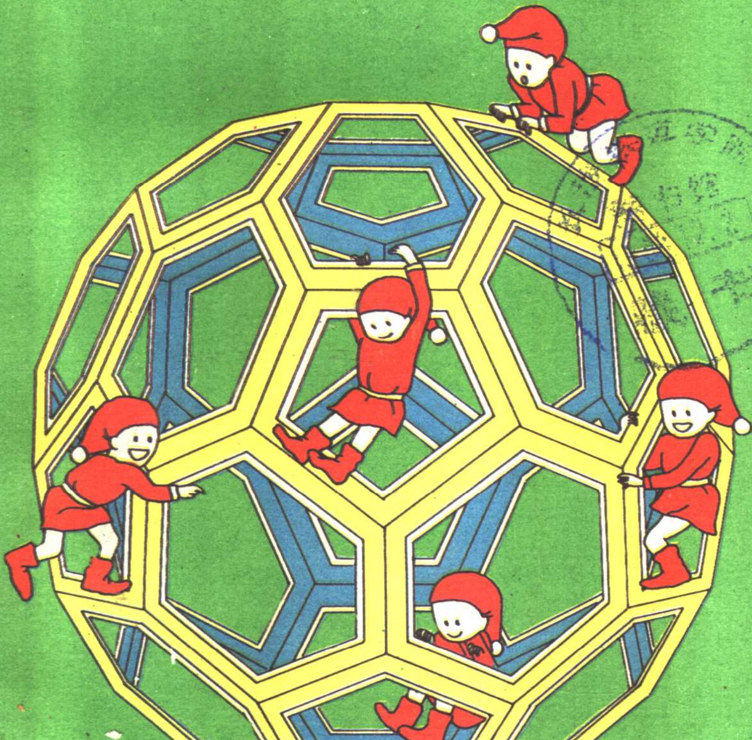
中学数学知识丛书

[日] 横地 清 编

相似的应用



知识出版社

中学数学知识丛书

〔日〕横地 清 编

相 似 的 应 用

〔日〕东野 贡 著

赵崇林 译

知 识 出 版 社

内 容 提 要

本书是日本横地清教授为青少年数学爱好者编写的一套初等数学知识丛书，共35本。这套书的特点是通过对日常生活中经常遇到的具体现象的分析来讲述初等数学提高青少年学习数学的兴趣。《相似的应用》以相似形为中心，利用客观存在的事物、现象，诸如相片的放大，点光源与影子的关系等本说明相似形的性质，进而介绍投影图与展开图等。本书浅显易懂，适合初中文化水平的读者阅读。

中学数学知识丛书
相 似 的 应 用
知 识 出 版 社 出 版
（北京阜成门北大街17号）
新华书店总店北京发行所发行　北京景山学校印刷厂印刷
开本 787×1092　1/32　印张 2.625　字数 53 千字
1988年4月第1版　1988年4月第1次印刷
印数：1—1,600
定价：0.70元
ISBN7-5015-0249-8/G·53

前　言

似乎有很多人认为：对数学只要能解答习题或只要会计算就以为学得不错了。

你怎么看呢？

研究一下数学发生、发展的历史，就能知道数、图形、式子、函数等，无论哪个领域里的数学，都是我们祖先由于生存的需要，不断“总结经验，从中找出规律性，再利用它去解决实际问题”而创造出来的。

本书所讲的“相似的应用”也是人类经过几千年才搞清楚的关于图形和空间知识的一部分。

所谓“由于生存的需要”，当然也因其时代不同而有很大的差别，这是由于人类生活本身不断进步以及社会继续发展的缘故。由于数学的进展，社会也随之向前发展。随着社会向更高级更复杂方面发展，受其影响而需要更高深的数学。不仅对数学是这样，对整个文化也是这样。

在本书里，首先提出与我们日常生活关系密切的东西，以便考虑与其相似的关系。其次还提出了前人想象不到的与“工厂生产”有关的机械或机构方面的某些问题。

著　者

本 书 的 用 法

本书的目的不是研究相似的严密性质，而是研究或考查相似图形在我们生活和生产过程中以何种形式表现出来的。

所举的例子多是在教科书和参考书上所没有的，另外对从相似发展起来的有关问题也作了说明。

我认为不应把它当作记忆性的东西来读，而要根据实际研究和实验去了解活的数学的一个侧面。

目　录

第一章　所谓“长得一模一样”

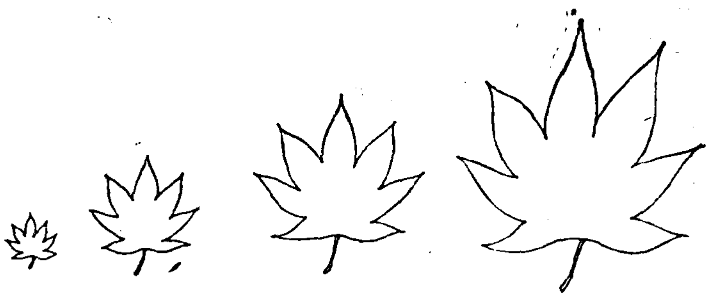


图　1

常有“康子和妈妈一模一样”或“纪夫和雅夫小时候长得一模一样”等说法。

这种“一模一样”和“长得一模一样”的说法，就是形状相同的意思。

观察一下我们的周围，这种“形状相似”的东西很多。制作或利用“形状相同（相似）”对我们生活有用的东西也是很多的。

我们就来研究一下这方面的问题。

§1 放 大 机

平行平面和点光源

学校里的文化活动、运动会、旅行等常用照相机把有趣的“镜头”拍下来。要放大时，就要用“放大机”。图2是放大机结构示意图。

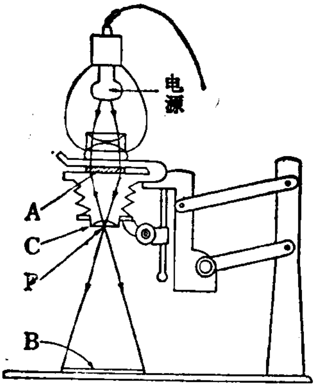


图 2

从电源发出的光束，用透镜使它通过底片A集中于点P，从这个点P（叫做点光源）再把光发散到B上，这时必需使A和B完全平行。

这样就能把底片A上的像映在B上。通过底片A到B的光，可用上下可动的透镜进行调整。因为这种结构比较复杂，故说明从略。将其结构简单表示成如图3。

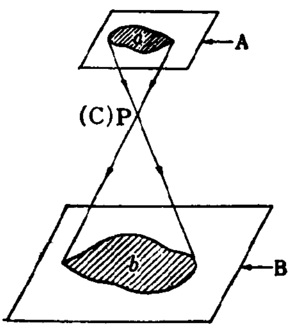


图 3

这种放大装置最重要的是光源必须是“点光源”（如不是，映出的像b就模糊）以及平面A和B必须平行（如不平行，像b就歪斜）。

A和B平行时，原像a和映出的像b“大小不同而形状相同”，叫做**相似**，记作$a \backsim b$。

在图4里，假设二平面π和π'平行（可写成$\pi \parallel \pi'$），光从点光源O发出，如果把$\triangle ABC$放大成$\triangle A'B'C'$，则$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$。在图5中，$\pi \parallel \pi'$，过点O的光束被$\triangle ABC$遮住时，在$\pi'$上作出$\triangle A'B'C'$。这时$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$。现在把这个道理略微引伸一步。

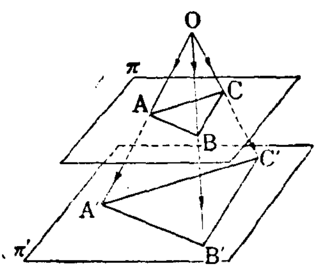


图 4

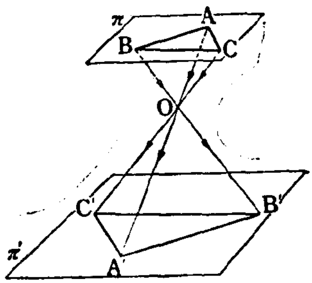


图 5

线段的扩大

现在研究一下在图4和图5中的线段AB放大成线段$A'B'$的道理。

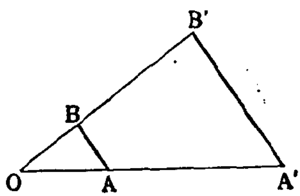


图 6

首先知道的是$AB \parallel A'B'$。

因为$AB \parallel A'B'$，所以$\angle OAB = \angle OA'B'$，$\angle OBA = \angle OB'A'$。$\therefore \triangle OAB \backsim \triangle OA'B'$。因此，

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC}.$$

$\frac{A'B'}{AB}$的值表示"A′B′长是AB长的几倍"，把它叫做"A′B′对AB的**扩大率**或叫A′B′对AB的**相似比**"。

由$\frac{OA'}{OA}=\frac{OB'}{OB}=\frac{AB'}{AB}$可得"A′B′对AB的相似比与$\frac{OA'}{OA}\left(即\frac{OB'}{OB}\right)$的值"相等"。

于是，比较图4上的△A′B′C′和△ABC，则有$\frac{A'B'}{AB}$

$$=\frac{B'C'}{BC}=\frac{C'A'}{CA}=\frac{OA'}{OA}\left(=\frac{OB'}{OB}=\frac{OC'}{OC}\right),$$

所以 △A′B′C′∽△ABC（在图5中也同样）。

【例题1】 在前页的图6中，若AB＝2cm，OA＝3.2cm，OA′＝4.8cm时，A′B′为多少cm？这时A′B′对AB的相似比是多少？

【解】 设A′B′＝$x$cm，则$\frac{x}{2}=\frac{4.8}{3.2}$，解得$x=3$。

答 3cm。

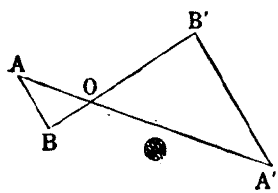


图 7

相似比是$\frac{4.8}{3.2}=\frac{3}{2}$（＝1.5）。

看一看图5中的AB扩大成A′B′的情形。为便于理解起见，就图7来说明。

这里也是AB∥A′B′，则△OAB∽△OA′B′。和图6情形一样，A′B′对AB的相似

比是

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{OA'}{OA}\left(=\frac{OB'}{OB}\right)。$$

【例题2】 在图 7 中，当$AB=2.3$cm，$OA=3.2$cm，$OA'=7.6$cm时，$A'B'$是多少cm？

【解】 设$A'B'=x$cm，则

$$\frac{x}{2.3}=\frac{7.6}{3.2}，解得\quad x=5.4625。$$

答　约5.46cm。

改变相似比

在图4中，不改变π和π'的位置和$\triangle ABC$的位置，只改变点O的位置时，则$\triangle A'B'C'$的大小随之变化。当点O远离π时，$\triangle A'B'C'$变小。

在图 5 中，当点O与π'的距离靠近时，则$\triangle A'B'C'$变小。

【例题3】 ①在图 4 中，点 O靠近π时，$\triangle A'B'C'$如何变化？②在图 5 中，点O靠近π时，$\triangle A'B'C'$如何变化？

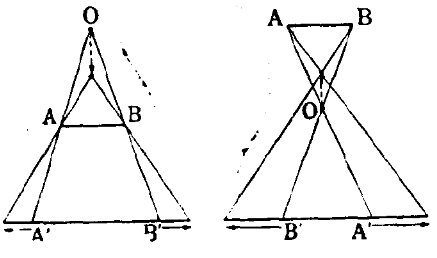


图　8

【解】 ①$\triangle A'B'C'$变大。

②$\triangle A'B'C'$变大。这个事实可从图 8 看出。

在图 2 中，把透镜C向上移，就相当于图 8 右侧图形上的点O向上移，这时相似比就变大了。

亮度的变化

假设$\pi /\!/ \pi'$，O和π以及O和π'的距离分别为5 cm、10cm（图 9）。设在π上的矩形ABCD中的AB＝3cm，BC＝2cm。于是▱A′B′C′D′∽▱ABCD，相似比为2。这时▱A′B′C′D′的面积为

（长）（3×2）×（宽）（2×2）＝（3×2）×2^2

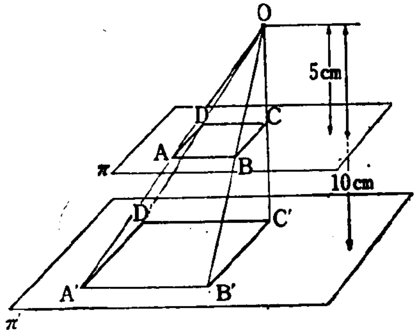


图 9

面积扩大了2^2倍即 4 倍。从点O发出同样的光量，照在▱A′B′C′D′上的面积是照在▱ABCD上的面积的 4 倍。相反，而亮度是$\frac{1}{4}$倍。也就是说亮度缩小到$\frac{1}{4}$。

§ 2 利用光“放大”的各种情形

由平行光线产生的影子

如图10，在窗子玻璃平面π上，粘上用图画纸剪成的△ABC，当太阳光线（平行光线）射在上面时，在平行于π的板π'上产生影子△A′B′C′。这时显然△A′B′C′≌

△ABC。而且AB∥A′B′，BC∥B′C′，CA∥C′A′。

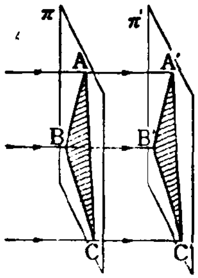


图 10

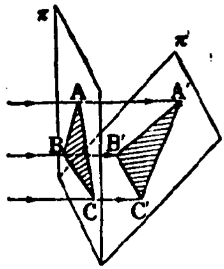


图 11

如图11，把板π′与玻璃板π倾斜一定角度时，在π′上产生的△A′B′C′和△ABC是不全等的，而是一个变形的图形。这是为什么呢？

在图12上，假定玻璃板π与图画纸粘成的板π′的交线为l，如果π上线段AB遮住了太阳光，在π′上产生影子A′B′。而且假定AB和l不是平行的。

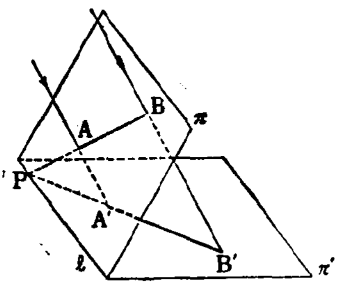


图 12

由于AA′∥BB′，则A、A′、B、B′四个点在同一平面上，所以AB、A′B′也在此平面上。并且，由于AB在π上，A′B′在π′上，BA与B′A′的延长线和π与π′的交线l相交于点P。

那么在这种情况下，根据大家所熟悉的“平行线和比例”的性质，AB和A′B′的长度，一般来说是不等的。

图13的情形是线段AB与l相平行。若在l上取AB＝

CD的两点C、D，则由$\triangle CAA' \equiv \triangle DBB'$知$AA' = BB'$，而且$AA' \parallel BB'$，所以四边形$AA'B'B$是平行四边形。因此得知

$$AB \parallel A'B', \qquad AB = A'B'。$$

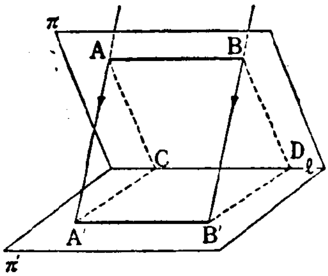


图 13

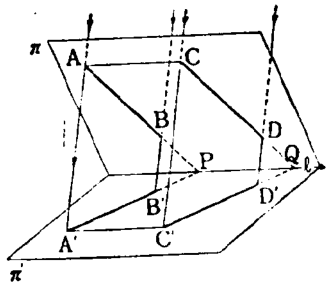


图 14

在图14中，π上两线段AB和CD是平行的。它们在π'上的影子分别是A'B'和C'D'。假设AB与CD的延长线和l的交点分别为P、Q，则A'B'与C'D'的延长线也分别通过P、Q（这一事实在图12中已经研究过了）。

现在假设$AC \parallel l$。于是从图14得知四边形$AA'C'C$是平行四边形，$AC = A'C'$。同时由于$AC = PQ$，则$A'P = C'Q$。从而四边形$PQC'A'$是平行四边形，所以$A'P \parallel C'Q$，换句话说$A'B' \parallel C'D'$。

从此得知"平面π和π'即使不平行，而π上的平行线在π'上的影子仍然平行"。

在图15中，假设AB的影子是A'B'，AB上C的影子是A'B'上的C'，由"平行线段成比例"的性质可知，

$$\frac{A'C'}{AC}=\frac{C'B'}{CB}。$$

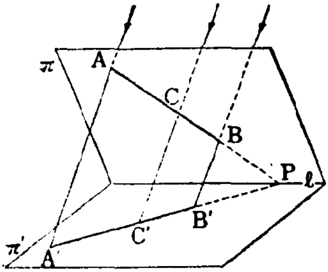


图 15

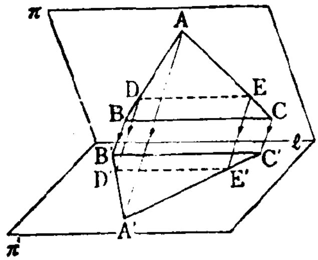


图 16

在图16中，π上△ABC在π′上产生的影子是△A′B′C′时，根据以上的叙述试比较一下这两个三角形。这里假设BC∥l。

在△ABC的边AB上取点D，在边AC上取点E，使DE∥BC。现在比较△ABC和△A′B′C′。若直接比较就难以理解，我们把△A′B′C′翻过来和△ABC并排在一起，如图17。

于是我们知：

（1）DE∥BC，

所以D′E′∥B′C′，D′E′＝DE；

（2）除特殊情形外，一般

AB≠A′B′，

AC≠A′C′；

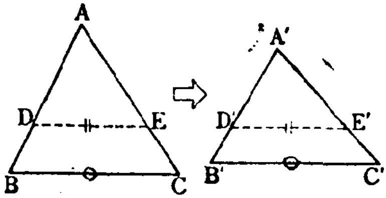


图 17