-2a$　　D. $-2b$

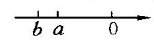

图1－2

解：D.

析：借助数轴提供的数与数的关系，这在中考中是常见的. 由图可知，$b<a<0$，且$|a|<|b|$，可知$a-b>0$，$a+b<0$. 根据绝对值的定义$|a-b|=a-b$；根据算术根的定义$\sqrt{(a+b)^2}=|a+b|=-a-b$.

➡**银题2** 已知有理数a、b、c在数轴上的对应点的位置如图1－3所示：那么，$|a-b|-|b-c|+|c-a|$＝________.

解：0.

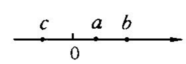

图1－3

析：由图看出$c<0$，$0<a<b$，且$|a|<|c|<|b|$，所以$a-b<0$，$b-c>0$，$c-a<0$.
$|a-b|-|b-c|+|c-a|=b-a-(b-c)+(a-c)=0$.

➡**银题3** 已知有理数a、b、c、d在数轴上的对应点的位置如图1－4所示，且$6|b|=4|d|=3|c|=6$，那么$|2a-3b|-|3b-2a|+|2b-c|-2|d|$＝________.

解：1.

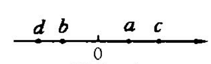

图1－4

析：根据题意可知：$d=-\frac{3}{2}$，$c=2$，$b=-1$.

$\therefore$ 原式$=2a-3b-(2a-3b)+c-2b+2d$

$=2+2-3=1$.

点评：这一类问题属数形结合问题中的一种. 这类问题的处理方法，先由图观察判断各字母表示的数的性质及绝对值的大小. 然后判断各个绝对值里数的符号. 将绝对值符号化去，最后计算化简.

考点4　科学计数法

【金题9】（2002年山西省中考题）在比例尺为1∶8 000 000的地图上，量得太原到北京的距离为6.4 cm，将实际距离用科学计数法表示为________千米（保留两个有效数字）.

解：5.1×10^{2}.

析：比例尺为1∶8 000 000是指图上距离与实际距离之比. 设太原到北京的实际距离为 x cm，则 $1:8\ 000\ 000=6.4:x$，$x=51\ 200\ 000$(cm)$=512$(千米)$\approx5.1\times10^{2}$(千米).

析：正确理解比例尺的意义，知道什么叫科学计数法. 以及怎样用科学计数法表示数. 本题应先求出太原到北京的实际距离，以cm为单位，然后将cm单位化到千米单位.

➡**银题1**　（2002年云南省中考试题）地球上的陆地面积约为149 000 000千米^2，这个数用科学计数法可表示为________千米^2.

解：1.49×10^{8}.

析：用科学计数法表示的数应写成 $a\times10^{N}$（$1\leqslant a<10$，N为整数），当一个数有整数部分时，指数应为整数的位数减1，当一个数是纯小数时，指数为负数，且指数绝对是这个数最左边连续的零的个数.

➡**银题2**　（2002年昆明市中考题）空气的体积质量是0.001 239克/厘米^3，用科学计数法表示为________克/厘米^3.

解：1.239×10^{-3}.

析：0.001 239是纯小数，最左边连续零的个数是3，故指数是-3.

➡**银题3**　下列说法中正确的是　（　　）

A. 近似数2.40与近似数2.4的精确度相同

B. 近似数6百与近似数600的精确度相同

C. 近似数36.60是精确到十分位的数，它有三个有效数字3，6，6.

D. 近似数 4.70×10^{4} 是精确到百分位的数，它有三个有效数字4，7，0.

解：D.

析：用排除法. 2.40精确到0.01，而2.4精确到0.1，故A错；6百精确到百位，600精确到个位，故B错；36.60精确到百分位，故C错.

点评：精确到某一位一般是根据实际需要而定的，有效数字是描述了从左边第一个不为零的数字起有效的数字的个数，两者有显著的区别. 科学计数法可将绝对值很大或很小的数用较简单的形式表示出来. 科学计数法往往同有效数字结合起来使用.

第二章 整式的加减

教纲要求

代数式.代数式的值.整式.

单项式.多项式.合并同类项.

去括号添括号.数与整式相乘.整式的加减法.

具体要求：

(1)掌握用字母表示有理数，了解用字母表示数是数学的一大进步.

(2)了解代数式、代数式的值的概念，能够列出代数式表示简单的数量关系，会求代数式的值.

(3)了解整式、单项式及其系数与次数、多项式次数、项与项数的概念，会把一个多项式按某个字母降幂排列或升幂排列.

(4)掌握合并同类项的方法，去括号、添括号的法则，熟练掌握数与整式相乘的运算以及整式的加减运算.

(5)通过用字母表示数、列代数式和求代数式的值、整式的加减，了解抽象概括的思维方法和特殊与一般的辩证关系.

举一反三

考点1 找规律

【金题1】 (2001年河南省中考题)观察下列等式：

$9-1=8,16-4=12,25-9=16,36-16=20,\cdots$，这些等式反映了自然数间的某种规律，设 n 表示自然数，用关于 n 的等式把这种规律表示出来：________.

解：$(n+2)^2-n^2=4(n+1)$.

析：$n=1$　$9-1=(1+2)^2-1^2=4(1+1)$

$n=2$　$16-4=(2+2)^2-2^2=4(2+1)$

$n=3$　$25-9=(3+2)^2-3^2=4(3+1)$

…　……

n　$(n+2)^2-n^2=4(n+1)$

➡**银题1** 用●表示实圆，用○表示空心圆，现有若干实圆与空心圆按一定规律排列如下：

●○●●○●●●●○●○●●●○●●●●○●○●●●○●●●●○……

问：前2003个圆中，有________个空心圆.

解：668个.

析：按如此规律排列，发现从第一个起，每三个一组，每一组中有一个是空心圆；从第一个起，每九个为

一大组，2003 个圆共分 222 个大组余 5 个，余 5 个圆中有 2 个空心圆，共有 $222\times3+2=668$ 个空心圆.

➡**银题 2**　观察下面一列数的规律并填空：0，3，8，15，24，…，则它的第 2 003 个数是________.

解：4 012 008.

析：第 1 个　$0=1^2-1$

第 2 个　$0+3=2^2-1$

第 3 个　$0+3+5=3^2-1$

第 4 个　$0+3+5+7=4^2-1$

第 5 个　$0+3+5+7+9=5^2-1$

……　……

第 n 个　$0+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2-1$

当 $n=2\,003$ 时，是 $2\,003^2-1=4\,012\,008$（或 $2\,003^2-1$）.

➡**银题 3**　观察下列各式及其验证过程：

$2\sqrt{\frac{2}{3}}=\sqrt{2+\frac{2}{3}}$.

验证：$2\sqrt{\frac{2}{3}}=\sqrt{\frac{2^3}{3}}=\sqrt{\frac{(2^3-2)+2}{2^2-1}}=\sqrt{\frac{2(2^2-1)+2}{2^2-1}}=\sqrt{2+\frac{2}{3}}$，

$3\sqrt{\frac{3}{8}}=\sqrt{3+\frac{3}{8}}$

验证：$3\sqrt{\frac{3}{8}}=\sqrt{\frac{3^3}{8}}=\sqrt{\frac{(3^3-3)+3}{3^2-1}}=\sqrt{\frac{3(3^2-1)+3}{3^2-1}}=\sqrt{3+\frac{3}{8}}$.

（1）按照上述两个等式及其验证过程的基本思路，猜想 $4\sqrt{\frac{4}{15}}$ 的变形结果并进行验证.

（2）针对上述各式反映的规律，写出用 n（n 为任意自然数，且 $n\geqslant2$）表示的等式，并给出证明.

解：（1）$4\sqrt{\frac{4}{15}}=\sqrt{4+\frac{4}{15}}$

验证：$4\sqrt{\frac{4}{15}}=\sqrt{\frac{4^3}{15}}=\sqrt{\frac{(4^3-4)+4}{4^2-1}}=\sqrt{\frac{4(4^2-1)+4}{4^2-1}}=\sqrt{4+\frac{4}{15}}$.

（2）由题设及（1）的验证结果，可猜想对任意自然数 $n(n\geqslant2)$ 都有：$n\sqrt{\frac{n}{n^2-1}}=\sqrt{n+\frac{n}{n^2-1}}$

证明：∵ $n\sqrt{\frac{n}{n^2-1}}=\sqrt{\frac{n^3}{n^2-1}}=\sqrt{\frac{n^3-n+n}{n^2-1}}=\sqrt{\frac{n(n^2-1)+n}{n^2-1}}=\sqrt{n+\frac{n}{n^2-1}}$

∴ $n\sqrt{\frac{n}{n^2-1}}=\sqrt{n+\frac{n}{n^2-1}}$

点评：这类题型称“猜想”题，也称“观察归纳型题”．考虑这类题时，要紧紧地同序号联系起来．仔细观察题中给出的数或图形与序号的关系，把给出的式子写成与序号有规律性的式子．从而归纳出一般的规律或与 n 有关的公式.

考点 2　代数式

【金题 2】　（2001 年哈尔滨）“买单价 c 元的球拍 n 个，付出 450 元钱，应找多少元钱”？用代数式表示为________.

解：$(450-cn)$元

析：给营业员 450 元，实际用了 cn 元，应找回 $(450-cn)$ 元．这里的括号和单位不能漏.

➡银题1 a是两位数，b是一位数，如果把b放在a的左边，那么所成的三位数应表示为________.

解：$100b+a$

析：根据十进制数的表示方法，任意十进制数 $a_na_{n-1}\cdots a_2a_1a_0=a_n\times10^n+a_{n-1}\times10^{n-1}+\cdots+10^2\times a_2+10\times a_1+a_0$. 把$b$放在$a$的左边即放在百位上，表示为$100b$，$a$放在$b$的右边表示两位数$a$，故所表示的三位数是$100b+a$.

➡银题2 今有m吨煤，现在每天需烧掉a吨，如果每天能节约b吨，可比原来多烧________天.

解：$\left(\frac{m}{a}-\frac{m}{a-b}\right)$天

析：原来可烧$\frac{m}{a}$天. 如果每天节约b吨，则每天烧煤$(a-b)$吨，可烧$\frac{m}{a-b}$天，故比原来多烧$\left(\frac{m}{a}-\frac{m}{a-b}\right)$天.

➡银题3 某工厂去年的生产总值比前年增长$a\%$，则前年比去年少的百分数是 ( )

A. $a\%$ B. $(1+a)\%$ C. $\frac{a+1}{100a}$ D. $\frac{a}{100+a}$

解：D.

设前年的生产总值为x，则去年的生产总值为$(1+a\%)x$，前年比去年少的百分数是

$\frac{(1+a\%)x-x}{(1+a\%)x}=\frac{a\%}{1+a\%}=\frac{a}{100+a}$.

析：所求前年比去年少的百分数，因此必须以去年的生产总值为基数，即把两年生产总值的差除以去年的生产总值.

点评：列代数式解这类问题，首先审题要清楚，弄清已知什么，求什么，写出有关的代数式，有单位的写上单位，括号不能漏.

【金题3】 (1999年山西中考题)用语言叙述代数式a^2-b^2，正确的是 ( )

A. a、b两数的平方差 B. a与b差的平方

C. a与b的平方的差 D. b、a两数的平方差

解：A.

析：这道题看似简单，但做错率相当高，这四个选择答案都差不多，但仔细品来还是有明显的区别. 如B表示$(a-b)^2$，C表示$a-b^2$，D表示b^2-a^2. 从题目的本意看：a、b有顺序关系，其次a、b先各自平方后再求它们的差.

➡银题1 (2001年四川省绵阳市中考题)对于代数式$3x+\frac{y}{2}$的正确读法是 ( )

A. x的3倍与y除以2的和 B. x的3倍与y除2的和

C. x的3倍与y的和除以2 D. 3乘以x加y除2

解：A.

析：代数式是两项的和，$\frac{y}{2}$表示y除以2，学生往往对“除以”与“除”搞不清楚.

➡银题2 代数式$\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)^2$的意义是 ( )

A. m与n的倒数的差的平方 B. m的倒数与n的倒数的平方差

C. m与n的倒数的平方差 D. m的倒数与n的倒数的差的平方

解：D.

析:B、C 显然是错误的,A 表示为$(m-\frac{1}{n})^2$也错误,故只能选 D.

➡**银题 3**　说出下列三个代数式的意义有什么不同,$x+\frac{z}{y}$,$\frac{x+z}{y}$,$\frac{z}{x+y}$.

解:$x+\frac{2}{y}$表示"x 与 2 除以 y 的和".

$\frac{x+z}{y}$表示"x 与 z 的和除以 y 的商".

$\frac{z}{x+y}$表示"z 除以 x 与 y 的和的商".

析:第一个代数式是和的形式,其余两个是商的形式,第二个分子是和的形式,而第三个分母是和的形式.

点评:叙述代数式的意义,学生容易混淆的是①平方和(差)与和(差)的平方的区别.②倒数和(差)与和(差)的倒数的区别.③除以与除的区别.④遇到有多种运算的式子不会判断整体是和的形式还是商的形式.

【金题 4】　(2002 年黄冈市中考题)若 $x=\sqrt{3}-1$ 则代数式$\frac{x+3}{x-1}\cdot\frac{x+1}{x^2+4x+3}$的值等于________.

解:原式$=\frac{x+3}{x-1}\cdot\frac{(x+1)}{(x+1)(x+3)}=\frac{1}{x-1}=\frac{1}{\sqrt{3}-1-1}=\frac{1}{\sqrt{3}-2}=\frac{\sqrt{3}+2}{(\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}+2)}=-2-\sqrt{3}$.

析:这一类求代数式的值按"三步曲"即"一化简、二代入、三计算".将已知条件和代数式化简,再将已知条件代入化简后的代数式,最后计算.

➡**银题 1**　已知 $a^2-3a+1=0$,则 $a^2+\frac{1}{a^2}=$________.

解:由已知得 $a+\frac{1}{a}=3$.

$a^2+\frac{1}{a^2}=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-2=3^2-2=7$.

析:若将已知条件中 a 求出来再代入计算,相当麻烦,且容易算错,故不提倡此法,通常采用整体代入比较简便.

➡**银题 2**　已知 $x+\frac{1}{x}=4$,则$\frac{x^2}{x^4+x^2+1}=$________.

解:∵ $\frac{x^4+x^2+1}{x^2}=x^2+\frac{1}{x^2}+1=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-1=4^2-1=15$,

∴ $\frac{x^2}{x^4+x^2+1}=\frac{1}{15}$.

析:本题采用倒数的思想,因为直接求$\frac{x^2}{x^4+x^2+1}$比较困难,而求$\frac{x^4+x^2+1}{x^2}$比较容易.

➡**银题 3**　已知$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=3$,则分式$\frac{2x+3xy-2y}{x-2xy-y}$的值为________.

解:将已知条件化为 $x-y=-3xy$.

原式$=\frac{2(x-y)+3xy}{(x-y)-2xy}=\frac{-6xy+3xy}{-5xy}=\frac{-6+3}{-5}=\frac{3}{5}$.

析:由已知将 x、y 求出来显然不可能,将已知条件化为 $x-y=-3xy$ 后,可见所求代数式可化为只含$(x-y)$、xy 的形式,然后用整体思想,消去$(x-y)$或 xy 后即可化简求值.

点评:求代数式的值,一般先将已知条件和所求的代数式化简,然后代入求值.如果遇已知条件及所求代数式含有两个或两个以上字母时可考虑用整体代入思想解.