面向新世纪课程教材

Textbook Series for the New Century

大学物理学

第二版

习题分析与题解

王少杰 顾 牡 等编

同济大学出版社

面　向　新　世　纪　课　程　教　材
Textbook Series for the New Century

大学物理学

第二版

习题分析与题解

编者(按章节次序)　章南陵　王少杰　刘海兰　毛骏健
于明章　吴天刚　顾　牡

同济大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

大学物理学(第二版):习题分析与题解/王少杰等编.
—上海:同济大学出版社,2003.2
ISBN 7-5608-2554-0

Ⅰ.大… Ⅱ.王… Ⅲ.物理学—高等学校—题解
Ⅳ.04-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 103964 号

大学物理学(第二版)
——习题分析与题解

王少杰等编

责任编辑 张智中 **责任校对** 郁 峰 **封面设计** 陈益平

出 版 发 行	同济大学出版社
	(上海四平路 1239 号 邮编 200092 电话 021-65985622)
经 销	全国各地新华书店
印 刷	江苏大丰印刷二厂印刷
开 本	787mm×960mm 1/16
印 张	16.75
字 数	335000
印 数	1—8000
版 次	2003 年 2 月第二版 2003 年 2 月第一次印刷
书 号	ISBN 7-5608-2554-0/O·228
定 价	21.00 元

前　　言

本书是承应广大师生(包括使用本书主教材的兄弟院校师生)的需求,根据王少杰、顾牡、毛骏健主编的《大学物理学》(第二版)一书中的习题而作的分析与题解。

《大学物理学》是非物理类专业大学生的一门重要基础理论课程,由于许多物理问题的概念性、理论性、技巧性较强,又需以高等数学为工具,运用物理学的基本概念和规律去分析和解决问题,学生普遍反映这门课程较难掌握。

为适应培养新世纪具有基础扎实,富有创新意识和能力的各类专门人才的需要,本书试图通过对习题中具体物理问题的剖析,力求学生能对相关的物理学基本概念和规律有进一步的认识,并结合解题方法和技巧的介绍和运用,触类旁通,举一反三,以拓宽学生分析问题、解决问题的思路,从而在对物理概念和规律的认识上产生新的飞跃。编者企望本书能对相关读者有所收益和帮助。

本书由章南陵、王少杰、刘海兰、毛骏健、于明章、吴天刚、顾牡等老师编撰,最后经王少杰统稿和定稿。

本书是在教育部工科物理教学基地的资助下完成的。出版过程中始终得到同济大学物理系、物理教研室广大教师及同济大学出版社领导、总编的热情关注和支持,姜敬东百忙中为本书精心绘制了部分插图,在此一并致谢。

由于学识水平和经验所限以及时间仓促,书中错误及不到之处在所难免、敬请使用本书的读者批评指正。

编　者

2002 年 12 月于同济瑞安楼

目　　录

第一篇　力学

第一章　质点运动学

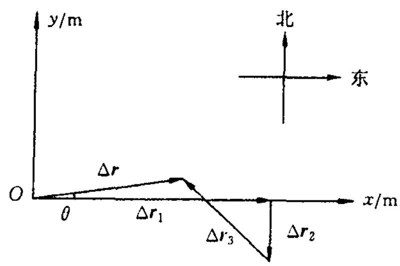
1-1　一人自原点出发，25s 内向东走 30m，又 10s 内向南走 10m，再 15s 内向正西北走 18m。求：

(1) 位移和平均速度；

(2) 路程和平均速率。

［分析］　要区分位移与路程、平均速度与平均速率概念的差异，只有在单向直线运动中位移与路程、平均速度与平均速率在数值大小上相等。显然本题中它们在数值大小上是不等的。位移、平均速度是矢量，所以还要求出相应的方向。

［解］　根据题意如解 1-1 图建立 Oxy 平面直角坐标系，并标出每一时段相应的位移矢量 $\Delta \boldsymbol{r}_1$、$\Delta \boldsymbol{r}_2$、$\Delta \boldsymbol{r}_3$ 和合位移 $\Delta \boldsymbol{r}$。



解 1-1 图

(1) $\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3$

$$= 30 + 0 - 18\cos 45° = (30 - 9\sqrt{2})\text{m}$$

$$\Delta y = \Delta y_1 + \Delta y_2 + \Delta y_3$$

$$= 0 - 10 + 18\sin 45° = (9\sqrt{2} - 10)\text{m}$$

所以位移大小为：$|\Delta \boldsymbol{r}| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = 17.5\text{m}$

$$\theta = \arctan\frac{\Delta y}{\Delta x} = \arctan(0.1581) = 9°$$

方向为东偏北 9°

平均速度大小为：$|\bar{\boldsymbol{v}}| = \dfrac{|\Delta \boldsymbol{r}|}{\Delta t} = \dfrac{17.5}{25+10+15} = 0.35\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

方向与 $\Delta \boldsymbol{r}$ 相同，即东偏北 9°

(2) 路程：$\Delta s = 30 + 10 + 18 = 58.0\text{m}$

平均速率：$\bar{v} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{58}{50} = 1.16\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

1-2　质点作直线运动，其运动方程为 $x=12t-6t^2$（式中 x 以 m 计，t 以 s 计），求：

(1) $t=4\text{s}$ 时，质点的位置、速度和加速度；

(2) 质点通过原点时的速度；

(3) 质点速度为零时的位置；

(4) 作 x-t 图，v-t 图和 a-t 图。

[分析]　因为是直线运动，所以可用代数式计算替代矢量运算。从位置矢量与速度、加速度的关系式得出 $v(t)$ 和 $a(t)$，用 $v(t)$ 和 $a(t)$ 可求出特定时间或特定位置的相关量值。再对 $x(t)$，$v(t)$，$a(t)$ 函数作一函数性质判断，能方便、准确地作出相应曲线。

[解]　(1)
$$x=12t-6t^2 \tag{①}$$

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=12-12t \tag{②}$$

$$a=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-12 \tag{③}$$

当 $t=4\text{s}$ 时得

$$x=12\times4-6\times4^2=-48\text{m}$$

$$v=12-4\times12=-36\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$a=-12\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

(2) 质点通过原点时，$x=0$，代入运动方程得

$$12t-6t^2=0$$

解此式得到质点通过原点的时刻为 $t_1=0$，$t_2=2\text{s}$，代入方程②中，分别得到

$$v_1=12\text{m}\cdot\text{s}^{-1},\ v_2=-12\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

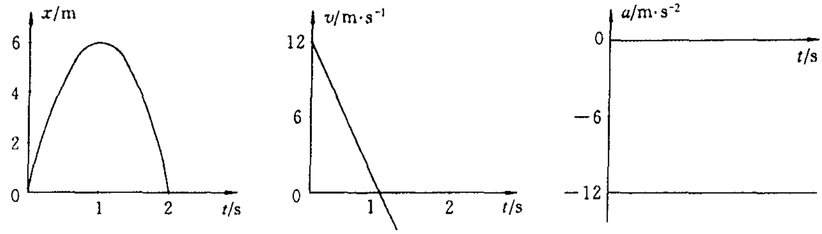
(3) 令 $v=0$，代入②式得

$$12-12t=0$$

由此解得 $t=1\text{s}$，代入①式得此时质点位置

$$x=12-6\times1=6\text{m}$$

(4) 由质点的位移、速度和加速度表示式可知质点作匀变速直线运动。其中 x-t 图、v-t 图、a-t 图分别如解 1-2 图所示。



解 1-2 图

1-3　质点沿直线运动，速度 $v=(t^3+3t^2+2)\mathrm{m\cdot s^{-1}}$，如果当 $t=2\mathrm{s}$ 时，$x=4\mathrm{m}$，求 $t=3\mathrm{s}$时质点的位置、速度和加速度。

［分析］　由给出条件对已知的速度函数求导和积分可得出 $a(t)$、$x(t)$，从而可得特定时刻的 x,v,a。

［解］　因为是直线运动，所以有

$$x=\int v\mathrm{d}t=\left(\frac{1}{4}t^4+t^3+2t+x_0\right)\mathrm{m}$$

将 $t=2\mathrm{s}$ 时，$x=4\mathrm{m}$ 代入上式得 $x_0=-12\mathrm{m}$ 则

$$x=\left(\frac{1}{4}t^4+t^3+2t-12\right)\mathrm{m}$$

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=(3t^2+6t)\mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

将 $t=3\mathrm{s}$ 代入位置、速度和加速度表示式，分别得

$$x=\frac{1}{4}\times3^4+3^3+2\times3-12=41.25\mathrm{m}$$

$$v=3^3+3\times3^2+2=56\mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

$$a=3\times3^2+6\times3=45\mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

1-4　已知质点的运动方程

$$x=\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{4}t,\quad y=\sin\frac{\pi}{4}t$$

（式中 x,y 以 m 计，t 以 s 计）。

（1）求质点的轨道方程，并在 xy 平面上描画出质点的轨道；

（2）求出质点的速度和加速度表示式；

（3）求 $t=1\mathrm{s}$ 时质点的位置、速度和加速度。

［分析］ 这是质点的平面运动，已知 x 和 y 方向的运动分量式，消去参数 t，可得质点的轨道方程。因为不是直线运动，所以不仅要求出速度、加速度的大小还要求出它们的方向，或用矢量式表示。

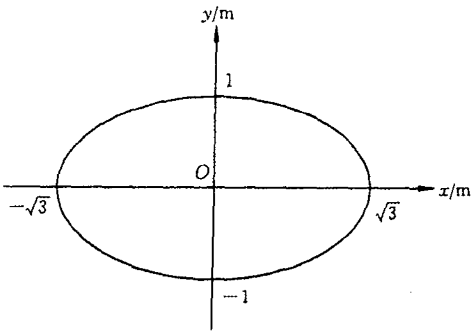
［解］（1）已知质点的运动方程

$$x=\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{4}t \tag{①}$$

$$y=\sin\frac{\pi}{4}t \tag{②}$$

由①、②式得

$$\frac{x^2}{3}+y^2=1$$



解 1-4 图

上式为质点运动的轨道方程，其轨道在 xy 平面上为一椭圆，如解 1-4 图所示。

（2）由质点的运动方程可求得

$$v_x=\frac{dx}{dt}=-\frac{\sqrt{3}}{4}\pi\sin\frac{\pi}{4}t \tag{③}$$

$$v_y=\frac{dy}{dt}=\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}t \tag{④}$$

$$a_x=\frac{dv_x}{dt}=-\frac{\sqrt{3}}{16}\pi^2\cos\frac{\pi}{4}t \tag{⑤}$$

$$a_y=\frac{dv_y}{dt}=-\frac{\pi^2}{16}\sin\frac{\pi}{4}t \tag{⑥}$$

$$\boldsymbol{v}=\left[\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\pi\sin\frac{\pi}{4}t\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}t\right)\boldsymbol{j}\right]\mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

$$\boldsymbol{a}=\left[\left(-\frac{\sqrt{3}}{16}\pi^2\cos\frac{\pi}{4}t\right)\boldsymbol{i}+\left(-\frac{\pi^2}{16}\sin\frac{\pi}{4}t\right)\boldsymbol{j}\right]\mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

（3）当 $t=1\mathrm{s}$ 时，由以上各式得

$$x=\frac{\sqrt{6}}{2}\mathrm{m}\quad y=\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{m}\quad \boldsymbol{r}=\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\boldsymbol{i}+\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{j}\right)\mathrm{m}$$

$$v_x=-\frac{\sqrt{6}}{8}\pi\mathrm{m\cdot s^{-1}}\quad v_y=\frac{\sqrt{2}}{8}\pi\mathrm{m\cdot s^{-1}}\quad \boldsymbol{v}=\left(-\frac{\sqrt{6}}{8}\pi\boldsymbol{i}+\frac{\sqrt{2}}{8}\pi\boldsymbol{j}\right)\mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

$$a_x=-\frac{\sqrt{6}}{32}\pi^2\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}\quad a_y=-\frac{\sqrt{2}}{32}\pi^2\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}\quad \boldsymbol{a}=\left(-\frac{\sqrt{6}}{32}\pi^2\boldsymbol{i}-\frac{\sqrt{2}}{32}\pi^2\boldsymbol{j}\right)\mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

或

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

$\boldsymbol{v}$ 与 x 轴之间的夹角为 $\theta=\arctan\dfrac{v_y}{v_x}$

又因 $v_x<0, v_y>0$，则 $\theta=\arctan\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)=\dfrac{5}{6}\pi$

$$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2}=\frac{\sqrt{2}}{16}\pi^2\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

$\boldsymbol{a}$ 与 x 轴之间的夹角 $\alpha=\arctan\dfrac{a_y}{a_x}$，又因 $a_x<0, a_y<0$，则

$$\alpha=\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{7}{6}\pi$$

1-5 质点在 xy 平面上运动，运动方程为

$$x=3t+5,\ y=\frac{1}{2}t^2+3t-4$$

（式中 x,y 以 m 计，t 以 s 计）

（1）以时间 t 为变量，写出质点位置矢量的表达式；

（2）描画质点的运动轨道；

（3）求 $t=1\mathrm{s}$ 时和 $t=2\mathrm{s}$ 时的位置矢量，计算这一秒内质点的位移；

（4）求 $t=4\mathrm{s}$ 时质点的速度和加速度。

[分析] 依据位置矢量、运动方程、位移、速度、加速度的定义求解。

[解] （1）因为 $x=3t+5,\quad y=\dfrac{1}{2}t^2+3t-4$

所以

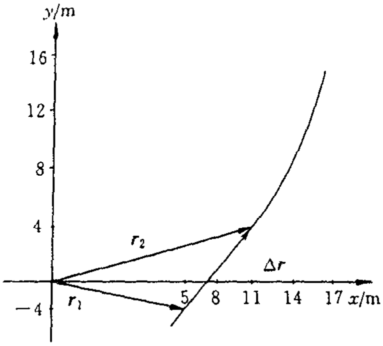
$$\boldsymbol{r}=\left[(3t+5)\boldsymbol{i}+\left(\frac{1}{2}t^2+3t-4\right)\boldsymbol{j}\right]\mathrm{m}$$

（2）$t=0\quad x=5\quad y=-4$

$t=1\quad x=8\quad y=-0.5$

$t=2\quad x=11\quad y=4$

$t=3\quad x=14\quad y=9.5$



解 1-5 图

$t=4\quad x=17\quad y=16$

质点的运动轨道如解 1-5 图。

(3) $\boldsymbol{r}_1=(8\boldsymbol{i}-0.5\boldsymbol{j})\mathrm{m}$，　$\boldsymbol{r}_2=(11\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j})\mathrm{m}$

$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1=(3\boldsymbol{i}+4.5\boldsymbol{j})\mathrm{m}$$

(4) $v_x=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=3\mathrm{m\cdot s^{-1}}, v_y=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=(t+3)\mathrm{m\cdot s^{-1}}$

$$t=4\mathrm{s}, v_x=3\mathrm{m\cdot s^{-1}}, v_y=7\mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=7.6\mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

v 与 x 轴之间的夹角 $\theta=\arctan\dfrac{v_y}{v_x}=66°48'$ 或 $\boldsymbol{v}=(3\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j})\mathrm{m\cdot s^{-1}}$

$$a_x=0, a_y=1\mathrm{m\cdot s^{-2}},\quad a=a_y=1\mathrm{m\cdot s^{-2}}\text{或 }\boldsymbol{a}=1\boldsymbol{j}\mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

$\boldsymbol{a}$ 沿 y 轴正方向。

1-6　一人乘摩托车跳越一个大矿坑，他以与水平成 22.5° 夹角的初速度 $65\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 从西边起跳，准确地落在坑的东边。已知东边比西边低 70m，忽略空气阻力。问：

(1) 矿坑有多宽？他飞越的时间多长？

(2) 他在东边落地时的速度多大？速度与水平面的夹角多大？

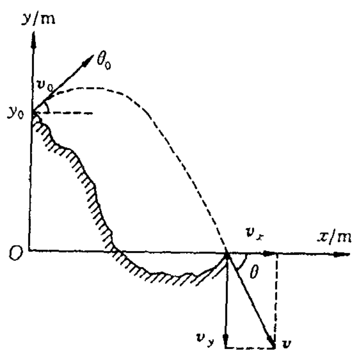
[分析]　这是抛体运动，根据运动叠加原理可以分解成水平方向匀速直线运动和竖直上抛运动处理。落地时的速度可由落地时的水平方向及竖直方向速度合成而得。

[解]　根据题意，建立 Oxy 坐标系，如解 1-6图。

(1) 以摩托车和人作为一质点，其运动方程为

$$\begin{cases}x=v_0\cos\theta_0 t & ①\\ y=y_0+v_0\sin\theta_0 t-\dfrac{1}{2}gt^2 & ②\end{cases}$$

$$\begin{cases}v_x=v_0\cos\theta_0 & ③\\ v_y=v_0\sin\theta_0-gt & ④\end{cases}$$



解 1-6 图

当到东边落地点时，$y=0$，故由②式得

$$\frac{1}{2}gt^2-v_0\sin\theta_0 t-y_0=0$$

以 $y_0=70\text{m}$,$g=9.8\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$,$v_0=65\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$,$\theta_0=22.5°$代入,解得飞越矿坑时间为 $t=7.1\text{s}$(另一负根舍去)。

矿坑的宽度求出为

$$x=v_0\cos\theta_0 t=65\times\cos22.5°\times7.1=426\text{m}$$

(2) 东边落地时,$t=7.1\text{s}$,其速度

$$v_x=v_0\cos\theta_0=65\times\cos22.5°=60.1\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$v_y=v_0\sin\theta_0-gt=65\times\sin22.5°-9.8\times7.1=-44.7\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

于是 $v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{(60.1)^2+(-44.7)^2}=74.9\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$(落地点速度的量值)

$$\theta=\arctan\frac{v_y}{v_x}=\arctan\frac{-44.7}{60.1}\approx-36.6°\text{(与水平面的夹角)}$$

1-7 质点沿直线运动,加速度 $a=(4-t^2)\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$,如果当 $t=3\text{s}$ 时,$x=9\text{m}$,$v=2\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$,求质点的运动方程。

[分析] 直线运动 $a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$,$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$。所以已知 $a(t)$,可用积分求出 $v(t)$,再次积分得 $x(t)$。由所给定的初始条件确定积分常数。

[解] 由加速度表示式积分得

$$v=\int a\mathrm{d}t=4t-\frac{1}{3}t^3+v_0 \quad ①$$

$$x=\int v\mathrm{d}t=2t^2-\frac{1}{12}t^4+v_0t+x_0 \quad ②$$

将 $t=3\text{s}$ 时,$x=9\text{m}$,$v=2\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$代入①、②式,解得 $v_0=-1\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$,$x_0=0.75\text{m}$,再代入①、②式后得

$$v=\left(4t-\frac{1}{3}t^3-1\right)\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$x=\left(2t^2-\frac{1}{12}t^4-t+0.75\right)\text{m}$$

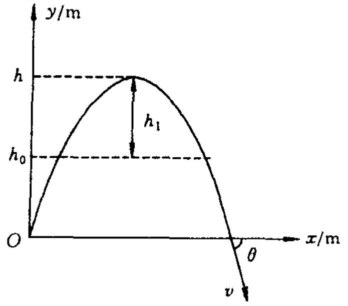
1-8 从地面向空中抛出一球,观察到它在 14.7m 高处的速度 $v=(3.98\boldsymbol{i}+9.8\boldsymbol{j})\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$($x$ 轴沿水平方向,y 轴沿竖直方向)。当忽略空气阻力时,求:

(1) 球能上升的总高度;

(2) 球所经过的总的水平距离；

(3) 球落地时速度的大小和方向。

[分析]　抛体问题，依然抓住水平方向是匀速直线运动、竖直方向是上抛运动这个特点处理。



解 1-8 图

[解]　据题意，建立 Oxy 坐标系，如解 1-8 图。

$h_0=14.7\mathrm{m}$ 时 $\boldsymbol{v}_0=(3.98\boldsymbol{i}+9.8\boldsymbol{j})\mathrm{m\cdot s^{-1}}$

$v_{x0}=3.98\mathrm{m\cdot s^{-1}}$　$v_{y0}=9.8\mathrm{m\cdot s^{-1}}$

(1) $h_1=\dfrac{v_{y0}^2}{2g}=\dfrac{9.8^2}{2\times 9.8}=4.9\mathrm{m}$

球能上升的总高度

$$h=h_0+h_1=14.7+4.9=19.6\mathrm{m}$$

(2) 由 $h=\dfrac{1}{2}gt^2$ 得出球从抛出到最高处所需时间

$$t=\sqrt{\frac{2h}{g}}=\sqrt{\frac{2\times 19.6}{9.8}}=2\mathrm{s}$$

球从抛出到落回地面经历时间 $2t$，球经过水平距离为

$$s=v_{x0}\cdot 2t=3.98\times 2\times 2=15.9\mathrm{m}$$

(3) 球落地时水平速度不变 $v_x=v_{x0}=3.98\mathrm{m\cdot s^{-1}}$

竖直速度　$v_y=-\sqrt{2gh}=-\sqrt{2\times 9.8\times 19.6}=-19.6\mathrm{m\cdot s^{-1}}$

球落地时速度大小　$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{3.98^2+(-19.6)^2}=20.0\mathrm{m\cdot s^{-1}}$

与 x 轴夹角　$\theta=\arctan\dfrac{v_y}{v_x}=\arctan\dfrac{-19.6}{3.98}=-78.5^\circ$

1-9　一升降机以加速度 $1.22\mathrm{m\cdot s^{-2}}$ 上升，当上升速度为 $2.44\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 时，有一螺帽自升降机的天花板上脱落，天花板与升降机的底面相距 2.74m。

(1) 试分别以地球和升降机为参考系，计算螺帽从天花板落到底面所需时间；

(2) 计算螺帽相对于升降机外固定柱子的下降距离。

[分析]　螺帽相对机外柱子(以地球为参考系)作初速度不为零的竖直上抛运动，升降机作匀加速直线运动，螺帽落在地板上时，螺帽与升降机地板运动到同一空

间位置，即在同一坐标系中螺帽和地板此时的位置矢量相同。若以升降机为参考系，则螺帽以相对升降机的加速度由静止开始运动，运动路程就是升降机的高度。

［解］ (1) 以地球为参考系，螺帽刚脱落时升降机地板位于 $x_1=0$ 处，螺帽在 $x_2=h$处。经 t 时刻在 x 处螺帽和地板相遇。

螺帽运动方程为

$$x=h+v_0t-\frac{1}{2}gt^2 \qquad ①$$

升降机地板运动方程为

$$x=v_0t+\frac{1}{2}at^2 \qquad ②$$

由①、②式得

$$h=\frac{1}{2}(a+g)t^2$$

$$t=\sqrt{\frac{2h}{a+g}}=\sqrt{\frac{2\times 2.74}{1.22+9.8}}=0.71\mathrm{s}$$

以升降机为参考系

$$\boldsymbol{a}_{螺机}=\boldsymbol{a}_{螺地}+\boldsymbol{a}_{地机}=\boldsymbol{a}_{螺地}-\boldsymbol{a}_{机地}$$

取向上为正，则

$$a_{螺机}=a'=-g-a$$

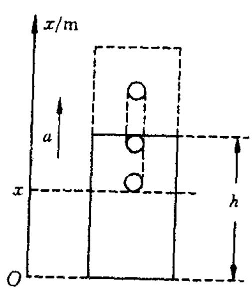
螺帽相对升降机初速度为零，所以

$$-h=\frac{1}{2}a't^2 \quad t=\sqrt{\frac{2h}{g+a}}=0.71\mathrm{s}$$

(2) 以地球为参考系，螺帽运动方程

$$x=h+v_0t-\frac{1}{2}gt^2$$

$t=0.71\mathrm{s}$ 时 x 是螺帽与升降机地板相遇的位置(见解 1-9 图)，所以螺帽相对机外柱子下降的距离



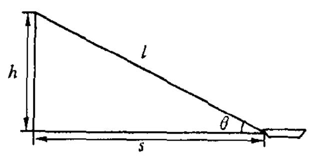
解 1-9 图

$$\Delta h=h-x=-\left(v_0t-\frac{1}{2}gt^2\right)$$

$$=-\left(2.44\times 0.71-\frac{1}{2}\times 9.8\times 0.71^2\right)=0.74\mathrm{m}$$

1-10 在离水面高度为 h 的岸壁上，有人用绳子拉船靠岸，船位于离岸壁 s 距离处，当以 v_0 的速度收绳时，试求船的速度、加速度的大小各为多少？

［分析］ 绳子长度的时间变化率就是收绳速率 v_0。船在水面运动，它的位移在水面上，所以船距岸壁距离 s 的时间变化率是船的速率，也是系在船首绳端点的移动速率（绳上各点速度大小不能等同收绳速率，它们各点速度在绳的方向上分量大小相同，等于收绳速率）。所以从绳长 l 与船岸距 s 关系入手可得收绳速率与船速率的关系。



解 1-10 图

［解］ 设某时刻绳的长度为 l，此时绳与水面成 θ 角，如解 1-10 图所示，可列式

$$l^2=h^2+s^2 \qquad ①$$

将上式两边分别对时间求导得

$$2l\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}=2s\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

按题意，并注意到 l，s 随 t 减少，所以 $-\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}$ 就是收绳的速率 v_0，$-\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ 就是船的速率 v，即有

$$v=-\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=-\frac{l}{s}\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}=\frac{l}{s}v_0=\frac{v_0}{\cos\theta}$$

或

$$v=\frac{l}{s}v_0=\frac{(h^2+s^2)^{\frac{1}{2}}v_0}{s} \qquad ②$$

可见，v 是大于 v_0 的，将式②对时间 t 求导，求得船的加速度的大小为

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{s\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}-l\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}}{s^2}v_0=\frac{-v_0s+lv}{s^2}v_0$$

$$=\frac{\left(-s+\frac{l^2}{s}\right)v_0^2}{s^2}=\frac{h^2v_0^2}{s^3}$$

1-11 一质点由静止开始作直线运动，初始加速度为 a_0，以后加速度均匀增加，每经过 τ 秒增加 a_0，求经过 t 秒后质点的速度和运动的距离。

［分析］ 只要写出加速度变化的时间函数，求速度与距离都属运动学第二类问题，积分处理即可。

［解］ 由题意可知，加速度和时间的关系为

$$a=a_0+\frac{a_0}{\tau}t \quad 而 \quad a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

$$\mathrm{d}v=a\mathrm{d}t,\ \int_0^v \mathrm{d}v=\int_0^t a\mathrm{d}t$$

所以

$$v=a_0t+\frac{a_0}{2\tau}t^2$$

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\ \mathrm{d}x=v\mathrm{d}t$$

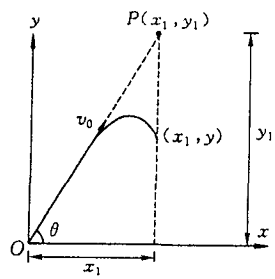
所以

$$x=\int_0^t v\mathrm{d}t=\frac{a_0}{2}t^2+\frac{a_0}{6\tau}t^3$$

1-12　在地面上某处用枪瞄准挂在射程之内一棵树上的靶。当子弹射离枪口时，靶恰好自由下落。试证明子弹总能正好击中自由下落的靶。

[分析]　枪口直接瞄准靶，子弹出膛后作抛物线运动，而不会直线飞向靶。枪到靶的水平距离子弹飞行需时间 t，若证明 t 时间内靶自由下落的位置与射击的子弹竖直方向位置相同，则可以得证。

[解]　如解 1-12 图所示，设枪口瞄准靶的仰角为 θ，子弹初速度大小 v_0，靶的悬挂位置为 $P(x_1,y_1)$，子弹沿抛物线轨道到达靶的正下方点 (x_1,y) 所需的时间为 t，根据抛体运动的规律有



解 1-12 图

$$\begin{cases} x_1=v_0\cos\theta\cdot t \\ y=v_0\sin\theta\cdot t-\dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

当子弹离开枪口时，靶开始自由下落，设靶在 t 时刻的纵坐标为 y'，则

$$y'=y_1-\frac{1}{2}gt^2=x_1\tan\theta-\frac{1}{2}gt^2$$

$$=v_0\cos\theta\cdot t\cdot\tan\theta-\frac{1}{2}gt^2$$

$$=v_0\sin\theta\cdot t-\frac{1}{2}gt^2$$

可见有 $y'=y$，这是子弹在 t 时刻所到达的位置，正好打中靶。所以步枪上有标尺，瞄准时，枪口实际是朝向靶的上方，以适应子弹的真实弹道。

1-13　--质点作半径为 $r=10\text{m}$ 的圆周运动，其角加速度 $\alpha=\pi\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-2}$，若质点由静止开始运动，求质点在第一秒末的

(1) 角速度；

(2) 法向加速度和切向加速度；

(3) 总加速度的大小和方向。

［分析］　角加速度不含变量，直接用匀角加速运动的公式，可得角速度。再由角量和线量关系式分别得法向加速度和切向加速度，合成得总加速度。

［解］　(1) $\omega=\alpha t=\pi\times1=3.14\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$

(2) $a_n=r\omega^2=10\times\pi^2=98.7\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$

$a_t=r\alpha=10\times\pi=31.4\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$

(3) $a=\sqrt{a_n^2+a_t^2}=103.5\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$

$\boldsymbol{a}$ 与切线方向夹角

$$\varphi=\arctan\frac{a_n}{a_t}=72°20'$$

1-14　一质点沿半径为 0.1m 的圆周运动，其角坐标 θ 可用下式来表示：

$$\theta=2+4t^3\quad(\theta\text{ 以 rad 计},t\text{ 以 s 计})$$

试问：

(1) 在 $t=2\text{s}$ 时，法向加速度和切向加速度各是多少？

(2) 当 θ 角等于多少时，其总加速度与半径成 45°角。

［分析］　角位置对时间求一阶导数、二阶导数得出角速度、角加速度，再由角量与线量关系得出法向加速度、切向加速度。

［解］　(1) $v=R\omega=R\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=R\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(2+4t^3)=1.2t^2\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

$$a_t=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=2.4t\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

$$a_n=\frac{v^2}{R}=14.4t^4\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

$t=2\text{s}$ 时，　$a_t=2.4\times2=4.8\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$

$a_n=14.4\times2^4=230.4\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$

(2) $\tan\alpha=\tan45°=\dfrac{a_n}{a_t}=1$