自校正滤波理论及其应用

——现代时间序列分析方法

邓自立　著

Self-Tuning Filtering Theory with Applications

——Modern Time Series Analysis Method

DENG Zili

哈尔滨工业大学出版社
Press of Harbin Institute of Technology
哈尔滨·Harbin

内容简介

本书用现代时间序列分析方法提出了自校正滤波理论及其应用。它解决含有未知模型参数和噪声统计系统的信号或状态的自校正(渐近最优)估计问题。

全书共分九章,包括离散随机系统模型,基于最小二乘法的ARMA模型参数估计的几种快速算法,带观测噪声的ARMA模型参数估计快速算法,自校正白噪声滤波器,自校正Kalman滤波器,自适应Kalman滤波技术,自校正预报器,自校正Wiener滤波器,信息融合自校正滤波理论,并给出了在雷达跟踪系统中的仿真应用。内容新颖,理论严谨,并含有大量仿真例子。

本书可作为高等学校控制理论与控制工程、信号处理、检测与估计等专业的研究生及本科高年级学生教材,也可供在信号处理、控制、通信、航天、制导、雷达跟踪、石油地震勘探、故障诊断、卫星测控、GPS定位、多传感器信息融合、机器人、经济、生物医学等领域工作的科技人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

自校正滤波理论及其应用:现代时间序列分析方法/邓自立著.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2003.9

ISBN 7-5603-1923-8

Ⅰ.自… Ⅱ.邓… Ⅲ.时间序列分析—分析方法 Ⅳ.O211·61

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第071348号

出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区教化街21号　邮编 150006
传　　真 0451-86414749
印　　刷 哈尔滨市工大节能印刷厂
开　　本 787×1092　1/16　印张 22.25　字数 495千字
版　　次 2003年9月第1版　2003年9月第1次印刷
书　　号 ISBN 7-5603-1923-8/TP·194
印　　数 1~3 000
定　　价 33.00元

前　言

由被噪声污染观测信号寻求未知真实信号或状态的估值叫滤波，所得到的估值公式叫估值器，也叫滤波器。在某种性能指标（例如线性最小方差）意义下的最优估值器也叫最优滤波器。继 Wiener 滤波方法和 Kalman 滤波方法之后，本书作者在专著《最优滤波理论及其应用——现代时间序列分析方法》（哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2000）和专著《卡尔曼滤波与维纳滤波——现代时间序列分析方法》（哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2001）中提出了最优滤波新的方法论——现代时间序列分析方法，它的基本工具是 ARMA 新息模型。正像经典 Kalman 滤波方法的缺点和局限性一样，应用现代时间序列分析方法设计最优滤波器要求已知系统的精确数学模型和噪声统计。然而，在大多数实际应用问题中关于模型结构、参数和噪声统计的信息是完全未知或部分未知的。在这种情形下，如何利用观测数据和系统辨识技术实现一种渐近最优滤波器，也称之为自校正滤波器，具有重要的理论意义，且在自适应信号处理、自适应滤波、自适应控制、制导、雷达跟踪、油田地震勘探、卫星测控、GPS 定位、故障诊断、机器人、经济、生物医学等领域具有广泛的应用价值。

本书以石油地震勘探信号处理和雷达跟踪系统为应用背景，首次提出了自校正滤波理论和方法论。自校正滤波方法论是：用 ARMA 新息模型的一种递推辨识器（即递推参数估计器）伴随最优滤波器就可得到自校正滤波器。自校正滤波的基本原理是：用现代时间序列分析方法，最优滤波器是基于精确的 ARMA 新息模型参数设计和计算的。因此当系统含有未知模型参数和噪声统计时，只要用采用某种辨识算法（例如递推增广最小二乘法等）在线估计 ARMA 新息模型的参数，用 ARMA 新息模型参数估值近似代替其真实值，将它们代入最优滤波器公式，便得到相应的次优滤波器。假如对 ARMA 新息模型的参数估计是一致的，即参数估值收敛于相应的真实值，可以证明这种次优滤波器将渐近于相应的最优滤波器，因而称之为渐近最优滤波器或自校正滤波器。

自校正滤波器渐近于相应最优滤波器的收敛速度，取决于 ARMA 新息模型的递推参数估计器的收敛速度。理论分析、仿真和应用表明，递推最小二乘法（RLS）具有算法简单、收敛快、计算量小、便于实时应用等优点，因此乐于为人们所采用。本书将在 RLS 算法基础上提出若干改进的 RLS 算法，例如两段最小二乘法等，以提高自校正滤波器的收敛速度和实时性。

解决含未知模型参数或未知噪声统计系统滤波问题的另一途径是采用自适应 Kalman 滤波方法。其原理是构造模型参数或噪声统计估计与状态估计的两段互耦自适应 Kalman 滤波算法。其缺点是算法稳定性差，对滤波初值很敏感，且算法收敛性问题至今尚未解决。

同自适应 Kalman 滤波方法相比，所提出的自校正滤波方法论的特点是避免了参数估

计与状态估计的相互耦合作用。ARMA 新息模型参数估计精度影响状态估计精度，而状态估计精度不影响 ARMA 新息模型参数估计精度。ARMA 新息模型参数估计精度仅由它的递推辨识器的精度决定。这一特性使自校正滤波器具有渐近最优性(自校正性)，假如 ARMA 新息模型的参数估计是一致的。

自校正(Self-Tuning)概念和原理最初在 1973 年由著名控制理论学者 Åström 和 Wittenmark 在论文"On Self-Tuning Regulators"(Automatica, 1973,9:185 ~ 199)中提出，用于解决含未知模型参数系统自适应控制问题。其基本思想是：可避免辨识原始系统模型参数，只要在线辨识一个简单的预测模型参数就可得到具有渐近最优性的自校正调节器。

将自校正原理用于信号和状态估计领域，自校正信号预报器、滤波器和平滑器、自校正 Kalman 滤波器已先后被提出。然而在过去 30 年中，国内外关于自校正信号和状态滤波方面的报导尚不多见，尚未形成系统的自校正滤波理论。20 世纪 90 年代中期，在由本书作者负责的国家自然科学基金资助项目"油田地震勘探信号自校正去卷滤波新方法研究"(项目批准号：69172007)的研究成果中提出了一系列自校正信号和状态滤波器，其中包括自校正白噪声估值器，自校正 Kalman 滤波器，自校正跟踪滤波器，自校正反卷积滤波器等。代表性论文"Optimal and Self-tuning White Noise Estimators with Applications to Deconvolution and Filtering Problems"发表在自动控制领域国际权威刊物《Automatica》(1996,32(2)：199 ~ 216)上，其中提出了自校正滤波理论的基本框架。

在另一项由本书作者负责的国家自然科学基金资助项目"最优滤波和反卷积新理论和新方法"(项目批准号：69774019)的研究成果基础上，基于作者在新近出版的两部专著中提出的最优滤波理论及新的 Kalman 滤波与 Wiener 滤波理论，及基于作者在本书中提出的 ARMA 模型和带观测噪声的 ARMA 模型参数估计的若干新算法，首次提出通用的自校正滤波理论，并给出在雷达跟踪系统中的仿真应用研究。该理论证明了稳定系统自校正滤波器的收敛性。该理论可处理自校正信号和状态估计问题，可统一处理自校正滤波、平滑和预报问题，可处理自校正 Kalman 滤波与自校正 Wiener 滤波问题，且可处理常规系统与广义系统自校正滤波问题。

多传感器信息融合是 20 世纪 70 年代后产生的一门新的学科。它随着电子科学技术和计算机应用技术的发展，特别是随着高技术兵器尤其是精确制导武器和远程打击武器的出现，应运而生。

它在军事上已发展成为十分活跃的热门研究领域，广泛应用于指挥、控制、通信和情报领域。本书用 Lyapunov 方程取代了 Riccati 方程，首次提出了信息融合稳态最优和自校正 Kalman 滤波和 Wiener 滤波理论。

全书分为九章。第一章介绍了常用的离散随机系统模型。第二章介绍了递推最小二乘法并提出了若干改进的最小二乘法算法。第三章提出了带观测噪声的 AR 模型或 ARMA 模型参数估计的若干新算法。第四章提出了自校正白噪声估计理论。第五章提出了自校正 Kalman 滤波理论及其在跟踪系统中的应用，其中包括各种类型自校 $\alpha-\beta$ 或 $\alpha-\beta-\gamma$ 跟踪滤波器。第六章介绍了由作者提出的自适应 Kalman 滤波技术。第七章介绍了自校正信号和状态预报器。第八章提出了信号和状态自校正 Kalman 估值器和 Wiener 估

值器及其在跟踪系统中的仿真应用研究。第九章提出了信息融合稳态最优和自校正滤波理论。

本书开拓了自适应滤波理论新的研究领域——自校正滤波理论及其应用。它属系统辨识、最优滤波、状态估计、信号处理、计算机应用等学科交叉的新兴边缘领域，具有强大的生命力。本书还开拓了信息融合状态估计理论新的研究领域——信息融合自校正滤波理论。

书中绝大部分内容是新的，其中许多最新的研究成果尚未公开发表过，具有创新性、新颖性和可应用性的特点。大量仿真例子说明了所提出的理论和方法的有效性、正确性。每章末附有最新参考文献，供感兴趣的读者参考。

本书及上述已出版的两部专著一起，构成了自 1989 年以来由作者在专著《现代时间序列分析及其应用——建模、滤波、去卷、预报和控制》(北京:知识出版社,1989)中创立和开拓的现代时间序列分析的完整的理论体系。现代时间序列分析的基本工具是 ARMA 新息模型，它的理论基础是白噪声估计理论，它借助于射影理论和系统辨识方法，解决在噪声环境下的时间序列的建模、最优、自适应和自校正滤波问题。

作者深深地感激已故中国科学院院士张钟俊教授生前对本人的鼓励和帮助。他对现代时间序列分析方法所给予的高度评价(张钟俊.一门新兴边缘学科——现代时间序列分析.信息与控制,1988,17(4):62~63)一直激励作者在这一新兴边缘领域努力探索。

作者感谢中国科学院院士张嗣瀛教授多年来对本人的鼓励和帮助。

还要感谢由作者指导的历届研究生们，其中包括马建为、杜洪越等，他们对本书提出的新理论和新方法做了大量仿真研究工作。

由于水平所限，书中缺点和疏漏之处在所难免，望读者批评指正。

著　者

2003 年元旦于哈尔滨

目　录

第一章　离散随机系统模型

1.1　向量 ARMA,AR,MA,CARMA 模型

本书以离散随机系统为研究对象。本章介绍离散时间随机系统常用的三类模型:向量 CARMA 模型、传递函数模型和状态空间模型,并讨论它们之间的转化和变换。此外,也介绍了非线性随机模型。特别讨论了 ARMA 新息模型的两种构造算法,因为 ARMA 新息模型是现代时间序列分析方法的基本工具。

设系统的随机输入 $\boldsymbol{e}(t) \in R^m$ 为 m 维白噪声,

$$\mathrm{E}\boldsymbol{e}(t) = \boldsymbol{0}, \quad \mathrm{E}[\boldsymbol{e}(t)\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}(j)] = \boldsymbol{Q}_e\delta_{tj} \tag{1.1.1}$$

其中 E 为数学期望号,上角标 T 为转置号,$\delta_{tt} = 1, \delta_{tj} = 0(t \neq j)$,且输出 $\boldsymbol{y}(t) \in R^m$,有模型

$$\boldsymbol{y}(t) + \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{y}(t-1) + \cdots + \boldsymbol{A}_{n_a}\boldsymbol{y}(t-n_a) = \boldsymbol{C}_0\boldsymbol{e}(t) + \boldsymbol{C}_1\boldsymbol{e}(t-1) + \cdots + \boldsymbol{C}_{n_c}\boldsymbol{e}(t-n_c) \tag{1.1.2}$$

则称(1.1.2) 为向量自回归滑动平均(Autoregressive Moving Average) 模型,简称向量 ARMA 模型。其中 $\boldsymbol{A}_i, \boldsymbol{C}_i$ 为 $m \times m$ 系数阵,n_a, n_c 为模型阶次,简记(1.1.2) 为 ARMA(n_a, n_c)。若 $\boldsymbol{C}_0 = \boldsymbol{I}_m, \boldsymbol{I}_m$ 为 $m \times m$ 单位阵,$\boldsymbol{C}_i = \boldsymbol{0}$,则(1.1.2) 化为

$$\boldsymbol{y}(t) + \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{y}(t-1) + \cdots + \boldsymbol{A}_n\boldsymbol{y}(t-n_a) = \boldsymbol{e}(t) \tag{1.1.3}$$

称其为向量自回归(Autoregressive) 模型,记为 AR(n_a)。若 $\boldsymbol{A}_i = \boldsymbol{0}, \boldsymbol{C}_0 = \boldsymbol{I}_m$,则(1.1.2) 化为

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{e}(t) + \boldsymbol{C}_1\boldsymbol{e}(t-1) + \cdots + \boldsymbol{C}_{n_c}\boldsymbol{e}(t-n_c) \tag{1.1.4}$$

称其为向量滑动平均(Moving Average) 模型,记为 MA(n_c)。

引入单位滞后算子 $q^{-1}, q^{-1}\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}(t-1)$,并引入 q^{-1} 的多项式矩阵

$$\boldsymbol{A}(q^{-1}) = \boldsymbol{I}_m + \boldsymbol{A}_1 q^{-1} + \cdots + \boldsymbol{A}_{n_a} q^{-n_a},$$
$$\boldsymbol{C}(q^{-1}) = \boldsymbol{C}_0 + \boldsymbol{C}_1 q^{-1} + \cdots + \boldsymbol{C}_{n_c} q^{-n_c} \tag{1.1.5}$$

则向量 ARMA、AR、MA 模型可分别表示为

$$\boldsymbol{A}(q^{-1})\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}(q^{-1})\boldsymbol{e}(t),$$
$$\boldsymbol{A}(q^{-1})\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{e}(t),$$
$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}(q^{-1})\boldsymbol{e}(t) \tag{1.1.6}$$

在不引起混淆情形下,可省略 q^{-1},简记(1.1.6) 为

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{e}(t),$$
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{e}(t),$$

$$\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{e}(t) \tag{1.1.7}$$

1.1.1 向量 AR 模型的平稳性

在什么条件下向量 AR 模型(1.1.3)决定一个平稳随机过程?我们从如下启发性例子入手。

【例 1.1.1】 考虑标量($m=1$)AR(1)模型

$$(1-aq^{-1})y(t)=e(t) \tag{1.1.8}$$

其中 $e(t)$ 是零均值、方差为 σ_e^2 的白噪声,a 为模型参数,$A(q^{-1})=1-aq^{-1}$。$y(t)$ 可形式地表为

$$y(t)=\frac{1}{1-aq^{-1}}e(t) \tag{1.1.9}$$

由无穷递降等比级数求和公式有

$$\frac{1}{1-aq^{-1}}=\sum_{i=0}^{\infty}a^iq^{-i} \tag{1.1.10}$$

从而 $y(t)$ 可形式地展开为

$$y(t)=\sum_{i=0}^{\infty}a^ie(t-i) \tag{1.1.11}$$

该级数均方收敛的充要条件为当 $k\to\infty, n\to\infty$ 时,

$$\mathrm{E}\Big[\sum_{i=k}^{n}a^ie(t-i)\Big]^2=\sigma_e^2\sum_{i=k}^{n}a^{2i}\to 0 \tag{1.1.12}$$

(1.1.12)成立的充分条件为

$$\sum_{i=0}^{\infty}a^{2i}<\infty \tag{1.1.13}$$

显然(1.1.13)成立的充要条件为 $|a|<1$。此时我们有 $A(x)=1-ax$ 的零点 $x=1/a$ 位于单位圆外。此时 $y(t)$ 为一个平稳随机过程,它的相关函数为

$$R(\tau)=\mathrm{E}[y(t)y(t-\tau)]=\sigma_e^2\sum_{j=0}^{\infty}a^{\tau+j}a^j \tag{1.1.14}$$

推广例 1.1.1 的事实,经典时间序列分析[1] 证明了如下定理。

【定理 1.1.1】 对于标量 AR 模型(1.1.3),若以 q^{-1} 为自变元的多项式 $A(q^{-1})$ 的零点全位于单位圆外,则 $y(t)$ 为平稳随机过程。

【定义 1.1.1】 若以 q^{-1} 为自变元的多项式 $\det\boldsymbol{A}(q^{-1})$ 的所有零点位于单位圆外,则称多项式矩阵 $\boldsymbol{A}(q^{-1})$ 是稳定的。若以 q^{-1} 为自变元的多项式 $P(q^{-1})$ 的零点全位于单位圆外,则称多项式 $P(q^{-1})$ 是稳定的。

【定理 1.1.2】 若以 q^{-1} 为自变元的多项式 $\det\boldsymbol{A}(q^{-1})$ 的所有零点在单位圆外,则由向量 AR 模型(1.1.3)决定的 $\boldsymbol{y}(t)$ 是平稳随机过程,且可表为均方收敛的级数

$$\boldsymbol{y}(t)=\sum_{j=0}^{\infty}\boldsymbol{G}_j\boldsymbol{e}(t-j) \tag{1.1.15}$$

其中 $m\times m$ 系数阵 $\boldsymbol{G}_j$ 可递推计算为

$$\boldsymbol{G}_j=-\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{G}_{j-1}-\cdots-\boldsymbol{A}_{n_a}\boldsymbol{G}_{j-n_a},\quad j=1,2,\cdots \tag{1.1.16}$$

带 $\boldsymbol{G}_0=\boldsymbol{I}_m$,且规定 $\boldsymbol{G}_j=\boldsymbol{0}(j<0)$。

证明　见文献[2]。从略。 □

【**定理 1.1.3**】　在定理 1.1.2 条件下,系数阵 $\boldsymbol{G}_j \to \boldsymbol{0}(j \to \infty)$,且 $\boldsymbol{G}_j$ 以高阶指数衰减速率趋于零,即

$$\boldsymbol{G}_j = o(\rho^j), \quad 0 < \rho < 1 \tag{1.1.17}$$

证明　由(1.1.16)有 $\boldsymbol{G}_j$ 满足齐次差方程

$$\boldsymbol{A}(q^{-1})\boldsymbol{G}_j = \boldsymbol{0}, \quad j = 1,2,\cdots \tag{1.1.18}$$

记 $\boldsymbol{G}_j = (g_j^{rs}), r,s = 1,\cdots,m, g_j^{rs}$ 为 $\boldsymbol{G}_j$ 的第 r 行、第 s 列元素。用 $\mathrm{adj}\boldsymbol{A}(q^{-1})$ 左乘(1.1.18)有

$$\det\boldsymbol{A}(q^{-1})\boldsymbol{G}_j = 0 \tag{1.1.19}$$

它引出差分方程

$$\det\boldsymbol{A}(q^{-1})g_j^{rs} = 0, \quad r,s = 1,\cdots,m; j = 1,2,\cdots \tag{1.1.20}$$

设 $\det\boldsymbol{A}(x) = 0$ 有 mn_a 个不同实根 $x_i, i = 1,\cdots,mn_a$,则(1.1.20)的特征根为 $\lambda_i = 1/x_i$。因 $|x_i| > 1$,则 $0 < |\lambda_i| < 1$,由差分方程理论[1],(1.1.20)有通解

$$g_j^{rs} = c_1^{rs}\lambda_1^j + \cdots + c_{mn_a}^{rs}\lambda_{mn_a}^j \tag{1.1.21}$$

其中系数 c_i^{rs} 由 g_j^{rs} 的初值决定。定义

$$\rho_\lambda = \max(|\lambda_i|, i = 1,\cdots,mn_a) \tag{1.1.22}$$

由 $\det\boldsymbol{A}(q^{-1})$ 的稳定性引出 $0 < \rho_\lambda < 1$。取 ρ 使 $\rho_\lambda < \rho < 1$,则有

$$\frac{g_j^{rs}}{\rho^j} = c_1^{rs}\left(\frac{\lambda_1^j}{\rho}\right)^j + \cdots + c_{mn_a}^{rs}\left(\frac{\lambda_{mn_a}^j}{\rho}\right)^j \tag{1.1.23}$$

因 $|\lambda_i/\rho| < 1$,故有

$$(g_j^{rs}/\rho^j) \to 0, \quad j \to \infty \tag{1.1.24}$$

这引出

$$g_j^{rs} = o(\rho^j) \to 0, \quad r,s = 1,\cdots,m, j \to \infty \tag{1.1.25}$$

即(1.1.17)成立

$$\boldsymbol{G}_j = o(\rho^j), \quad j \to \infty \tag{1.1.26}$$

对差分方程(1.1.20)有重特征值或复特征值情形,可类似证明。事实上,由差分方程理论[1],若 $\det\boldsymbol{A}(x) = 0$ 有 m 重实根 x,则 $\lambda = 1/x$ 为差分方程(1.1.20)的 m 重特征值。由 $\det\boldsymbol{A}(x)$ 稳定引出 $|x| > 1$,从而 $|\lambda| < 1$。在这种情形下在通解(1.1.21)中将含有项

$$\lambda(j) = (c_1 + c_2 j + \cdots + c_m j^{m-1})\lambda^j \tag{1.1.27}$$

若(1.1.20)有共轭复特征值 $\lambda_1 = a + \mathrm{i}b, \lambda_2 = a - \mathrm{i}b$, i 为虚数单位,定义 $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\theta = \arctan(b/a)$,则在通解(1.1.21)中将含有项

$$\lambda(j) = c_1 r^j \cos j\theta + c_2 r^j \sin j\theta \tag{1.1.28}$$

若 $\lambda_1 = a + \mathrm{i}b, \lambda_2 = a - \mathrm{i}b$ 为(1.1.20)的 m 重复特征值,则在通解(1.1.21)中将含有项

$$\lambda(j) = [c_1\cos j\theta + \cdots + c_m j^{m-1}\cos j\theta]r^j + [c_{m+1}\sin j\theta + \cdots + c_{2m} j^{m-1}\sin j\theta]r^j \tag{1.1.29}$$

定义 $\rho_\lambda = \max(|\lambda_i|, i = 1,\cdots,mn_a)$,当 λ_i 为复数时,$|\lambda_i|$ 为复数的模。取 ρ 使 $\rho_\lambda < \rho < 1$,则有

$$\frac{|\lambda(j)|}{\rho^j} \to 0, \quad j \to \infty \tag{1.1.30}$$

其中应用了事实:若 $0 < a < 1$,则 $j^k a^j \to 0, j \to \infty, k \geqslant 0$。

注意(1.1.22),当 λ_i 为复特征值时,$|\lambda_i|$ 为复数的模。因而也有

$$\left(\frac{\lambda(j)}{\rho^j}\right) \to 0, \quad j \to \infty \tag{1.1.31}$$

其中 $\lambda(j)$ 由(1.1.27) ~ (1.1.29)定义,并应用了极限公式:若$0 < \rho < 1, k \geqslant 0$,则 $j^k \rho^j \to 0, j \to \infty$。从而(1.1.24) ~ (1.1.26)也成立。证毕。 □

【推论 1.1.1】 在定理 1.1.2 条件下,系数阵 $\boldsymbol{G}_j$ 以指数衰减速率趋于零,即对 $\rho_\lambda < \rho < 1$,有

$$\boldsymbol{G}_j = O(\rho^j), \quad 0 < \rho < 1 \tag{1.1.32}$$

即 $\boldsymbol{G}_j$ 的元素 $g_j^{rs}, r, s = 1, \cdots, m$,具有性质:对任意 $c > 0$,存在 $j_0 = j_0(r, s)$,

$$|g_j^{rs}| < c\rho^j \quad j > j_0 \tag{1.1.33}$$

其中自然数 $j_0 = j_0(r, s)$ 由 r, s 决定。上式可简记为

$$g_j^{rs} = O(\rho^j), \quad r, s = 1, \cdots, m \tag{1.1.34}$$

证明 对给定 $c > 0$,由(1,1,24)存在自然数 $j_0 = j_0(r, s)$,当 $j > j_0$ 有

$$|g_j^{rs}/\rho^j| < c \tag{1.1.35}$$

这引出(1.1.33),即(1.1.32)成立。 □

注意对标量 AR 模型($m = 1$),平稳性条件简化为多项式 $A(q^{-1})$ 的所有零点位于单位圆外,即多项式 $A(q^{-1})$ 是稳定的。

【定理 1.1.4】 若 $\boldsymbol{A}(q^{-1})$ 是稳定的,则由 AR 模型(1.1.3)决定的平稳随机过程 $\boldsymbol{y}(t)$ 的相关函数 $\boldsymbol{R}(i) = \mathrm{E}[\boldsymbol{y}(t)\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t-i)]$ 满足差分方程

$$\boldsymbol{A}(q^{-1})\boldsymbol{R}(i) = \boldsymbol{0}, \quad i = 1, 2, \cdots \tag{1.1.36}$$

其中 $\boldsymbol{R}(-i) = \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}(i)$,且

$$\boldsymbol{R}(0) = -\sum_{i=1}^{n_a} \boldsymbol{R}(i)\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{Q}_e \tag{1.1.37}$$

证明 用 $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t-i)$ 右乘(1.1.3)两边后取数学期望可得(1.1.36)。由 $\boldsymbol{R}(i)$ 定义引出 $\boldsymbol{R}(-i) = \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}(i)$。在(1.1.3)两边右乘 $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t)$ 可得(1.1.37)。 □

【定理 1.1.5】 AR 系数阵 $\boldsymbol{A}_i$ 满足如下 Yule - Walker 矩阵线性方程组

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}(1) \\ \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}(2) \\ \vdots \\ \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}(n_a) \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \boldsymbol{R}(0) & \boldsymbol{R}(1) & \cdots & \boldsymbol{R}(n_a-1) \\ \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}(1) & \boldsymbol{R}(0) & \cdots & \boldsymbol{R}(n_a-2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}(n_a-1) & \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}(n_a-2) & \cdots & \boldsymbol{R}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{A}_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{A}_{n_a}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \tag{1.1.38}$$

证明 在(1.1.36)中令 $i = 1, 2, \cdots, n_a$ 并利用关系 $\boldsymbol{R}(-i) = \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}(i)$ 得证。 □

【定理 1.1.6】 若 $\boldsymbol{A}(q^{-1})$ 是稳定的,则相关函数 $\boldsymbol{R}(i) \to \boldsymbol{0}(i \to \infty)$,且有衰减速度为

$$\boldsymbol{R}(i) = o(\rho^i), \quad 0 < \rho < 1 \tag{1.1.39}$$

证明 由(1.1.16)和定理 1.1.3 得证。 □

1.1.2 向量 MA 模型的可逆性

向量 MA 过程(1.1.4)表明 $\boldsymbol{y}(t)$ 可用 $\boldsymbol{e}(t)$ 的线性组合表示,因而它是一个平稳随机过程,容易看到它有零均值,且它的相关函数 $\boldsymbol{R}(i) = \mathrm{E}[\boldsymbol{y}(t)\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t-i)]$ 为

$$\boldsymbol{R}(i) = \sum_{j=i}^{n_c} \boldsymbol{C}_j \boldsymbol{Q}_c \boldsymbol{C}_{j-i}^{\mathrm{T}}, \quad i = 0,\cdots,n_c, \boldsymbol{C}_0 = \boldsymbol{I}_m,$$
$$\boldsymbol{R}(i) = \boldsymbol{0} \quad (i > n_c) \tag{1.1.40}$$

我们看到 $\boldsymbol{R}(i)$ 在 $i = n_c$ 处截尾,即 $\boldsymbol{R}(i) = \boldsymbol{0}(i > n_c)$。

现在问题是:是否在(1.1.4)中 $\boldsymbol{e}(t)$ 可用 $\boldsymbol{y}(t)$ 表示?类似于定理 1.1.2 可证明如下定理。

【定理 1.1.7】 若多项式矩阵 $\boldsymbol{C}(q^{-1})$ 是稳定的,则 MA 模型(1.1.4)是可逆的,即 $\boldsymbol{e}(t)$ 可表为 $\boldsymbol{y}(t)$ 的均方收敛的级数

$$\boldsymbol{e}(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \boldsymbol{\Pi}_j \boldsymbol{y}(t-j) \tag{1.1.41}$$

其中 $m \times m$ 系数阵 $\boldsymbol{\Pi}_j$ 可递推计算为

$$\boldsymbol{\Pi}_j = -\boldsymbol{C}_1 \boldsymbol{\Pi}_{j-1} - \cdots - \boldsymbol{C}_{n_c} \boldsymbol{\Pi}_{j-n_c}, \quad j = 1,2,\cdots \tag{1.1.42}$$

其中 $\boldsymbol{\Pi}_0 = \boldsymbol{I}_m$,规定 $\boldsymbol{\Pi}_j = \boldsymbol{0}(j < 0)$。

1.1.3 向量 ARMA 模型的平稳性和可逆性

在什么条件下向量 ARMA 模型(1.1.2)决定一个平稳随机过程 $\boldsymbol{y}(t)$?这是平稳性问题。在什么条件下 $\boldsymbol{e}(t)$ 可用 $\boldsymbol{y}(t)$ 表示?这是可逆性问题。

【定理 1.1.8】 向量 ARMA 模型(1.1.2)的平稳性条件为 $\boldsymbol{A}(q^{-1})$ 是稳定的,可逆性充分条件为 $\boldsymbol{C}(q^{-1})$ 是稳定的。此时 $\boldsymbol{y}(t)$ 可表为均方收敛的级数

$$\boldsymbol{y}(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \boldsymbol{G}_j \boldsymbol{e}(t-j) \tag{1.1.43}$$

因而 $\boldsymbol{y}(t)$ 是平稳随机过程,且 $\boldsymbol{e}(t)$ 可表为均方收敛的级数

$$\boldsymbol{e}(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \boldsymbol{\Pi}_j \boldsymbol{y}(t-j) \tag{1.1.44}$$

其中 $m \times m$ 系数阵 $\boldsymbol{G}_j$ 和 $\boldsymbol{\Pi}_j$ 可递推计算为

$$\boldsymbol{G}_j = -\boldsymbol{A}_1 \boldsymbol{G}_{j-1} - \cdots - \boldsymbol{A}_{n_a} \boldsymbol{G}_{j-n_a} + \boldsymbol{C}_j,$$
$$\boldsymbol{\Pi}_j = -\boldsymbol{C}_1 \boldsymbol{\Pi}_{j-1} - \cdots - \boldsymbol{C}_{n_c} \boldsymbol{\Pi}_{j-n_c} + \boldsymbol{A}_j \tag{1.1.45}$$

其中 $\boldsymbol{G}_0 = \boldsymbol{C}_0, \boldsymbol{\Pi}_0 = \boldsymbol{I}_m$;规定 $\boldsymbol{G}_j = \boldsymbol{0}(j < 0), \boldsymbol{\Pi}_j = \boldsymbol{0}(j < 0), \boldsymbol{C}_j = \boldsymbol{0}\,(j > n_c), \boldsymbol{A}_j = \boldsymbol{0}\,(j > n_a)$。

且 $\boldsymbol{G}_j$ 和 $\boldsymbol{\Pi}_j$ 以快于指数衰减速度趋于零,即

$$\boldsymbol{G}_j = o(\rho^j), \quad \boldsymbol{\Pi}_j = o(\rho^j), \quad 0 < \rho < 1 \tag{1.1.46}$$

证明 (1.1.43) ~ (1.1.45)的证明见文献[2],而由(1.1.45)有差分方程

$$\boldsymbol{A}(q^{-1})\boldsymbol{G}_j = \boldsymbol{0}, \quad j > n_c,$$
$$\boldsymbol{C}(q^{-1})\boldsymbol{\Pi}_j = \boldsymbol{0}, \quad j > n_a \tag{1.1.47}$$

由定理 1.1.3 引出(1.1.46)。 □

【**定理 1.1.9**】 在定理 1.1.8 条件下，$\boldsymbol{y}(t)$ 的相关函数 $\boldsymbol{R}(i)$ 满足差分方程

$$\boldsymbol{A}(q^{-1})\boldsymbol{R}(i) = \boldsymbol{0}, \quad i > n_c \tag{1.1.48}$$

且 $\boldsymbol{R}(i)$ 以高阶指数衰减速度趋于零，即

$$\boldsymbol{R}(i) = o(\rho^i), \quad 0 < \rho < 1 \tag{1.1.49}$$

证明 用 $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t-i)$ 右乘(1.1.2) 两边取数学期望，当 $i > n_c$ 时，$\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t-i)$ 不相关于 $\boldsymbol{e}(t),\cdots,\boldsymbol{e}(t-n_c)$，故有(1.1.48) 成立，进而由定理 1.1.3 引出(1.1.49)。 □

【**例 1.1.4**】 考虑 m 维向量 AR(1) 模型

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{y}(t-1) + \boldsymbol{e}(t) \tag{1.1.50}$$

平稳性条件为 $\det(\boldsymbol{I}_m - q^{-1}\boldsymbol{\Phi}) = 0$ 的所有根位于单位圆外，即 $\boldsymbol{\Phi}$ 的特征方程 $\det(\lambda\boldsymbol{I}_m - \boldsymbol{\Phi}) = 0$ 的所有根在单位圆内，即 $\boldsymbol{\Phi}$ 是稳定矩阵，此时 $\boldsymbol{y}(t)$ 可表为

$$\boldsymbol{y}(t) = (\boldsymbol{I}_m - q^{-1}\boldsymbol{\Phi})^{-1}\boldsymbol{e}(t) = \sum_{j=0}^{\infty}\boldsymbol{\Phi}^j q^{-j}\boldsymbol{e}(t) = \sum_{j=0}^{\infty}\boldsymbol{\Phi}^j\boldsymbol{e}(t-j) \tag{1.1.51}$$

直接利用(1.1.16) 也可得 $\boldsymbol{G}_j = \boldsymbol{\Phi}^j$。

1.1.4 向量 CARMA 模型

含有已知控制输入 $\boldsymbol{u}(t) \in R^p$ 的 m 维向量 ARMA 模型称为受控的自回归滑动平均(CARMA) 模型，它有形式

$$\boldsymbol{A}(q^{-1})\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{B}(q^{-1})\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{C}(q^{-1})\boldsymbol{e}(t) \tag{1.1.52}$$

其中白噪声 $\boldsymbol{e}(t)$ 同前，$\boldsymbol{A}(q^{-1})$，$\boldsymbol{B}(q^{-1})$ 和 $\boldsymbol{C}(q^{-1})$ 为形如

$$\boldsymbol{X}(q^{-1}) = \boldsymbol{X}_0 + \boldsymbol{X}_1 q^{-1} + \cdots + \boldsymbol{X}_{n_x} q^{-n_x} \tag{1.1.53}$$

的多项式矩阵，且有 $\boldsymbol{A}_0 = \boldsymbol{I}_m$，$\boldsymbol{C}_0 = \boldsymbol{I}_m$。系数阵 $\boldsymbol{A}_i$，$\boldsymbol{C}_i$ 为 $m \times m$ 阵，$\boldsymbol{B}_i$ 为 $m \times p$ 阵，特别，若 $\boldsymbol{C}_0 = \boldsymbol{I}_m$，$\boldsymbol{C}_i = \boldsymbol{0}$，则有

$$\boldsymbol{A}(q^{-1})\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{B}(q^{-1})\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{e}(t) \tag{1.1.54}$$

称其为受控的自回归(CAR) 模型。

假设 $\boldsymbol{A}(q^{-1})$ 和 $\boldsymbol{C}(q^{-1})$ 是稳定的，$\boldsymbol{u}(t)$ 是有界的，则由(1.1.52)$\boldsymbol{e}(t)$ 可表为

$$\boldsymbol{e}(t) = \boldsymbol{C}^{-1}(q^{-1})\boldsymbol{A}(q^{-1})\boldsymbol{y}(t) - \boldsymbol{C}^{-1}(q^{-1})\boldsymbol{B}^{-1}(q^{-1})\boldsymbol{u}(t) \tag{1.1.55}$$

它可展为级数

$$\boldsymbol{e}(t) = \sum_{j=0}^{\infty}\boldsymbol{\Pi}_j\boldsymbol{y}(t-j) - \sum_{j=0}^{\infty}\boldsymbol{\Psi}_j\boldsymbol{u}(t-j) \tag{1.1.56}$$

其中应用了展式

$$\boldsymbol{C}^{-1}(q^{-1})\boldsymbol{A}(q^{-1}) = \sum_{j=0}^{\infty}\boldsymbol{\Pi}_j q^{-j}, \quad \boldsymbol{C}^{-1}(q^{-1})\boldsymbol{B}(q^{-1}) = \sum_{j=0}^{\infty}\boldsymbol{\Psi}_j q^{-j} \tag{1.1.57}$$

用 $\boldsymbol{C}(q^{-1})$ 左乘(1.1.57) 的两个式子后，用比较 q^{-i} 系数阵方法可以得递推公式

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Pi}_j &= -\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{\Pi}_{j-1} - \cdots - \boldsymbol{C}_{n_c}\boldsymbol{\Pi}_{j-n_c} + \boldsymbol{A}_j, \\ \boldsymbol{\Psi}_j &= -\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{\Psi}_{j-1} - \cdots - \boldsymbol{C}_{n_c}\boldsymbol{\Psi}_{j-n_c} + \boldsymbol{B}_j\end{aligned} \tag{1.1.58}$$

其中 $\boldsymbol{\Pi}_0 = \boldsymbol{I}_m$，$\boldsymbol{\Pi}_j = \boldsymbol{0}(j < 0)$，$\boldsymbol{A}_j = \boldsymbol{0}(j > n_a)$；$\boldsymbol{\Psi}_0 = \boldsymbol{B}_0$，$\boldsymbol{\Psi}_j = \boldsymbol{0}(j < 0)$，$\boldsymbol{B}_j = \boldsymbol{0}(j > n_b)$。当 $j > n_a$，$j > n_b$，则有差分方程

$$C(q^{-1})\boldsymbol{\Pi}_j = \mathbf{0}, \quad C(q^{-1})\boldsymbol{\Psi}_j = \mathbf{0} \tag{1.1.59}$$

由定理 1.1.3 引出 $\boldsymbol{\Pi}_j$ 和 $\boldsymbol{\Psi}_j$ 以高阶指数衰减速度趋于零,即

$$\boldsymbol{\Pi}_j = o(\rho^j), \boldsymbol{\Psi}_j = o(\rho^j), \quad 0 < \rho < 1 \tag{1.1.60}$$

取 n_0 充分大,则有 $\boldsymbol{\Pi}_j \approx \mathbf{0}, \boldsymbol{\Psi}_j \approx \mathbf{0}(j > n_0)$,因而由(1.1.56)$\boldsymbol{e}(t)$ 可近似表示为

$$\boldsymbol{e}(t) = \sum_{j=0}^{n_0} \boldsymbol{\Pi}_j \boldsymbol{y}(t-j) - \sum_{j=0}^{n_0} \boldsymbol{\Psi}_j \boldsymbol{u}(t-j) \tag{1.1.61}$$

而(1.1.61) 恰好为 CAR 模型

$$\boldsymbol{\Pi}(q^{-1})\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{\Psi}(q^{-1})\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{e}(t) \tag{1.1.62}$$

其中定义多项式矩阵

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Pi}(q^{-1}) &= \boldsymbol{I}_m + \boldsymbol{\Pi}_1 q^{-1} + \cdots + \boldsymbol{\Pi}_{n_0} q^{-n_0} \\ \boldsymbol{\Psi}(q^{-1}) &= \boldsymbol{\Psi}_0 + \boldsymbol{\Psi}_1 q^{-1} + \cdots + \boldsymbol{\Psi}_{n_0} q^{-n_0} \end{aligned} \tag{1.1.63}$$

由上述分析引出如下定理。

【定理 1.1.10】 若 $\boldsymbol{A}(q^{-1})$ 和 $\boldsymbol{C}(q^{-1})$ 是稳定的,则 CARMA 模型(1.1.52) 可用高阶 CAR 模型(1.1.62) 逼近。只要取 CAR 模型(1.1.62) 的阶次 n_0 充分大,则 CAR 模型(1.1.62) 可以任意精度逼近 CARMA 模型(1.1.52)。

注意,定理 1.1.10 表明 CARMA 模型可用高阶 CAR 模型近似代替。特别地,若 $\boldsymbol{u}(t) = \mathbf{0}$,则 ARMA 或 MA 模型可用高阶 AR 模型近似代替。这种简化的近似模型具有较大实用价值。

【引理 1.1.1】[20] 若随机序列 $\{\xi_n\}$ 均方收敛于随机变量 ξ,记为 $\xi_n \to \xi$,m.s.,则在下述“等价随机变量”意义下 ξ 是惟一的:若 $\xi_n \to \xi$,m.s.,且 $\xi_n \to \eta$,m.s.,则有概率 $P(\xi \neq \eta) = 0$,并称随机变量 ξ 与 η 是等价的。若 ξ_n 以概率 1 收敛于 ξ,记为 $\xi_n \to \xi$,a.s.,则在上述等价随机变量意义下 ξ 是惟一的。若 ξ_n 以概率收敛于 ξ,记为 $\xi_n \to \xi$,P.,则在上述等价随机变量意义下是惟一的。今后总用符号“a.s.”表示“以概率 1”成立。

【引理 1.1.2】[20] 若 $\{\xi_n\}$ 为相互独立的随机序列,ξ_n 有零均值和方差 $\sigma_{\xi_n}^2$,若

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{\xi_n}^2 < \infty \tag{1.1.64}$$

则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \xi_n$ 以概率 1 收敛。

【定理 1.1.11】 对于标量($m = 1$)ARMA 过程(1.1.2),若 $A(q^{-1})$ 是稳定的多项式(即 $y(t)$ 是平稳随机过程),则有均方收敛和以概率 1 收敛的展式(1.1.43),

$$y(t) = \sum_{j=0}^{\infty} g_j e(t-j), \text{a.s.} \tag{1.1.65}$$

其中白噪声 $e(t)$ 有方差 σ_e^2,由(1.1.45) 系数 g_j 可递推计算为

$$g_j = -a_1 g_{j-1} - \cdots - a_{n_a} g_{j-n_a} + c_j \tag{1.1.66}$$

其中规定 $g_0 = 1, g_j = 0(j < 0), c_j = 0(j > n_c)$,$a_j$ 和 c_j 为 $A(q^{-1})$ 和 $C(q^{-1})$ 的系数,且 g_j 按指数律衰减为

$$g_j < c\rho^j, \quad 0 < \rho < 1, \quad c > 0, \quad j > j_0 \tag{1.1.67}$$

证明 由定理 1.1.8 引出在均方收敛意义下(1.1.65) ~ (1.1.67) 成立。令 $\xi_j =$

$g_j e(t-j)$,则由(1.1.67)有

$$\sum_{j=0}^{\infty}\sigma_{\xi_j}^2=\sigma_e^2\sum_{j=0}^{\infty}g_j^2<c^2\sum_{j=0}^{\infty}\rho^j=\frac{c^2}{1-\rho} \tag{1.1.68}$$

故由引理1.1.2有(1.1.65)以概率1收敛。由于均方收敛和以概率1收敛均引出以概率收敛,因此,在等价随机变量意义下,(1.1.65)有惟一的极限。 □

【定理1.1.12】 对于向量ARMA模型(1.1.2),若$\boldsymbol{A}(q^{-1})$是稳定的,则$\boldsymbol{y}(t)$可表为均方收敛和以概率1收敛的级数(1.1.69)

$$\boldsymbol{y}(t)=\sum_{j=0}^{\infty}\boldsymbol{G}_j\boldsymbol{e}(t-j) \tag{1.1.69}$$

其中$\boldsymbol{G}_j$由(1.1.45)计算。

证明 置$\boldsymbol{y}(t)=[y_1(t),\cdots,y_m(t)]^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{e}(t)=[e_1(t),\cdots,e_m(t)]^{\mathrm{T}}$,则$\boldsymbol{y}(t)$可表为均方收敛和以概率1收敛的级数(1.1.69)的充要条件为它的分量$y_i(t)$可表为均方收敛和以概率1收敛的级数[21]。记$\mathrm{adj}\boldsymbol{A}(q^{-1})\boldsymbol{C}(q^{-1})=(p_{ij}(q^{-1}))$,$p_{ij}(q^{-1})$是它的第$i$行第$j$列元素,则$\boldsymbol{y}(t)$可表为

$$\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{A}^{-1}(q^{-1})\boldsymbol{C}^{-1}(q^{-1})\boldsymbol{e}(t)=[\mathrm{adj}\boldsymbol{A}(q^{-1})\boldsymbol{C}(q^{-1})/\det\boldsymbol{A}(q^{-1})]\boldsymbol{e}(t) \tag{1.1.70}$$

这引出分量$y_i(t)$可表为

$$y_i(t)=\sum_{j=1}^{m}\frac{p_{ij}(q^{-1})}{\det\boldsymbol{A}(q^{-1})}e_j(t),\quad i=1,\cdots,m \tag{1.1.71}$$

由定理1.1.11,因$\det\boldsymbol{A}(q^{-1})$为稳定多项式,故$[p_{ij}(q^{-1})/\det\boldsymbol{A}(q^{-1})]e_j(t)$可展为均方和以概率1收敛的级数。因而(1.1.71)可展为均方和以概率1收敛的级数。从而在均方和以概率1收敛意义下(1.1.69)成立。 □

【定理1.1.13】 对于标量ARMA过程(1.1.2),若$A(q^{-1})$是稳定的多项式,且输入白噪声$e(t)$是有界的:$\forall t$,$|e(t)|<M$,则$y(t)$有界:$\forall t$,$|y(t)|<K$,a.s.。符号"$\forall$"表示"任意"。

证明 由定理1.1.11,(1.1.65)以概率1成立,见系数g_j满足指数衰减律(1.1.67),因而

$$|y(t)|\leqslant M\sum_{j=0}^{\infty}|\alpha_j|<M\Big(\sum_{j=0}^{j_0}|\alpha_j|+\sum_{j=j_0+1}^{\infty}c\rho^j\Big)<M\Big(\sum_{j=0}^{j_0}|\alpha_j|+\frac{c\rho^{j_0+1}}{1-\rho}\Big)=K,\text{a.s.} \tag{1.1.72}$$

其中应用了几何级数求和公式。这证明了$y(t)$的有界性。 □

【定理1.1.14】 对于向量ARMA模型(1.1.2),若$\boldsymbol{A}(q^{-1})$是稳定的,且设输入白噪声$\boldsymbol{e}(t)$是有界的,$\|\boldsymbol{e}(t)\|<M$,则$\boldsymbol{y}(t)$亦有界:$\forall t$,$\|\boldsymbol{y}(t)\|<K$,a.s.。这里$\|\cdot\|$表示向量的范数[22]。

证明 沿用定理1.1.12中的分量记号,注意[22] $\|\boldsymbol{e}(t)\|<M$等价于它的每个分量$e_i(t)$有界:$|e_i(t)|<M_e$,$i=1,\cdots,m$;下面证明$\|y_i(t)\|<K_y$,$i=1,\cdots,m$,其中M_e,K_y为常数。由(1.1.71)分量$y_i(t)$可表为

$$y_i(t)=\sum_{j=1}^{m}z_j(t),\quad z_j(t)=\frac{p_{ij}(q^{-1})}{\det A(q^{-1})}e_j(t) \tag{1.1.73}$$

由 $\boldsymbol{A}(q^{-1})$ 的稳定性引出 $\det\boldsymbol{A}(q^{-1})$ 是稳定的多项式，故由定理 1.1.13 由 $|e_j(t)|< M_e$ 引出 $z_j(t)$ 有界；$|z_j(t)|< K_z$(常数)，a.s.，$j = 1,\cdots,m$，从而 $|y_i(t)|< mK_z$，a.s.，$i = 1,\cdots,m$。即 $\|\boldsymbol{y}(t)\| < K$，a.s.。 □

1.2 传递函数模型

从信号传输、变换观点，将 $\boldsymbol{e}(t)$ 视为向量 ARMA 模型(1.1.2)的输入，$\boldsymbol{y}(t)$ 视为输出，则 $\boldsymbol{y}(t)$ 可表为传递函数形式

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{G}(q^{-1})\boldsymbol{e}(t) \tag{1.2.1}$$

将关于 $\boldsymbol{e}(t)$ 的算子(运算)$\boldsymbol{G}(q^{-1})$，

$$\boldsymbol{G}(q^{-1}) = \boldsymbol{A}^{-1}(q^{-1})\boldsymbol{C}(q^{-1}) \tag{1.2.2}$$

称为传递函数，它是 $m\times m$ 有理多项式矩阵。特别对向量 MA 模型(1.1.4)而言，传递函数 $\boldsymbol{G}(q^{-1}) = \boldsymbol{C}(q^{-1})$，它是 $m\times m$ 多项式矩阵。这种形式传递函数被用有限个参数参数化，即由 $\boldsymbol{A}(q^{-1})$ 和 $\boldsymbol{C}(q^{-1})$ 的有限个参数阵完全决定了 $\boldsymbol{G}(q^{-1})$。另一方面由定理 1.1.8 的(1.1.43)式，向量 ARMA 模型(1.1.2)的传递函数 $\boldsymbol{G}(q^{-1})$ 也可表为等价的无穷级数形式

$$\boldsymbol{G}(q^{-1}) = \sum_{j=0}^{\infty}\boldsymbol{G}_j q^{-j} \tag{1.2.3}$$

称其为无限脉冲响应传递函数。由(1.2.2)和(1.2.3)有关系

$$\boldsymbol{A}^{-1}(q^{-1})\boldsymbol{C}(q^{-1}) = \sum_{j=0}^{\infty}\boldsymbol{G}_j q^{-j} \tag{1.2.4}$$

用 $\boldsymbol{A}(q^{-1})$ 左乘(1.2.4)两边后，比较 q^{-j} 系数阵可得(1.1.45)中 $\boldsymbol{G}_j$ 的递推计算公式。对向量 MA 过程(1.1.4)，它的传递函数 $\boldsymbol{G}(q^{-1}) = \boldsymbol{C}(q^{-1})$ 也叫有限脉冲响应传递函数。

【例 1.2.1】 反卷积模型[2]。设 n 维输入 $\boldsymbol{s}(t)$ 和 m 维观测输出 $\boldsymbol{y}(t)$ 服从如下卷积模型

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{y}(t) &= \boldsymbol{G}(q^{-1})\boldsymbol{s}(t) + \boldsymbol{T}(q^{-1})\boldsymbol{\xi}(t) + \boldsymbol{v}(t),\\
\boldsymbol{G}(q^{-1}) &= \boldsymbol{A}^{-1}(q^{-1})\boldsymbol{C}(q^{-1}),\\
\boldsymbol{T}(q^{-1}) &= \boldsymbol{M}^{-1}(q^{-1})\boldsymbol{N}(q^{-1}),\\
\boldsymbol{s}(t) &= \boldsymbol{\Phi}^{-1}(q^{-1})\boldsymbol{\Psi}(q^{-1})\boldsymbol{e}(t)
\end{aligned} \tag{1.2.5}$$

其中 $\boldsymbol{e}(t)\in R^r$，$\boldsymbol{\xi}(t)\in R^p$ 和 $\boldsymbol{v}(t)\in R^m$ 是零均值相互独立的白噪声，$\boldsymbol{A}(q^{-1}),\cdots,\boldsymbol{\Psi}(q^{-1})$ 为 q^{-1} 的多项式矩阵，$\boldsymbol{G}(q^{-1})$ 和 $\boldsymbol{T}(q^{-1})$ 为传递函数阵。由含噪声污染的输出(观测)$\boldsymbol{y}(t)$ 估计输入信号 $\boldsymbol{s}(t)$ 叫反卷积(Deconvolution)。项 $\boldsymbol{z}(t) = \boldsymbol{G}(q^{-1})\boldsymbol{s}(t)$ 代表无观测噪声时的输入 $\boldsymbol{s}(t)$ 与输出 $\boldsymbol{z}(t)$ 的传递函数模型，项 $\boldsymbol{\eta}(t) = \boldsymbol{T}(q^{-1})\boldsymbol{\xi}(t)$ 代表 ARMA 有色观测噪声。项 $\boldsymbol{v}(t)$ 代表白色观测噪声。

特别，当 $\boldsymbol{G}(q^{-1}) = \boldsymbol{I}_m$ 时，(1.2.5)化为信号滤波模型

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{y}(t) &= \boldsymbol{s}(t) + \boldsymbol{\eta}(t) + \boldsymbol{v}(t),\\
\boldsymbol{s}(t) &= \boldsymbol{\Phi}^{-1}(q^{-1})\boldsymbol{\Psi}(q^{-1})\boldsymbol{e}(t),\\
\boldsymbol{\eta}(t) &= \boldsymbol{M}^{-1}(q^{-1})\boldsymbol{N}(q^{-1})\boldsymbol{\xi}(t)
\end{aligned} \tag{1.2.6}$$

信号滤波问题是：由被白噪声和有色噪声污染的观测信号 $\boldsymbol{y}(t)$ 求信号 $\boldsymbol{s}(t)$ 的最优估计。

【例 1.2.2】 Wiener 滤波器的传递函数结构。对于信号滤波模型(1.2.6)，若基于观测