

人教版

新版

# 备考 教程

BEIKAO  
JIAOCHENG

高一数学 上册

丛书主编◎陈艳

本册主编◎彭惠霞

大连理工大学出版社

Dalian University of Technology Press

人教版

新版

# 备考 教程

## 高一数学（上册）

第四版

丛书主编 / 陈艳

本册主编 / 彭惠霞

副主编 / 夏石强 杜心怡

编者 / 高峰 彭向辉 肖亮明

蔡尚海 刘立成 王国勋

陈少先

大连理工大学出版社

Dalian University of Technology Press

© 彭惠霞 2003

图书在版编目(CIP)数据

备考教程 高一数学(上册) / 彭惠霞主编. —4版. —大连:  
大连理工大学出版社, 2003.6

ISBN 7-5611-1821-X

I. 备… II. 彭… III. 数学课—高中—教学参考资料  
IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 05918 号

大连理工大学出版社出版

地址:大连市凌水河 邮政编码:116024

电话:0411-4708842 传真:0411-4701466 邮购:0411-4707961

E-mail: dulp@mail.dlptt.ln.cn URL: http://www.dulp.cn

大连业发印刷有限公司印刷 大连理工大学出版社发行

---

幅面尺寸:147mm×208mm 印张:6.5 字数:260千字

印数:90 001 ~ 130 000

2000年7月第1版

2003年6月第4版

2003年6月第4次印刷

---

责任编辑:王纪  
封面设计:孙宝福

责任校对:王岩  
版式设计:宋蕾

---

定价:8.00元

# .. 修订版 前 言 .....

《备考教程》三年来,得到了广大师生的认可。在众多教辅读物中产生了很好的反响。

为了使这套丛书能够对广大中学生提供更有效的帮助,我们广泛收集来自第一线读者的意见,在那些稚嫩的声音里充满了对出版人的希望,在那些中肯意见里渗透着对教辅图书的更高的企盼。

为此,本次修订的新版《备考教程》,根据新课程标准的要求,下大气力认真分析了人教社试验版统编教材;按照培养学生学科能力和中考、高考强调灵活运用知识、考核能力水平的新要求,广泛吸收了一线教师和读者意见基础上精心组织编写。

这次修订重点突出了两个方面:

一、突出从根本上学会知识,学会掌握这类知识的方法。该书不仅是教材的练习册与例题集,更是教会学生学习、梳理知识、总结归纳重点,建立起自己的知识网络的辅助性读物,加大了知识梳理和规律总结内容。

二、突出创新和综合。针对最新的中考、高考改革精神和命题方向,选择一些新的题型和综合能力型题,尤其增加了一些“活题”,引发学生动脑去思考,充分调动学生的潜能。

为了实现以上特点,又兼顾不同程度的学生都能在本书中获得提高,我们在图书的结构上做了精心的调整:

每册图书与教材同步,使学生们能够及时获得最新的最确切的辅导。每节设置了**重点精讲**、**经典题析**、**能力训练**三个栏目,每章设置**考点透视**、**本章小结**和**综合能力测试**两个板块。

▶**重点精讲**:对本节的学习要求及知识点简明扼要透彻讲解,同时把考纲的要求分解到每节的知识点中。

▶**经典题析**:精心选编具有代表性、新颖性、技巧性与综合性的例题,包括选择近年来若干中考、高考真题,予以详细的分析、点评或说明。

▶**能力训练**:对应本节知识点内容,针对中考、高考要求,精心选择适量的训练题。特别是此次修订时,我们将训练题从易到难分为**基础题**、**综合题**两个层次,供学生强化训练,并在其后附有答案,对较难的题给予必要的提示。

▶**本章总结**:共分两个栏目:

●**知识梳理**,对本章所学知识给出比较科学又便于记忆的归纳和梳理,使学生只须记住**关键点**,其余的可以通过运用已记住的方法、规律,自己灵活掌握与应用。

●**复习指导**——对本章的重难点与高考(或中考)的命题方向和热点的分析,尤其增加了对**易错点**的分析。

▶**拓展迁移**:从知识和能力两个层面上拓展,对解题思路及方法做发散思维迁移训练,并注重学科之间的上下联系、相互贯通,力求做到“一题多解”、“举一反三”。

本丛书特色在于:在注重提高学生智能素质的基础上,突出综合性和应试性,同时在同步讲练中追求层次和梯度的适度把握。综合性既体现在学科内知识的贯通、衔接上,又反映出学科间知识的相互渗透、纵横联系。应试性体现在,对应每部分知识点练习时,尽量择取近年中考、高考真题,充分关注中考和高考的最新信息,强化备考意识和实战训练。

**知识有规律,学习有方法。新版《备考教程》则是你学习知识,增强能力,提高成绩的好帮手!**

# ..... 目 录 .....

---

|            |                          |          |
|------------|--------------------------|----------|
| <b>第一章</b> | <b>集合与简易逻辑</b>           | <b>1</b> |
|            | 1.1 集合、全集、补集             | 1        |
|            | 1.2 含绝对值的不等式和一元二次不等式的解法  | 12       |
|            | 1.3 逻辑联结词·四种命题·充分条件与必要条件 | 24       |
|            | 本章小结                     | 32       |
|            | 综合能力检测一                  | 39       |
|            | 综合能力检测二                  | 41       |

---

|            |             |           |
|------------|-------------|-----------|
| <b>第二章</b> | <b>函数</b>   | <b>46</b> |
|            | 2.1 映射与函数   | 46        |
|            | 2.2 函数的单调性  | 58        |
|            | 2.3 反函数     | 66        |
|            | 2.4 指数·指数函数 | 76        |
|            | 2.5 对数·对数函数 | 86        |

|             |     |
|-------------|-----|
| 2.6 函数的应用举例 | 98  |
| 本章小结        | 109 |
| 综合能力检测一     | 116 |
| 综合能力检测二     | 119 |
| 期中测试        | 125 |

|     |                    |     |
|-----|--------------------|-----|
| 第三章 | 数列                 | 128 |
| 3.1 | 数列                 | 128 |
| 3.2 | 等差数列·等差数列前 $n$ 项的和 | 139 |
| 3.3 | 等比数列·等比数列前 $n$ 项的和 | 150 |
| 3.4 | 研究性课题:分期付款中的有关计算   | 164 |
|     | 本章小结               | 174 |
|     | 综合能力检测一            | 187 |
|     | 综合能力检测二            | 189 |
|     | 期末测试               | 196 |

# 第一章 集合与简易逻辑

## 考点透视

| 高考知识点             | 高考要求层次 |       |         | 具体要求  |
|-------------------|--------|-------|---------|---|
|                   | 了解     | 理解和掌握 | 灵活和综合应用 |   |
| 集合、子集、全集、补集、交集、并集 |        | ✓     |         | 理解集合、子集、全集、交集、并集、补集的概念,了解空集和全集的意义,了解属于、包含、相等的意义,能正确地表示一些简单的集合 |
| 含绝对值的不等式          |        |       | ✓       | 掌握 $ ax + b  < c$ , $ ax + b  > c$ ( $c > 0$ )型不等式的解法         |
| 一元二次不等式           |        |       | ✓       | 掌握二次不等式的解法及它与二次方程,二次函数的关系                                     |
| 逻辑联结词             | ✓      |       |         | 理解“或”,“且”,“非”的含义  |
| 四种命题              |        | ✓     |         | 理解命题的四种形式及其关系   |
| 充要条件              |        |       | ✓       | 掌握充分条件,必要条件,充要条件及其判定  |

## 1.1 集合、全集、补集

### 重点精讲

1. 某些指定的对象集在一起就成为一个集合,简称集。

全体非负整数的集合通常简称为非负整数集或自然数集,记作  $N$ ;

非负整数集内排除 0 的集,也称正整数集,记作  $N^*$  或  $N$ ;

全体整数的集合通常简称整数集,记作  $Z$ ;

全体有理数的集合通常简称有理数集,记作  $Q$ ;

全体实数的集合通常简称为实数集,记作  $R$ 。

2. 集合中的每个对象叫做这个集合的元素。集合的元素具有确定性、互异性



和有序性,常称此为集合的三要素。

如果  $a$  是集合  $A$  的元素,就说  $a$  属于集合  $A$ ,记作  $a \in A$ ;如果  $a$  不是集合  $A$  的元素,就说  $a$  不属于集合  $A$ ,记作  $a \notin A$ (或  $a \bar{\in} A$ )。

3.集合的表示法有列举法和描述法两种。按构成集合的元素个数是有限个,还是无限多个,集合可分为有限集和无限集。不含任何元素的集合叫做空集,记作  $\emptyset$ 。

4.对于两个集合  $A$  与  $B$ ,如果集合  $A$  的任何一个元素都是集合  $B$  的元素,则称集合  $A$  是集合  $B$  的子集,也称集合  $A$  包含于集合  $B$ ,或集合  $B$  包含集合  $A$ ,记作

$$A \subseteq B \text{ (或 } B \supseteq A \text{)}$$

当集合  $A$  不包含于集合  $B$ ,或集合  $B$  不包含集合  $A$  时,记作  $A \not\subseteq B$ ( $B \not\supseteq A$ )。

特别规定:空集是任何集合的子集;任何集合是它本身的子集。即

$$\emptyset \subseteq A, A \subseteq A$$

5.对于两个集合  $A$  与  $B$ ,如果  $A \subseteq B$ ,且  $B$  中至少有一个元素不属于  $A$ ,则称集合  $A$  是集合  $B$  的真子集,记作

$$A \subsetneq B \text{ (或 } B \supsetneq A \text{)}$$

显然,空集是任何非空集合的真子集。

如果集合  $S$  含有我们所要研究的各个集合的全部元素,这个集合常称为全集,通常用  $U$  表示。

6.对于集合  $A, B$ ,如果  $A \subseteq B$ ,同时  $B \subseteq A$ ,则称集合  $A$  等于集合  $B$ ,记作  $A = B$ 。

7.设  $S$  是一个集合,  $A$  是  $S$  的一个子集(即  $A \subseteq S$ ),由  $S$  中所有不属于  $A$  的元素组成的集合,叫做  $S$  中子集  $A$  的补集(或余集),记作  $C_S A$ ,即

$$C_S A = \{x | x \in S, \text{ 且 } x \notin A\}$$

8.由所有属于集合  $A$  且属于集合  $B$  的元素所组成的集合,叫做  $A$  与  $B$  的交集,记作  $A \cap B$ (读作  $A$  交  $B$ ),即

$$A \cap B = \{x | x \in A, \text{ 且 } x \in B\}$$

由所有属于集合  $A$  或集合  $B$  的元素所组成的集合,叫做  $A$  与  $B$  的并集,记作  $A \cup B$ (读作  $A$  并  $B$ ),即

$$A \cup B = \{x | x \in A, \text{ 或 } x \in B\}$$

在历年的高考试题中,本节内容常以选择题、填空题的形式出现,也可和其他知识一起构成综合题。

## 经典题析

【例1】 2002年全国高考试题 设集合  $M = \left\{ x \mid x = \frac{k}{2} + \frac{1}{4}, k \in \mathbf{Z} \right\}$ ,  $N = \left\{ x \mid x = \frac{k}{4} + \frac{1}{2}, k \in \mathbf{Z} \right\}$ , 则( )。

- A.  $M = N$       B.  $M \subset N$       C.  $M \supset N$       D.  $M \cap N = \emptyset$

(注: “ $M \subset N$ ”表示  $M$  是  $N$  的真子集, 在新教材应表示为 “ $M \subsetneq N$ ”)

命题意图 本题考查集合与集合之间关系的判定, 代数式的恒等变形。

分析 因为  $x = \frac{k}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2k+1}{4}$ ,  $x = \frac{k}{4} + \frac{1}{2} = \frac{k+2}{4}$ , 当  $k \in \mathbf{Z}$ , 前者表示  $\frac{1}{4}$  的奇数倍, 后者表示  $\frac{1}{4}$  的整数倍, 故选 B。

答案 B

►点评 此类问题的求解在于准确地认识集合  $M, N$  中元素的特征。

【例2】 2002年北京市高考试题 满足条件  $M \cup \{1\} = \{1, 2, 3\}$  的集合  $M$  的个数是( )。

- A. 4      B. 3      C. 2      D. 1

命题意图 本题考查并集的运算特点。

分析 为使  $M \cup \{1\} = \{1, 2, 3\}$ , 则  $M$  中至少应有元素 2 和 3, 当然也可以有 1, 故  $M = \{2, 3\}$  或  $\{2, 3, 1\}$ 。

答案 C

►点评 本题其实是求  $\{1, 2, 3\}$  的子集  $M$ , 且  $M$  中必须有元素 3 和 2。

【例3】 选择题:

(1) 设集合  $M = \{x \mid x \leq 2\sqrt{3}\}$ ,  $a = \sqrt{11 + \sin x}$ , 其中  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , 则下列关系中正确的是( )。

- A.  $a \subsetneq M$       B.  $a \in M$       C.  $\{a\} \in M$       D.  $\{a\} \subsetneq M$

命题意图 本题考查元素与集合的关系及判定方法。

分析 由  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  知,  $0 < \sin x < 1$ ,  $a = \sqrt{11 + \sin x} < \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ , 故  $a \in M$ ,  $\{a\} \subsetneq M$ 。

答案 D

►点评 元素和集合的关系是“属于  $\in$ ”或“不属于  $\notin$ ”的关系, 因而“ $a \subsetneq M$ ”的表示法是错误的。集合和集合的关系是“包含于  $\subset$ ”或“包含  $\supset$ ”关系, 因而“ $\{a\} \in M$ ”的表示法是错误的。本题容易误选 A 或 C, 需引起注意。

(2) 已知集合  $M = \{x | x^2 + y^2 = 1, x, y \in R\}$ , 集合  $N = \{x | y = \sqrt{1-x^2}\}$ , 则 ( )。

- A.  $M \subsetneq (M \cup N)$                       B.  $M \subsetneq (M \cap N)$   
 C.  $M \subseteq N$                                   D.  $M \cap N = \emptyset$

命题意图 本题考查集合的表示法, 集合与集合相等的概念。

分析 集合  $M$  中的元素是满足条件  $x^2 + y^2 = 1$  的  $x$ , 由  $x^2 = 1 - y^2 \leq 1$  知,  $-1 \leq x \leq 1$ , 故  $M = \{x | -1 \leq x \leq 1\}$ , 集合  $N$  中的元素即函数  $y = \sqrt{1-x^2}$  中使  $y$  有意义的  $x$ , 故  $N = \{x | -1 \leq x \leq 1\}$ , 因而  $M = N$ , 也即  $M \subseteq N$ 。

答案 C

→ 点评 集合的相等是一种特殊的包含关系, 即  $M = N \Leftrightarrow M \subseteq N$  且  $N \subseteq M$ 。

【例4】 已知全集  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ,  $A, B$  为  $U$  的子集, 且  $(\complement_U A) \cap B = \{1, 9\}$ ,  $A \cap B = \{2\}$ ,  $(\complement_U A) \cap (\complement_U B) = \{4, 6, 8\}$ , 求  $A$  和  $\complement_U B$ 。

命题意图 本题考查集合之间的交、并、补的运算。

分析 本题宜用表示集合的韦恩图直观求解。

解法一 (逐个判定)

$2 \in A, 2 \in B; 1, 9 \in A, 1, 9 \in B; 4, 6, 8 \in A$  且  $4, 6, 8 \in B$ ;  
 余下判定 3, 5, 7。

因  $3 \in (\complement_U A) \cap B, 3 \in A \cap B, 3 \in (\complement_U A) \cap (\complement_U B)$ , 所以  $3 \in A$ 。同理  $5 \in A, 7 \in A$ 。

故  $A = \{2, 3, 5, 7\}, B = \{1, 2, 9\}, \complement_U B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ 。

解法二 用如图 1-1 分别表示题中集合,

全集  $U$  被分成  $A \cap B, A \cap (\complement_U B), (\complement_U A) \cap B, (\complement_U A) \cap (\complement_U B)$  四个子集。将题设的三个子集填入图中后, 余下的 3, 5, 7 三数只能填入  $A \cap (\complement_U B)$  之中, 此时不难知道  $A = \{2, 3, 5, 7\}, \complement_U B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ 。

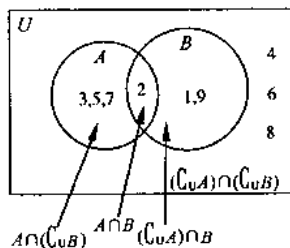


图 1-1

→ 点评 解法一是根据题设条件, 将全集中的元素逐个定位, 定位时应注意验证是否会导致矛盾, 否则应一一验证; 解法二引入的图形常称为韦恩图。利用韦恩图分块, 整体定位, 这种方法简便、直观, 体现了数形结合的解题思想。

**【例5】** 已知集合  $P = \{x | x = m^2 + 1, m \in \mathbb{N}\}$ ,  $Q = \{y | y = n^2 - 4n + 5, n \in \mathbb{N}\}$ , 试证明:  $P = Q$ .

**命题意图** 本题考查集合相等的判定.

**分析** 要证明  $P = Q$ , 只须证明  $P \subseteq Q$  且  $Q \subseteq P$ .

**证明** 任取  $x \in P$ , 则存在  $m \in \mathbb{N}$ , 使  $x = m^2 + 1 = (m+2)^2 - 4(m+2) + 5$ , 令  $n = m+2 \in \mathbb{N}$ , 故  $x = n^2 - 4n + 5 \in Q$ , 故  $P \subseteq Q$ .

又任取  $x \in Q$ , 则存在  $n \in \mathbb{N}$ , 使  $x = n^2 - 4n + 5 = (n-2)^2 + 1$ , 令  $m = |n-2| \in \mathbb{N}$ , 故  $x = m^2 + 1 \in P$ .

故  $P \supseteq Q$ ,

所以  $P = Q$ .

► **点评** 此例提供的方法是证明两个集合相等的通法.

**【例6】** 设  $A$  是一个由实数组成的集合, 且满足条件: 若  $a \in A, a \neq 1$ , 则  $\frac{1}{1-a} \in A$ , 求证:

(1) 若  $2 \in A$ , 则  $A$  中必还有另外两个元素.

(2) 集合  $A$  不可能是单元素集.

(3) 集合  $A$  中至少有三个不同的元素.

**命题意图** 本题考查集合元素的性质.

**分析** “若  $a \in A$  且  $a \neq 1$ , 则  $\frac{1}{1-a} \in A$ ” 是集合元素的唯一性质, 如何利用?

**证明** 由  $a \in A, a \neq 1$ , 则  $\frac{1}{1-a} \in A$  知

(1) 若  $2 \in A$ , 则  $\frac{1}{1-2} = -1 \in A$ , 于是  $\frac{1}{1-(-1)} = \frac{1}{2} \in A$ , 故集合  $A$  中至少还有 2 个元素.

(2) 假设集合  $A$  为单元素集, 则  $a = \frac{1}{1-a}$ , 所以

$$a^2 - a + 1 = 0$$

但此方程显然无解.

故  $a \neq \frac{1}{1-a}$ , 即  $a, \frac{1}{1-a}$  应是  $A$  中的不同元素, 从而  $A$  不是单元素集.

(3) 由  $a \in A, \frac{1}{1-a} \in A$ , 知

$$\frac{1}{1-\frac{1}{1-a}} = \frac{1-a}{-a} \in A$$

由(2)知  $a \neq \frac{1}{1-a}$ , 现在证明  $a \neq \frac{1-a}{-a}$ , 且  $\frac{1}{1-a} \neq \frac{1-a}{-a}$ 。

假设  $a = \frac{1-a}{-a}$ , 则  $a^2 - a + 1 = 0$ , 此方程显然无解, 所以

$$a \neq \frac{1-a}{-a}$$

同理知

$$\frac{1}{1-a} \neq \frac{1-a}{-a}$$

综上所述,  $a, \frac{1}{1-a}, \frac{1-a}{-a}$  互不相等, 故  $A$  中至少有三个元素。

► 点评 证本题的两个难点是:

(1) 对  $a \in A$  且  $a \neq 1$ , 则  $\frac{1}{1-a} \in A$  反复运用;

(2) 根据集合元素的互异性, 应证明  $a, \frac{1}{1-a}, \frac{1-a}{-a}$  互不相等。

【例7】 已知  $M = \{(x, y) | y = x + a\}$ ,  $N = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 2\}$ , 求使得等式  $M \cap N = \emptyset$  成立的实数  $a$  的取值范围。

命题意图 本题考查集合的运算与方程的关系。

分析  $M \cap N = \emptyset$ , 即是同时满足条件  $y = x + a$  和  $x^2 + y^2 = 2$  的  $x, y$  不存在,

即是方程组  $\begin{cases} y = x + a \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$  无解。

解  $M \cap N = \{(x, y) | (x, y) \in M, \text{且} (x, y) \in N\}$

$$= \left\{ (x, y) \left| \begin{cases} y = x + a \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases} \right. \right\}$$

故  $M \cap N = \emptyset$  等价于方程组

$$\begin{cases} y = x + a & \text{①} \\ x^2 + y^2 = 2 & \text{②} \end{cases}$$

无解。由①②联立消去  $y$ , 得关于  $x$  的一元二次方程  $x^2 + (x+a)^2 = 2$ , 即

$$2x^2 + 2ax + a^2 - 2 = 0 \quad \text{③}$$

问题又转化为一元二次方程③无实根, 故

$$\Delta = (2a)^2 - 4 \times 2 \times (a^2 - 2) < 0$$

由此解得  $a > 2$ , 或  $a < -2$ 。

故  $a$  的取值范围是集合  $\{a | a > 2, \text{或} a < -2\}$ 。

► 点评 以上解法体现了集合语言的转化思想, 为进一步巩固这种思想, 再看例8。

【例8】 对点集  $A = \{(x, y) | x = m, y = -3m + 2, m \in \mathbb{Z}\}$ ,  $B = \{(x, y) | x = n, y = a(n^2 - n + 1), n \in \mathbb{Z}\}$ , 求证: 存在惟一正整数  $a$ , 使得  $A \cap B \neq \emptyset$ 。

命题意图 本题考查集合的运算与方程的关系。

分析  $A \cap B \neq \emptyset$ , 即是方程组  $\begin{cases} y = -3x + 2 \\ y = a(x^2 - x + 1) \\ x \in \mathbf{Z} \end{cases}$  有解

解  $A = \{(x, y) \mid x = m, y = -3m + 2, m \in \mathbf{Z}\}$   
 $= \{(x, y) \mid y = -3x + 2, x \in \mathbf{Z}\}$

$B = \{(x, y) \mid x = n, y = a(n^2 - n + 1), n \in \mathbf{Z}\}$   
 $= \{(x, y) \mid y = a(x^2 - x + 1), x \in \mathbf{Z}\}$

$A \cap B \neq \emptyset$  等价于关于  $x, y$  的方程组:

$$\begin{cases} y = -3x + 2 & \text{①} \\ y = a(x^2 - x + 1) & \text{②} \end{cases}$$

有整数解。

由①②联立消去  $y$ , 得关于  $x$  的方程:

$$ax^2 - (a-3)x + (a-2) = 0 \quad \text{③}$$

问题又转化为③有整数解, 故

$$\Delta = (a-3)^2 - 4a(a-2) \geq 0$$

由此解得

$$\frac{1}{3} < (1 - 2\sqrt{7}) \leq a \leq \frac{1}{3}(1 + 2\sqrt{7}) \quad \text{④}$$

易知, 仅有正整数  $a=1, a=2$  满足④, 但  $a=1$  时,  $A \cap B = \emptyset$ ;  $a=2$  时,  $A \cap B = \{(0, 2)\} \neq \emptyset$ .

故仅有惟一的正整数  $a=2$  使  $A \cap B \neq \emptyset$ .

►点评 先探索整数  $a$  必须满足的条件 ( $\Delta \geq 0$ ),  $\frac{1}{3}(1 - 2\sqrt{7}) \leq a \leq \frac{1}{3}(1 + 2\sqrt{7})$ , 再对此范围内的正整数逐一验证, 看是否满足题设条件, 这种逐步缩小范围的技巧值得学习。

【例9】 已知  $A = \{x \mid y = \frac{1}{\sqrt{x-3}}\}$ ,  $B = \{y \mid y = x^2 + 2x + a\}$ , 若  $A \cap B = B$ , 求  $a$  的取值范围。

命题意图 本题考查集合元素的性质。

分析  $A$  的元素  $x$  应使  $\frac{1}{\sqrt{x-3}}$  有意义;  $B$  中的元素  $y$  应能使  $y = x^2 + 2x + a$ , 由此可写出  $A, B$ . 再结合可求出  $a$  的范围。

解  $A \left\{ x \mid y = \frac{1}{\sqrt{x-3}} \right\} = \{x \mid x > 3\}$

$$B = \{y | y = x^2 + 2x + a\} = \{y | y = (x+1)^2 + a - 1\} = \{y | y \geq a - 1\}$$

$$\text{又 } A \cap B = B \Leftrightarrow B \subseteq A$$

$\therefore a - 1 > 3$ , 即  $a > 4$  为所求

►点评 对集合的理解要注意其代表元素及其满足的性质, 本题中  $A, B$  分别是  $x$  和  $y$  的取值范围, 但同时, 它们又都是数集, 若  $C = \left\{ (x, y) \mid y = \frac{1}{\sqrt{x-3}} \right\}$ , 它所表示的应是函数  $y = \frac{1}{\sqrt{x-3}}$  图像上的点集(有序实数对), 完全有别于  $A, B$ 。

【例 10】在 100 名中学生中, 足球爱好者有 73 名, 乒乓球爱好者有 51 人, 若足球、乒乓球都爱好者有  $m$  人, 求  $m$  的最小值。

命题意图 本题考查有限集合  $A, B$  的  $A \cup B$  的元素个数与  $A, B$  及  $A \cap B$  的元素个数的关系式。

分析 由集合的韦恩图易知:

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B) \text{ (可阅读教材的阅读材料)}$$

解 设  $A, B$  分别表示足球爱好者和乒乓球爱好者的集合, 则由题意可知

$$\text{card}(A \cup B) \leq 100, \text{card}(A \cap B) = m$$

根据  $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$ , 得

$$\text{card}(A \cap B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cup B) \geq 73 + 51 - 100 = 24$$

故  $m$  的最小值为 24

►点评 设  $A, B$  是两个有限集合, 记  $\text{card}(A), \text{card}(B)$  分别表示  $A, B$  中元素的个数, 则

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$$

这是一个有用的计数公式, 可推广到三个甚至更多个集合的情形(常称为容斥原理)

## 能力训练

### 基础题

1. 1999 年全国高考试题 如图 1-2,  $I$  是全集,  $M, P, S$  分别为  $I$  的 3 个子集, 则阴影部分所表示的集合是 ( )。

A.  $(M \cap P) \cap S$

B.  $(M \cap P) \cup S$

C.  $(M \cap P) \cap \complement_I S$

D.  $(M \cap P) \cup \complement_I S$

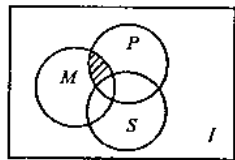


图 1-2

2. 已知全集  $U = \mathbf{R}$ ,  $C = \{x | x = a + b\sqrt{3}, a, b \in \mathbf{Q}\}$ , 则有 ( )。

- A.  $C_{\neq} C_U Q$       B.  $C_U Q \not\subseteq C$       C.  $C \not\subseteq Q$       D.  $C \not\supseteq Q$

3. 下列各命题正确的是( )。

A. 方程组  $\begin{cases} 2x+y=0 \\ y-3=0 \end{cases}$  的解集是  $\{x=-1, y=2\}$

B. 已知  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{x | x \subseteq A\}$ , 则  $A \in B$

C. 集合  $\{x | x^2 - 1 = 0, x \in \mathbf{R}\}$  是无限集合

D.  $\{正偶数\} \cap \{质数\} = \emptyset$

4. 全集为  $U$ , 若集合  $P \subset$  集合  $Q$ , 则下列关系正确的是( )。

A.  $C_U P \not\subseteq C_U Q$       B.  $C_U P \not\supseteq C_U Q$       C.  $P \cup Q = P$       D.  $P \cap Q = Q$

5. 集合  $M = \{(x, y) | x \cdot y \geq 0, x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$  表示的是( )。

- A. 第一象限的点      B. 第三象限的点  
C. 第一和第三象限的点      D. 不在第二象限且不在第四象限的点

6. 设全集  $U = \{x | x \in \mathbf{N}^*, \text{且 } x \leq 6\}$ ,  $P = \{1, 2, 4\}$ ,  $Q = \{4, 6\}$ , 则  $P \cap (C_U Q)$  是( )。

- A.  $\{1, 3\}$       B.  $\{2, 4\}$       C.  $\{1, 5\}$       D.  $\{1, 2\}$

7. 已知数集  $X = \{(2n+1)\pi, n \in \mathbf{Z}\}$ , 数集  $Y = \{(4k \pm 1)\pi, k \in \mathbf{Z}\}$ , 则它们之间的关系是( )。

- A.  $X \not\subseteq Y$       B.  $X \not\supseteq Y$       C.  $X = Y$       D.  $X \neq Y$

8. 1998年上海试题 设全集为  $\mathbf{R}$ ,  $A = \{x | x^2 - 5x - 6 > 0\}$ ,  $B = \{x | |x - 5| < a\}$  ( $a$  为常数), 且  $1 \in B$ , 则( )。

- A.  $C_{\mathbf{R}} A \cup B = \mathbf{R}$       B.  $A \cup C_{\mathbf{R}} B = \mathbf{R}$   
C.  $(C_{\mathbf{R}} A) \cup (C_{\mathbf{R}} B) = \mathbf{R}$       D.  $A \cup B = \mathbf{R}$

9. 设全集  $U = \mathbf{R}$ ,  $A = \{x | x \leq 4\sqrt{2}\}$ ,  $a = \frac{1}{3-2\sqrt{2}}$ , 则下列关系式正确的是( )。

- A.  $a \in A$       B.  $a \subseteq C_U A$       C.  $\{a\} \not\subseteq C_U A$       D.  $\{a\} \not\supseteq C_U A$

10. 设全集  $U = \mathbf{Z}$ , 集合  $A = \left\{n \mid \frac{n}{2} \in \mathbf{Z}\right\}$ ,  $B = \left\{n \mid \frac{n}{3} \in \mathbf{Z}\right\}$ , 则  $A \cap (C_{\mathbf{R}} B)$  是( )。

- A.  $\emptyset$       B.  $\{n | n = 4k \text{ 或 } n = 4k + 2, k \in \mathbf{Z}\}$   
C.  $\{n | n = 3k + 1, k \in \mathbf{Z}\}$       D.  $\{n | n = 6k \pm 2, k \in \mathbf{Z}\}$



### 综合题

11. 设  $A = \{\text{等腰三角形}\}$ ,  $B = \{\text{一边为1, 一内角为 } 48^\circ \text{ 的多边形}\}$ , 则  $A \cap B$  中的元素个数是( )。

- A. 1个      B. 2个      C. 3个      D. 4个

12. 某城市郊区对 200 户农民生活水平进行调查, 统计结果是: 有电脑的 128 户, 有手机的 162 户, 二者都有的 105 户, 则电脑和手机至少有一样的有( )。

- A. 162 户      B. 200 户      C. 196 户      D. 185 户

13. 设集合  $M = \{x | x = 3n, n \in \mathbf{Z}\}$ ,  $N = \{x | x = 3n + 1, n \in \mathbf{Z}\}$ ,  $P = \{x | x = 3n - 1, n \in \mathbf{Z}\}$ , 且  $a \in M, b \in N, c \in P$ , 设  $d = a - b + c$ , 则( )。

- A.  $d \in M$       B.  $d \in N$       C.  $d \in P$       D.  $d \in M \cup P$

14. 2000 年上海春季试题 如图 1-3, 设  $I$  是全集, 非空集合  $P, Q$  满足  $P \subset Q \subset I$ , 若含  $P, Q$  的一个集合运算表达式, 使运算结果为空集  $\emptyset$ , 则此运算表达式可以是\_\_\_\_\_ (只要写出一个表达式)

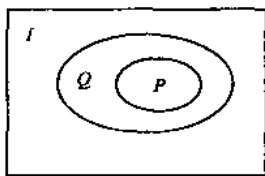


图 1-3

15. 集合  $A = \{x | ax^2 + 2x + 1 = 0, a, x \in \mathbf{R}\}$  有且仅有一个元素, 那么  $a$  的取值集合为\_\_\_\_\_。

16. 已知集合  $\{x | ax^2 + bx + c = 0, x \in \mathbf{R}, a \neq 0\} = \emptyset$ , 则  $a, b, c$  满足的条件是\_\_\_\_\_。

17. 设  $A, B, C$  都是  $\mathbf{R}$  的子集, 若  $A = \complement_{\mathbf{R}} B, B = \complement_{\mathbf{R}} C$ , 则  $A, C$  之间的关系为\_\_\_\_\_。

18. 若集合  $M = \{1, 3, x\}, N = \{x^2, 1\}$ , 且  $M \cup N = \{1, 3, x\}$ , 那么满足条件的  $x$  的取值的集合是\_\_\_\_\_。

19. 设  $A = \{x | x^2 - ax + 15 = 0\}, B = \{x | x^2 - 5x + b = 0\}$ , 又  $A \cap B = \{3\}$ , 求  $a, b$  及  $A \cup B$ 。

20. 已知  $(1, 2) \in A \cap B$ , 其中  $A = \{(x, y) | ax - y^2 + b = 0\}, B = \{(x, y) | x^2 - ay - b = 0\}$ , 试求  $a, b$  的值。

21. 就有关  $A, B$  两事, 向某班 50 名学生调查赞成与否, 赞成  $A$  的有 30 人, 其余均不赞成; 赞成  $B$  的有 33 人, 其余均不赞成, 另外, 对  $A, B$  均不赞成的学生数比对  $A, B$  都赞成的学生数的三分之一还多 1 人, 问对  $A, B$  都赞成的学生和都不赞成的学生各有多少人?

22. 已知  $A \cap \{-1, 0, 1\} = \{0, 1\}$ , 且  $A \cup \{-2, 0, 2\} = \{-2, 0, 1, 2\}$ , 求满足上述条件的集合  $A$  的个数。

23. 若关于  $x$  的方程  $(x+1)^2 = 2a+1$  和  $(x+2)^2 = 2ax$  中至少有一个方程有两个不等实根, 求实数  $a$  的集合。