JING JI SHU XUE JI CHU

——WEI JI FEN JI QI YING YONG

经济数学基础

——微积分及其应用

夏 勇 汪晓空 编著

清华大学出版社

经济数学基础——微积分及其应用

夏　勇　汪晓空　编著

清华大学出版社
北　京

内容简介

本书第 1 章～第 5 章为各专业学习所必需的微积分的基础知识，主要包括：函数、极限、一元函数微分、一元函数积分、二元函数微分和差分方程以及常微分方程；第 6 章为经济数学模型，提供了大量经济、管理和金融等方面经常出现的数学模型，包括：需求与供给模型，成本 - 收益 - 利润模型，最优化模型，经济中的边际与弹性、蛛网模型，管理中的批量模型，利息和资本增长模型等，为继续学习这些专业提供必备的数学背景知识。

本书可供经济、管理、财会、金融等专业的学生使用，也可作为《微积分》或《高等数学》课程的自学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

经济数学基础. 微积分及其应用/夏勇，汪晓空编著. —北京：清华大学出版社，2003
ISBN 7-302-07245-0

Ⅰ. 经… Ⅱ. ①夏… ②汪… Ⅲ. ①经济数学 - 高等数学 - 教学参考资料 ②微积分 - 高等数学 - 教学参考资料 Ⅳ. F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 082883 号

出 版 者：清华大学出版社　　**地　　址**：北京清华大学学研大厦
http://www.tup.com.cn　　**邮　　编**：100084
社 总 机：010-62770175　　**客户服务**：010-62776969
责任编辑：杜春杰
封面设计：秦　铭
版式设计：仝昌林
印 装 者：北京鑫海金澳胶印有限公司
发 行 者：新华书店总店北京发行所
开　　本：185×230　**印张**：24.5　**字数**：450 千字
版　　次：2003 年 11 月第 1 版　2003 年 11 月第 1 次印刷
书　　号：ISBN 7-302-07245-0/F・623
印　　数：1～5000
定　　价：29.00 元

前　言

数学是什么？回答这个问题并不容易。

数学被人们看作是一种高级语言，是符号的世界。伽利略的一段话颇为流传："宇宙是永远放在我们面前的一本大书，哲学就写在这本书上。但是，如果不首先掌握它的语言和符号，就不能理解它。这本书是用数学写的，它的符号是三角形、圆和其他图形，不借助于它们就一个字也看不懂，没有它们就只会在黑暗的迷宫中踯躅。"

数学是一门科学，而且是一门精密科学。夏尔斯·普罗特伊斯·斯泰因梅兹说："数学是最精密的科学，它的全部结论都能绝对地证明。但所以会如此只是因为数学并不试图得出绝对的结论。所有的数学真理都是相对的、有条件的。"爱因斯坦说："(但是)数学享有盛誉还有一个原因：正是数学给了各种精密自然过程一定程度的可靠性，没有数学，它们不可能获得这样的可靠性。"

数学是一种工具。恩斯特·马赫说："也许听起来奇怪，数学的力量在于它回避了一切不必要的思考和它惊人地节省了脑力的活动。"P·A·M 狄拉克说："数学是特别适于处理任何种类的抽象概念的工具，在这个领域中它的力量几乎是没有限度的。"

数学是模型。每一门数学学科都是一种模型，微积分是物体运动的模型，概率论是偶然与必然的模型，几何是现实空间的模型，非欧几何是超维空间的模型。S·麦克莱恩说："数学起源于人类各种各样的实践活动，从这些活动中抽象出许多一般的但不是任意的概念，然后将这些概念及他们之间的关系形式化。"

透过上述并不全面的种种对数学的看法，我们可以认为：数学是研究现实世界中数与形之间各种形式模型的结构的一门科学。通俗地说：数学是科学的语言，数学是一切科学技术的基础，数学是我们思考问题和解决问题的工具。

让全社会了解数学，让人们感到数学就在身边，这是十分艰巨而又不得不做的事情。数学教育要教给学生的不仅仅是数学知识，还应当培育学生的意识、兴趣和能力，让学生学会用数学的思维方式观察周围的事物，用数学的思维方法分析、解决实际问题。当代著名数学家、沃尔夫数学奖得主 P·D·拉克斯指出："在微积分里，学生可以直接体会到数学是确切表达科学思想的语言，可以直接学到科学是深远影响着数学发展的数学思想的源泉。最后，很重要的一点在于数学可以提供许多重要科学问题的光辉答案。"当代著名数学家、教育家、沃尔夫奖获得者 H·惠特尼这样说："学数学意味着什么？当然是希望能用它，……*最好的学习*

就是用,并且古今皆知仅在你自己有想法时才有真正的学习。”我们没有理由不赞同这些观点。

从小学、中学到大学,数学都一直是最受重视的课程,但是数学课程的教学效果却不能令人满意。原因是多方面的,其中之一就是:数学课程面临愈来愈大的缩减课时的压力,时间少、内容多导致教学中的很多矛盾,学生的学习兴趣也随之下降。为什么不可以这样认为:像许多其他的事情一样,学习、掌握并能灵活运用数学的方法也有多种多样?是不是一定要先透彻掌握数学理论然后再谈应用?学生为什么会对学习数学感到枯燥?与我们一直奉行的只讲数学的抽象定义、定理、证明的教学思路有没有关联?

就学习数学而言,从学习到应用不是一蹴而就的事情,没有充分地、有意识地培养、训练和实践,没有表达应用观点的教材,学生的应用意识、兴趣和能力是上不来的。

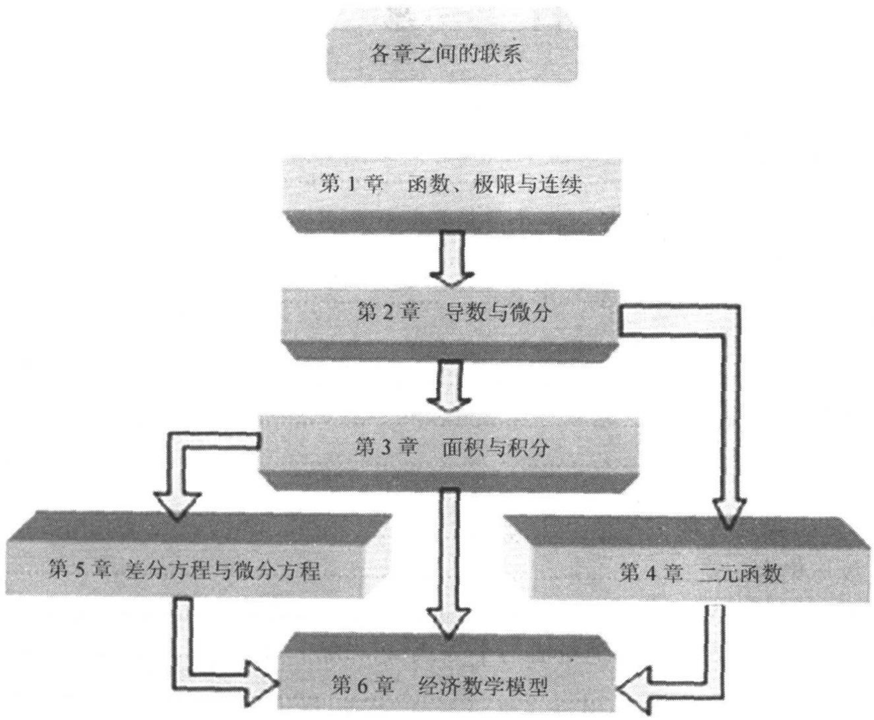
微积分是大学数学教育中最重要的基础课。经过三百多年的发展,这门课的基本内容已经定型,并且已经有了为数众多的教材(其中不乏优秀之作)。但是,可以说,在全世界范围内,人们仍然感到微积分的教和学都不是一件容易的事。

鉴于现有许多教材局限于剪裁内容以适合学时,罗列知识而不注意与现实相结合,同时考虑到经济、管理等学科的具体教学内容,我们决定编写这本针对经济、管理、财会、金融等专业的大学数学教材。本书不拘泥于每一细节的详尽的讨论,让初学者能够对微积分的全貌有一个轮廓性的认识,尽可能早一点学会利用微积分的方法和知识去解决一些实际问题,这是放在第一位的考虑;其次则是坚持启发性的原则并且立足于培养学生的能力。

本书所选内容基本涵盖了经济、管理等专业所用到的所有微积分知识,全部内容可在70学时~90学时内讲授完。本教材试图编出以下特点:

- 注意教材内容与中学数学的衔接,语言叙述浅显易懂,图文并举,有利于学生自学;
- 内容的选择以解决具体学科尤其是经济、管理和金融等专业实际遇到的问题为导向,以凸现实用性;
- 教材的内容划分为较为明显的两部分。第1章~第5章为各专业学习微积分的基础知识,主要内容是:函数、极限、一元函数微分、一元函数积分、二元函数微分和差分方程以及常微分方程,其中前3章是必须学习的内容;第6章为经济数学模型,提供了大量的经济、管理和金融等方面的经常出现的数学模型,内容有:需求与供给模型,成本-收益-利润模型,最优化模型,经济中的边际与弹性、蛛网模型,经济批量模型,利息和资本增长模型等,为学生继续学习这些专业提供必备的数学背景知识。各章之间的联系,如下图所示。
- 例题和习题编排丰富,布局合理。丰富的例题深浅适中,为学生提供理解和模仿的素材;每个知识点后面紧跟练习,边学边练;每章后面有大量的习题,提供思考与选择的素材,既为教师结合实际教学提供更大的选择空间,也为一些有意识强化训练自己数学技能的

学生提供了方便。这些练习和习题都附有参考答案。



教学过程是互动的,教材只是个载体,良好的教学效果有赖于老师、同学的共同努力。当然,同学们的努力至关重要。

由于编者的水平所限,本书的构思和编排还存在不妥之处,并且由于时间所限,部分练习和习题的校对也可能有疏漏的地方,衷心希望大家给予建议、批评和指正。

附注:

(1)编排第 0 章的初衷是提醒同学们注意数学是一门极其讲究逻辑的学科。关于"逻辑"的一些知识,在中学里也有零散的介绍,但是,学习这门课,它们显得更为必要。这部分内容可以在教师的指导下,让同学们自学,并且去阅读一些参考书。

(2)在学时较多的情况下,可以讲完全部内容;在学时较少的情况下,讲授前 3 章及第 5、6 章部分小节的内容也是必须的。

编者

2003 年 3 月

目　录

第 0 章　写 在 前 面

由学习初等数学转入学习微积分的过程中,对许多同学来说,一开始会有一些困难,甚至产生畏难情绪.究其原因,大体上有两个方面:一是每个同学对数学的理解不同,由于长期以应试教育为主,往往容易忽略数学基本素养的培养,基本功不够扎实;二是一些教材中微积分知识与中学数学知识之间衔接得不够理想,有些涉及到某些初等数学的内容,中学数学教学中没有讲到,或没讲透彻,而大学教师却认为同学们大概已经掌握了,因而一带而过,结果造成某些知识点或逻辑和思维方式上的薄弱现象.

本章旨在整理出一些我们似乎知道但又不很清楚而又十分重要的一些逻辑知识,强调这些知识在数学中的反映,以利于更好地掌握数学语言.另外,学习对象的变化常常会带来学习方法的变化,所以,本章还要概括性地介绍一些关于学习方法的问题,以弥补知识衔接过程中的不足.

0.1　逻辑与数学

如果说数学这门学科与其他学科有什么不同的话,除研究对象不同外,最为突出的就是对象内部规律的真实性必须用逻辑推理的方式来证明.

以逻辑推理的方式来证明对象内部规律的真实性,首先必须明确对象(object)是什么——概念(concept);其次内部规律必须以某种形式(form)表现出来——命题(statement);经推理证明(inference and proof)后得出结论——定理(theorem).因此,一个数学理论是由一套概念、命题以及命题的推理证明所组成的.

0.1.1　什么是逻辑

一天清晨,某人起床,开门向外一望,看见屋顶湿了,道路也湿了,连草木的叶子都湿了.他马上会想到:"唔,昨天夜里下过雨了!"

这是一个思考过程的例子.

我们认识世界离不开感觉(sensation)和知觉(perception).感觉就是客观对象的个别方面的特性在意识中的反映,知觉是各个物体或对象作为一个整体在头脑

中的反映.感觉和知觉都只是认识现实初步的而且是最简单的形状,它们是对个体对象的直觉(intuitive)形象.为了认识事物的内部联系,认识事物和现象发展变化的规律,人们必须把这些事物和现象的感觉及知觉在自己头脑中进行加工,即把重要的、本质的东西抽取出来,把事物和现象的联系或关系反映出来、表示出来.

我们头脑中的这种认知活动(cognitive activities),就是人们通常所说的思维(thinking).

在上面的例子中,大家都很清楚,当昨天夜里下雨的时候,这个人正在酣睡之中,他既没有看到雨滴,也没有听到雨声.而早晨已经是雨止云散,天气晴朗了.可见此人并没有直接感觉或知觉到雨.但是因为他知道"雨"和"屋顶、道路等变湿"有因果关系,所以能够依据他所见到的屋顶、道路等变湿了这一事实,作出"昨夜下过雨"这个论断来.换句话说,他是通过思维活动间接地认识到雨的.

但仅仅观察(observation)到某一次下雨曾招致屋顶、道路等变湿,还是不能作出任何结论(conclusion)的.还必须知道这种关系具有一般性质,即每次下过足够的雨量以后,屋顶、道路等必然变湿,也就是这个人必须概括他自己长期观察的结果.

思维活动有没有规律(law)可循呢? 如果承认客观事物是有规律地运动着和联系着,就必须承认:思维活动本身也是有规律的.千百年来,人们对思维规律的探求一直没有停止过,而且可能永远不会停止.人们已经发现:正确的思维必须是一种确定的、首尾一贯的、无矛盾的、有根据的思维!

逻辑学(Logic)就是关于思维规律的学问.一个没有学过逻辑学的人,他的行为和语言可能非常合乎逻辑,仅仅是词汇贫乏一点或者引经据典少一些而已.但是,人们必须遵循一定的逻辑规律来思考,才能正确地反映现实,才能正确地认识周围世界,才能掌握科学真理(truth).

0.1.2 逻辑思维的四条基本规律

从形式上来看,思维必须遵循以下四条基本规律:

1. 同一律

同一(identity)律的表现形式是:"甲是甲".也就是说,在进行诊断和推理过程中,每个概念都应当在同一的意义上来使用.

这个规律要求:每个概念指的应该是同一个对象.在同一时间内和同一关系下,它的意义应当是确定的、同一的.用同一概念表达不同对象或者用两个不同概念表达同一对象,都是违背同一律的.

2. 矛盾律

矛盾(contradiction)律的形式是:“甲不是非甲”.也就是说,同一对象在同一时间和同一关系下,不能具有两种相互矛盾的性质.

这个规律要求:在思维过程中,必须排除那些包含着自相矛盾的概念,比如“方的圆”、“错误的真理”、“不成立的定理”等,也就是说,不能前言不对后语.另外,两个相互矛盾的判断不可能都是真的,例如“a 是正数”和“a 是负数”不可能都是真的.

3. 排中律

排中律的形式是:“或者是甲,或者是非甲”.也就是说,同一对象在同一时间和同一关系下,或者具有某种性质,或者不具有某种性质,两者必居其一,不可能有第三种情形.

排中律的意义在于排除认识上的含糊不清(vague)与模棱两可(ambiguous),坚持原则,判别是非.例如:

“这本书是数学书”与“这本书不是数学书”,只能有一个是对的;

“凡直角都相等”与“有些直角不相等”,只能有一个是正确的;

“数 a 是正数”与“数 a 是非正数”只能有一个是对的.

4. 充足理由律(或者叫“因果律”)

充足理由律的形式是:“所以有乙,是因为有甲”.也就是说,特定事物之所以具有某种性质,是因为它有着现实的依据,为一定的先行于它的条件所决定.

这个规律要求:在进行思维的过程中,必须有充足的依据.任何论断(argument)或者论证,只有当它具有充分的依据(evidence),也就是具有充足的理由(reason)时,才可能是合乎逻辑的、正确的.否则,就会出现所谓信口雌黄,甚至胡说八道、自欺欺人的谎言和谬论.

通常,可以用作判断的论证根据的充足理由有 3 个来源:

(1)明显的事实(evident facts).如“一个人有两只手”、“日出东方”等,都是明显的事实.

(2)公理(axiom).公理就是不加证明而公认是正确的命题.如“全量大于部分量”、“等量加等量,和相等”、“两个量等于第三量,则此两量相等”等.公理的真实性源于人类实践活动中的千万次检验,因而是无可怀疑的.

(3)既得规律、原理(principle)的学说.在各种学科中,特别是在数学中,经常凭借大道理推出小道理,凭借旧的、已被证实的定理、法则推证新的、前所未有的

命题.

总之,“四律”指出:在“正常思维”下,从准确条件必能推出准确结论.

0.1.3 逻辑思维的三种基本形式

逻辑思维通常借助三种基本形式来实现,即概念、判断和推理.

1. 概念

概念(concept)是反映客观对象的一般的、本质属性的思维形式.所谓本质属性,即一种对象所独有,而其他对象所没有.

表达概念的语言形式一般是:“……叫做(称为)……”.比如:矩形的概念是“一个角为直角的平行四边形”.

每一个概念都有一定的外延和内涵.概念的外延就是适合于那个概念的一切对象的范围;概念的内涵就是包括那个对象的一切对象的本质属性的总和.通常,用给一个概念下定义(definition)来揭示这个概念的内涵.以“平行四边形”的概念为例,平行四边形的外延,是指所有的平行四边形;平行四边形的内涵,是指所有的平行四边形所共有的本质属性.拿“平行四边形”和“矩形”这两个概念进行比较,可以发现:平行四边形的内涵加上“一个角为直角”这个独有属性,就是矩形的概念,即扩大了内涵;同时,矩形的外延又比平行四边形的外延要小.

如果是基本概念(比如数、量、直线、集合等),就应当用叙述法来描述;其他的概念都必须借助基本概念以及已经定义过的概念来加以定义.借助于正面的(是什么)和反面的(不是什么)来反复思考,就可以获得对对象的清晰的认识.

每一个名词,当已经建立起关于它的正确定义后,就应该不论在什么地方都以这种意义来解释.

如果不把概念弄清楚,就不可能掌握数学知识,就会在解题中犯错误.

2. 判断

判断(judgement)表述出所思考的对象具有某种属性,或者不具有某种属性.判断是概念与概念的联系.

数学的判断通常称为命题(statement).由于命题表达的是判断,而判断实质上仅仅是人们对客观对象的认识,这个认识未必全面,甚至未必正确,因此是有待于证明的,或者说,一个命题是不一定成立的.

如果命题的真实性是根据公理或者其他已知为正确的命题经过逻辑的推证(即通过演绎推理)而证明出来的,就叫做定理.换而言之,定理就是正确的命题.

数学命题大都表示成:

“如果 A,那么 B” 或者“若 A,则 B”

这里,“如果 A”是命题的条件(condition)(或前提),“那么 B”是命题的结论(conclusion).对于每一个所讨论的命题,必须分清条件是什么,结论是什么.讨论命题的种种形式,就是为了从各个方面来研究数学概念之间的关系,并能够推陈出新:从一个已知的命题推出新的命题.

在命题中条件与结论的关系通常有 3 种情形:

(1)“若 A 则 B”指出条件 A 是结论 B 成立的充分条件(sufficient condition);

(2)“若不 A 则不 B”指出条件 A 是结论 B 成立的必要条件(necessary condition);

(3)“若 A 则 B,同时,若不 A 则不 B”指出条件 A 是结论 B 成立的充分而且必要的条件(sufficient and necessary condition),也就是“当且仅当”(if and only if).

每一个命题都是在一定的条件下才能成立的.在学习中,应当经常考虑这样的问题“这个条件是不是足够的?”、“这个条件是不是多余的?”、“如果条件稍稍改变了,结论会变得怎样?”久而久之,分析问题的能力一定会提高.

3. 推理

推理(reasoning)是指用两个或多个判断来获得一个新判断的过程.它是判断与判断的联合.

通过推理,可以获得新知识.

任何一个新的判断,总是从某几个个别的判断推演出来的.那几个个别的判断叫做前提,而这个新判断叫做结论.

经常使用的推理有两种方法:一种称为演绎(deduction)推理,即以一般的原理、原则为前提,推演到某个特殊的场合而作出结论的方法;另一种称为归纳(induction)推理,即以若干个特殊场合的情况为前提,推广到一个一般性的原理、原则作为结论的方法.例如:

王同学说:“我以前每次将球抛向天空,它都会落下来,我想,下一次我向上抛球,它一定还会落下来.”

李同学说:“按照牛顿的自由落体定律,上抛的物体要受到地心引力的影响,一定会落下,所以,你下一次向上抛球,它肯定要落下.”

这里,王同学使用了归纳推理,而李同学使用了演绎推理.

推理过程随处可见,有些很简单,有些则异常复杂.比如,如果铅笔在文具盒里,而文具盒放在书包里,那么铅笔一定在书包里;如果铅笔不在文具盒里,文具盒不在书包里,那么铅笔一定不在书包里.又比如,凡 15 的倍数都是 3 的倍数,凡 15 的倍数都是 5 的倍数,那么一定有一些数是 5 的倍数的同时也是 3 的倍数.很多数

学定理中包含着相当复杂的推理过程.

就演绎推理而言,如果基本事实或者前提是正确的,则得出的结论也必然正确,这是逻辑学中的一个非常重要的论点!同时也应该看到,许多论点看起来合乎逻辑其实不然.

合乎逻辑的正确推理的主要形式是(图0.1):

所有的 A 都是 B,

所有的 B 都是 C,

因此所有的 A 都是 C.

在逻辑上,语句"所有的 A 都是 B"被称为大前提;语句"所有的 B 都是 C"被称为小前提;大前提和小前提都称为"前提(premise)".语句"因此所有的 A 都是 C"被称为结论.这种推理形式称为**三段式**(syllogism)推理.

对于三段式推理形式,一般地说,正确的大前提能够得出正确的结论.比如:

所有的蚂蚁(A)都是昆虫(B),

所有的昆虫(B)都是六条腿的(C),

因此所有的蚂蚁(A)都是六条腿的(C).

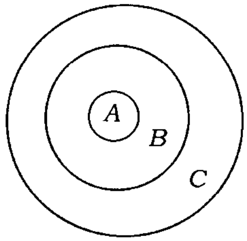


图0.1 正确的推理形式

这是正确的推理,因为前提"所有的蚂蚁(A)都是昆虫(B)"和"所有的昆虫(B)都是六条腿的(C)"都正确.又比如:

所有的偶数都能被2整除.(大前提)

256是个偶数.(小前提)

所以,256能被2整除.(结论)

但是,如果前提是不正确的,那么这种推理不仅站不住脚,而且常常是荒谬的.比如:

所有的浆果都是美味的,

毒茄是一种浆果,

因此毒茄是美味的.

虽然这里推理的形式是正确的,但是由于前提"所有的浆果都是美味的"错误,导致结论"毒茄是美味的"错误.因此我们应当养成习惯:当听到或看到某些论点时,必须检查一下它的大前提是否正确.

下面这种推理形式本身就是错误的(图0.2):

所有的 B 都是 C，

A 是一个 C，

因此 A 是一个 B.

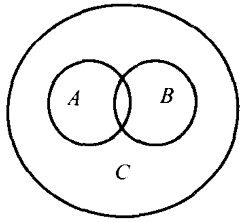


图 0.2　一种错误的推理形式

其实，我们只能得出"A 可能是一个 B"的结论！比如：

所有的老鼠都是四条腿的，

所有的大象都是四条腿的，

因此所有的老鼠都是大象.

很明显，结论"所有的老鼠都是大象"是错误的.

相对于合乎逻辑的正确推理形式，这里的错误的推理形式还是比较容易识别的.

还有一种值得注意的含有猜测成分的推理模式，称为合情推理(plausible reasoning)，它的一般格式是：

$$\begin{array}{c}\text{命题 } A \text{ 真，则命题 } B \text{ 真}\\ \text{命题 } B \text{ 本身很不像是可靠的}\\ \text{现在，} B \text{ 真}\\ \hline \text{命题 } A \text{ 极为可靠}\end{array}$$

以及

$$\begin{array}{c}\text{命题 } A \text{ 真，则命题 } B \text{ 真}\\ \text{命题 } B \text{ 本身像是十分可靠的}\\ \text{现在，} B \text{ 真}\\ \hline \text{命题 } A \text{ 只是多了一点可靠性}\end{array}$$

归纳推理也叫归纳法. 它是借助对大量偶然性的事实的观察，从中发现具有一般性的结论的推理方法. 归纳推理的分类大体如下(表 0.1).

表 0.1

归纳推理	完全归纳法	
	不完全归纳法	枚举的归纳(普通归纳法)
		科学的归纳法

注意：在数学中，经常会遇到推证一组无穷多个事物必有某种公共性质，这时往往采取所谓的"数学归纳法"，它本质上仍然属于演绎推理的范畴. "不完全归纳法"是指从一个或几个(但不是全部)特殊情况作出一般性结论的归纳推理方法. 这种推理方法对于寻找事物发生的原因以及产生新的科学命题(包括猜想)是极有帮

助的.下面举两例进行说明

例 0.1 观察两个一元二次方程,发现

方程 $x^2-2x-3=0$ 有两个根:3 和 -1;(第一种情况)

方程 $x^2-3x=0$ 有两个根:0 和 3;(第二种情况)

对于这两个方程,它们的两个根之和是一次项系数的相反数($3+(-1)=2;0+3=3$),而两个根之积为方程的常数项($(3)(-1)=-3,(0)(3)=0$).就此可得出结论:凡二次项系数为 1 的一元二次方程,其两根之和等于一次项系数的相反数;两根之积等于常数项.这就是在进行归纳推理.更进一步,猜测出了韦达定理.

例 0.2 哥德巴赫(Goldbach)猜想

哥德巴赫于 1742 年写信给当时的大数学家欧拉,提出一个命题:任何偶数,由 4 开始,都可以化成两个质数(素数)之和的形式;任何奇数,由 7 开始,都可以化成三个质数(素数)之和的形式.这就是著名的迄今尚未得以证实的哥德巴赫猜想.

其实,这个命题是从这样的观察开始的:

$$
\begin{array}{rr}
4=2+2 & 7=2+2+3 \\
6=3+3 & 9=3+3+3 \\
8=3+5 & 11=3+3+5 \\
10=3+7 & 13=3+5+5 \\
12=5+7 & 15=3+5+5 \\
\vdots & \vdots
\end{array}
$$

应当注意的是:归纳推理得到的结论是否正确,必须由演绎推理来证明.例 1 的结论是很容易证实的,但例 2 的结论是对还是错,人们至今仍然不知道.

0.1.4 关于证明

无论是学习数学还是应用数学,都离不开证明(proof).尤其是在理解定理的过程中,从前提条件到最后的结论,要运用大量的推理过程,我们称它们为证明过程(proving).那么,具体一点,什么是证明?

所谓证明,是指在有了明确结论的情况下,寻找依据,通过推理来确定结论的真伪这样一个演绎推理过程.

一般地说,只要将试图表明的事情叙述准确,并符合逻辑且具有前后的一致性,这就是证明.

怎么样的论断才算得上是证明?想象一下调皮而聪明的小妹妹唠唠叨叨地问这问那:"为什么是这样?你是怎么知道的?"假如你回答说那是显而易见的,她又