高等数学

复习与解题指导

叶森馨　王益姝　张小柔编

武汉工学院

一九八四年十二月

前　　　　言

本书每章分为内容概要及解题方法举例两部分，内容概要的目的对是高等数学内容给以清晰的构架；解题方法例举的目的是总结归纳解各类问题的方法与技巧。

本书采用一元微分学与多元微分学，一元积分学与多元积分学等对此的形式给以复习，目的是引导读者领会一元与多元的联系与不同，对高等数学来一次系统的复习与深化。

本书取用的例题多为近几年招考研究生的考题，所以对准备报考研究生的读者有直接引路的作用；由于本书采用综合复习的形式而编写，故对低年级迎接期未复习考试亦有直接的指导作用，当然对电大，业大，函大等自学者亦会有一定帮助。

由于水平所限，谬误之处请指正。

向武汉工学院教务处领导及印刷厂同志对我们的帮助及热情支持，在此致以谢意

编　者

1984年11月于武汉工学院

目　录

第一章　极限与连续

§1　一重极限

内容概要

一　定义

〈一〉　数列极限

1° $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = A \Longleftrightarrow$ 若对于任意给定的正数 ε，总存在正整数 N，使适合 $n > N$ 的一切 n 满足 $|u_n - A| < \varepsilon$。

2° $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ 不存在 $\Longleftrightarrow$ 数列 $\{u_n\}$ 不收敛（或称发散）

3° $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty \Longleftrightarrow$ 对于无论怎样大的正数 M，总能找到 N，使 $n > N$ 时，$u_n > M$。

4° $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = -\infty \Longleftrightarrow$ 对于无论怎样的负数 L，总能找到 N，使当 $n > N$ 时，$u_n < L$。

〈二〉　函数极限

5° $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \Longleftrightarrow$ 对于任意给定的正数 ε，总存在着一个正数 δ，使得满足 $0 < |x - a| < \delta$ 的一切 x，有下式成立。

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

6° $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = A \Longleftrightarrow$ 对于任意给定的正数 ε，总存在着正数 δ，使当 $a - \delta < x < a$ 时，有

$$|f(x) - A| < \varepsilon \qquad \text{（称} A \text{为} f(x) \text{的左极限）}$$

7° $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = A \Longleftrightarrow$ 对于任意给定的正数 ε，总存在着一个正数 δ，使当 $a < x < a + \delta$ 时，有

$$|f(x) - A| < \varepsilon \qquad \text{（称} A \text{为} f(x) \text{的右极限）}$$

8° $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty \Longleftrightarrow$ 对不论怎样的正数 M，总存在一正数 K，使当 $|x| > K$ 时的一切 x 值，有

$$f(x) > M$$

9° $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A \Longleftrightarrow$ 对于无论怎样的正数 ε，总存在一负数 K，使对 $x<K$ 的一切 x 有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

10° $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty \Longleftrightarrow$ 对于不论怎样的正数 M，总存在一负数 K，使对 $x<K$ 的一切 x 有

$$f(x)>M$$

11° 当 $x\to a$ 时 $f(x)$ 不能收敛于 $A \Longleftrightarrow$ 若存在某个正数 ε，不管怎样选择取正数 δ，仍有 x，满足 $0<|x_{\circ}-a|<\delta$ 时有 $|f(x_{\circ})-A|\geqslant\varepsilon$。

〈三〉 无穷大量与无穷小量

12° 无穷小量 若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_{\circ}\\(x\to\infty)}} f(x)=0$，则称 $f(x)$ 为当 $x\to x_{\circ}$（或 $x\to\infty$）时的无穷小量。

13° 无穷大量 对任意给定的正数 $M>0$，必有 $\delta>0$（或 $N>0$），使适合不等式 $0<|x-x_{\circ}|<\delta$（或 $|x|>N$）的一切 x 值有

$$|f(x)|>M$$

成立，则称函数 $f(x)$ 为当 $x\to x_{\circ}$（$x\to\infty$）时的无穷大量，记作 $\lim\limits_{\substack{x\to x_{\circ}\\(x\to\infty)}} f(x)=\infty$

〈四〉 无穷小的阶

设 α 和 β 是两个无穷小量

14° 1＞若 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=0$，就称 α 是比 β 较高阶的无穷小。（简称 α 是 β 的高阶无穷小）

2＞若 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=\infty$，就称 α 是比 β 较低阶的无穷小，或称 β 是比 α 较高阶无穷小。

3＞若 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=A\neq0$，就称 α 是 β 的同阶无穷小。

4＞若 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=0$，而又有 $K>0$，使 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta^{K}}=A\neq0$，则称 α 是 β 的 K 阶无穷小。

〈五〉 等价无穷小

设 α 和 β 是无穷小，若 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=1$，则称 α 与 β 是等价无穷小，记 $\alpha\sim\beta$。

二 主要性质

〈一〉 极限值的唯一性

1° 若数列 $\{u_n\}$ 有极限，则其极限值是唯一的。

2° 若函数 $f(x)$ 在 $x_{\circ}$ 点的极限存在，则其极限值必是唯一的。

〈二〉 有极限的数列及函数的有界性

1° 若$\lim\limits_{n\to\infty} u_n$存在，则数列$\{u_n\}$有界。

2° 若$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=A$，则在$x_0$的某邻域中(不考虑$x=x_0$)(或当$|x|$大于某个正数$N$)函数$f(x)$必有界。

〈三〉 极限存在的充要条件

1° $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=A$

2° $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)$存在$\Longleftrightarrow$任选数列$\{x_n\}$，$x_n\to x_0$(或$x_n\to\infty$)所对应的数列$\{f(x_n)\}$有同一极限。

3° $\lim u_n$存在$\Longleftrightarrow$对任意小的正数ε，总有一个足够大的自然数N，保证u_N以后的任意两项u_m，$u_{m'}$($m>N$，$m'>N$，$m\neq m'$)满足不等式

$$|u_m-u_{m'}|<\varepsilon$$

4° $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在$\Longleftrightarrow$对于任意小的正数$\varepsilon$，总有$\delta$对于满足$0<|x'-x_0|<\delta$及$0<|x''-x_0|<\delta$的任意两点$x'$，$x''$有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$$

成立。

〈四〉 无穷大量与无穷小量的关系

1° 若$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=\infty \Longrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} \dfrac{1}{f(x)}=0$

2° 若$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=0$且$f(x)\neq 0 \Longrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} \dfrac{1}{f(x)}=\infty$

〈五〉 函数极限与无穷小量的关系

$$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=A \Longleftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$$

其中$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} \alpha(x)=0$

〈六〉 无穷小量的性质

1° 有限个无穷小量的代数和也是无穷小量。

2° 有限个无穷小量的乘积也是无穷小量。

3° 有界函数与无穷小量的乘积是无穷小量。

4° 常量与无穷小量的乘积是无穷小量

5° 无穷小量与极限不为零函数之商是无穷小量。

〈七〉 极限存在准则

1° 若在x_0的某领域中（x_0可除外）（或在$|x|>N>0$时）满足

$$F(x)\leqslant f(x)\leqslant G(x)$$

且 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} F(x)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} G(x)=A$ 则 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)$存在且等于$A$

2° 如果$y_n\leqslant x_n\leqslant Z_n$（$n=1, 2, \cdots\cdots$）

且 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty} Z_n=a$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$

~~3° 单调上升有上界的数列及单调下降有下界的数列必有极限~~

〈八〉 函数的大小与极限值的大小的关系

如果对充分接近x_0的一切x，有$f(x)<g(x)$（或$f(x)\leqslant g(x)$及$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\alpha$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\beta$，则$\alpha\leqslant\beta$。

〈九〉 等价无穷小的性质

设α、α'、β、β'均为无穷小

1° 若$\alpha\sim\beta$，$\lim\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha}=0$

2° 若$\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'\Longrightarrow\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=\lim\dfrac{\alpha'}{\beta'}$

3° 若$\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，且$\lim\dfrac{\alpha'}{\beta'}=A\neq-1\Longrightarrow(\alpha+\beta)\sim(\alpha'+\beta')$。

三、极限的四则运算

1° 有限个有极限的函数的代数和也有极限．和的极限值等于各个函数的极根值的代数和。

2° 有限个有极限的函数的乘积也有极限，乘积的极限值等于各个函数的极限值的乘积。

3° 两个函数若有极限，其商在分母的极限不是零时也有极限，商的极限等于它们的极限的商。

4° 若$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\to\infty}} f(x)=A \Longrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ (x\to\infty)}} kf(x)=k\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ (x\to\infty)}} f(x)=kA$，其中$k$为常数。

5° 若$\lim f(x)=A \Longrightarrow \lim[f(x)]^n=A^n=[\lim f(x)]^n$，$n$为正整数。

6° 若$\lim f(x)=A$，$A>0$，n是正整数$\Longrightarrow \lim\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{A}$

四　二个重要定理（同号性定理）

定理1° 如果$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，而且$A>0$（或$A>0$），那未就存在着点$x_0$的某一邻域，当$x$在该邻域内，但$x\neq x_0$时，有$f(x)>0$（或$f(x)<0$）。

定理2° 如果$f(x)\geqslant 0$（或$f(x)\leqslant 0$），而且$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，那未$A\geqslant 0$（或$A\leqslant 0$）。

解题方法举例

一、验证极限的方法

1° 用ε—N极限定义

验证某数列的极限，要用数列极限的定义，验证时关键要求出N，而求N的思路为：首先从不等式$|f(n)-A|<\varepsilon$出发，寻找保证此不等式成立的n和ε。在寻求n与ε的关系时，一定要使下一步的成立保证上一步的成立。这样才能使求得N后，当$n>N$时保证$|f(n)-A|<\varepsilon$成立。并且要注意到对于任给的$\varepsilon>0$，这样找到的N不是唯一的，取一个较小的为好。此方法是一个“反推”过程。

例1　证明$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n+b}{cn+d}=\dfrac{a}{c}$（$c\neq 0$）

证明　因为$\left|\dfrac{an+b}{cn+d}-\dfrac{a}{c}\right|=\left|\dfrac{bc-ad}{c(cn+d)}\right|$

1) 若$bc-ad=0$，则显然对于任意n有

$$\left|\frac{an+b}{cn+d}-\frac{a}{c}\right|=0<\varepsilon$$

2＞　若$bc-ad\neq 0$，则欲使

$$\left|\frac{bc-ad}{c(cn+d)}\right|<\varepsilon$$

只要使　$|cn+d|>\frac{|bc-ad|}{|c|\varepsilon}$

即　$\left|n+\frac{d}{c}\right|>\frac{|bc-ad|}{c^2\varepsilon}$

如果c，d同号，则得

$$n>\frac{|bc-ad|}{c^2\varepsilon}-\frac{d}{c}$$

如果c，d异号，则得

$$n>\frac{|bc-ad|}{c^2\varepsilon}+\frac{d}{c}$$

因此，不论哪种情况，总可取$N=\left[\frac{|bc-ad|}{c^2\varepsilon}-\left|\frac{d}{c}\right|\right]$，使当$n>N$时有

$$\left|\frac{an+b}{cn+d}-\frac{a}{c}\right|<\varepsilon$$

成立。综合1＞与2＞则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{an+b}{cn+d}=\frac{a}{c}\qquad(c\neq 0)$$

2° 用$\varepsilon-\delta$函数极限定义

用$\varepsilon-\delta$函数极限定义来验证极限的关键是寻找δ，而找δ的方法与$\varepsilon—N$的方法一样，均为$|f(x)-A|<\varepsilon$，采用倒推的方法，要求下一步的成立能保证上一步的成立的方法。由$|f(x)-A|<\varepsilon$找δ时，一般先要在左边化出一个$|x-x_0|$的因子。对任给的一个$\varepsilon>0$．找到的δ不是唯一的，一般取较小的。

例2　证明$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$

证明　对于任意给定的正数ε，欲使不等式

$$\left|\frac{x^2-1}{x-1}-2\right|<\varepsilon$$

成立，也就是上式约去因子$x-1\neq 0$后

$$\left|\frac{x^2-1}{x-1}-2\right|=|x+1-2|=|x-1|<\varepsilon$$

成立。因此，只要取$\delta=\varepsilon$，则当$0<|x-1|<\delta$时，就有

$$\left|\frac{x^2-1}{x-1}-2\right|<\varepsilon$$

则 $\lim \frac{x^2-1}{x-1}=2$

二 求极限的方法

〈一〉 求极限时常用的工具

1° 常用的不等式

1〉 $|\alpha\pm\beta|\leqslant|\alpha|+|\beta|$，$|\alpha\pm\beta|\geqslant|\alpha|-|\beta|$

2〉 $x>0$时

$$x^\alpha-1\geqslant\alpha(x-1) \qquad (\alpha>1\text{或}\alpha<0)$$
$$x^\alpha-1\leqslant\alpha(x-1) \qquad (0<\alpha<1)$$

等号仅限于$x=1$时成立。

2° 常用的数列极限

1〉 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$

2〉 $\lim\limits_{n\to\infty} r^n=\begin{cases}+\infty & (r>1)\\ 1 & (r=1)\\ 0 & (|r|<1)\\ \text{不存在} & (r\leqslant-1)\end{cases}$

3〉 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1 \qquad (a>0)$

4〉 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$

5〉 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=e$

6〉 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\cdots+\frac{1}{n!}\right)=e$

7〉 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right)=\ln a \qquad (a>0)$

8〉 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}=\infty$

3° 常用的函数极限

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg x}{x}=1$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots\cdots b_{m-1}x+b_m}$

$$=\begin{cases}\infty & 若 n>m\\ \frac{a_0}{b_0} & 若 n=m\\ 0 & 若 n<m\end{cases}\quad (其中 a_0\neq 0,\ b_0\neq 0)$$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^a}{a^x}=0\quad (a>0,\ a>1)$

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^a}{\ln x}=\infty\quad (a>0)$

6) $\lim\limits_{x\to 0^+}x^a a^{\frac{1}{x}}=+\infty\quad (a>0,\ a>1)$

7) $\lim\limits_{x\to 0^+}x^a\ln x=0\quad (a>0)$

8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$

9) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a\quad (a>0)$

10) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^a-1}{x}=a$

4° 常用的等价无穷小

当 $x\to 0$ 时

$\sin x\sim x$， $tg x\sim x$， $1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$

$arc\ \sin x\sim x$， $arc\ tg x\sim x$， $\sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{1}{n}x$

$e^x-1\sim x$， $\ln(1+x)\sim x$. $a^x-1\sim x\lg a\quad (a>0)$

〈二〉 求极限的方法

1° 利用自然数，等差级数，等比级数等求和公式

例1 求数列$a_1=0$，$a_2=1$，……$a_n=\dfrac{a_{n-1}+a_{n-2}}{2}$，……的极限。

解 由$a_n=\dfrac{a_{n-1}+a_{n-2}}{2}$得

$$2a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$$

即 $$a_n-a_{n-1}=a_{n-2}-a_n$$

于是 $$a_n-a_{n-1}=a_{n-2}-\frac{a_{n-1}+a_{n-2}}{2}=(-\tfrac{1}{2})(a_{n-1}-a_{n-2})$$

$$=(-\tfrac{1}{2})^2(a_{n-2}-a_{n-3})=\cdots\cdots=(-\tfrac{1}{2})^{n-2}(a_2-a_1)$$

由等比数列求和公式

则 $$(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots\cdots+(a_n-a_{n-1})$$

$$=(a_2-a_1)[1-\tfrac{1}{2}+(-\tfrac{1}{2})^2+\cdots\cdots+(-\tfrac{1}{2})^{n-2}]$$

$$=(a_2-a_1)\cdot\frac{1-(-\frac{1}{2})^{n-1}}{1+\frac{1}{2}}=\tfrac{2}{3}[1-(-\tfrac{1}{2})^{n-1}]$$

即 $$a_n-a_1=\tfrac{2}{3}[1-(-\tfrac{1}{2})^{n-1}]$$

则 $$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\tfrac{2}{3}[1-(-\tfrac{1}{2})^{n-1}]=\tfrac{2}{3}$$

例2 求$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\left(\alpha+\frac{\beta}{n}\right)+\left(\alpha+\frac{2\beta}{n}\right)+\cdots\cdots+\left(\alpha+\frac{n-1}{n}\beta\right)\right]$

解 由等差数列求和公式

$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{(n-1)(2\alpha+\beta)}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)$$

$$=\alpha+\frac{\beta}{2}$$

2° 利用部分分式法求和式的极限

部分分式可将一些分式化成差的形式，在求和过程中便于正、负抵消，容易求得前n项和、再取极限。

例3 求$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\cdot4}+\frac{1}{4\cdot7}+\cdots\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}\right]$

解 化部分分式有

$$\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3k-2}-\frac{1}{3k+1}\right)$$

则　原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left[\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)\right.$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)=\frac{1}{3}$$

3° 化成商的形式求乘积的极限

计算乘积极限时，若能将各项化成商的形式，使得某些公因子交错地出现在分子、分母上，那未直接约去公因子就可得出前几项乘积，再取极限。

例 4　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

解　因为

$$1-\frac{1}{k^2}=\frac{(k-1)(k+1)}{k\cdot k}\qquad k=1,\ 2\cdots\cdots,\ n$$

则原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdots\cdots\frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\,\frac{n+1}{n}=\frac{1}{2}$$

4° 利用常用不等式

例 5　$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b(b+1)(b+2)\cdots\cdots(b+n)}{a(a+1)(a+2)\cdots\cdots(a+n)}$　　$(a>0,\ b>0)$

解　设 $a>b$，k 为自然数时

$$\frac{b+k}{a+k}=1+\frac{b-a}{a+k}\qquad b-a<0$$

利用常用不等式

$$x^{\alpha}-1>\alpha(x-1)\qquad(\alpha<0,\ x<0,\ x\neq 1)$$

令 $\alpha=b-a$，$x=1+\frac{1}{a+k}=\frac{a+k-1}{a+k}$时，则

$$\left(\frac{a+k+1}{a+k}\right)^{b-a}-1>\frac{b-a}{a+k}$$

所以

$$\left(\frac{a+k+1}{a+k}\right)^{b-a}>\frac{b+k}{a+k}$$

则

$$\frac{b(b+1)\cdots\cdots(b+n)}{a(a+1)\cdots\cdots(a+n)}<\left(\frac{a+1}{a}\cdot\frac{a+2}{a+1}\cdot\cdots\cdots\frac{a+n+1}{a+n}\right)^{b-a}$$

$$=\left(\frac{a+n+1}{a}\right)^{b-a}=\left(\frac{a}{a+n+1}\right)^{a-b}$$

因为$a-b>0$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{a+n+1}\right)^{a-b}=0$$

则　　原式$=0$

当$a<b$时，由于

$$\frac{b(b+1)\cdots\cdots(b+n)}{a(a+1)\cdots\cdots(a+n)}=\frac{1}{\dfrac{a(a+1)\cdots(a+n)}{b(b+1)\cdots(b+n)}}$$

故　　原式$=+\infty$

当$a=b$时，由于

$$\frac{b(b+1)\cdots(b+n)}{a(a+1)\cdots(a+n)}=1$$

则　　原式$=1$，综上有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b(b+1)(b+2)\cdots(b+n)}{a(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}=\begin{cases}0 & (a>b)\\ 1 & (a=b)\\ +\infty & (a<b)\end{cases}$$

5° 利用三种平均值极限相等的关系

设数列a_1，a_2，$\cdots a_n\cdots$的极限为a，则$\{a_n\}$的极限与它的算术平均值，几何平均值，调和平均值有相同的极限。即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots a_n}{n}=a$$

但显然求$\{a_n\}$的极限比求三种平均值的极限简单得多。因此，若能把某个数列看成另一数列的三种平均值中的一种，那么在求极限时就可起到化繁为简的作用。

例6　(利用与算术平均值极限相等)

若$\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)$存在，证明$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)$

证明　令$a_0=0$，a_n可表为

$$a_n=(a_1-a_0)+(a_2-a_1)+\cdots+(a_n-a_{n-1})$$

$$\frac{a_n}{n}=\frac{(a_1-a_0)+(a_2-a_1)+\cdots+(a_n-a_{n-1})}{n} \qquad \langle 1 \rangle$$

右端是算术平均值，由算术平均值极限与该数列$\{a_n-a_{n-1}\}$的极限相等，则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(a_1-a_0)+(a_2-a_1)+\cdots+(a_n-a_{n-1})}{n}=\lim_{n\to\infty}(a_n-a_{n-1})$$

由$\langle 1 \rangle$就有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}(a_n-a_{n-1})=\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)$$

例7　（利用与几何平均值极限相等）

求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$

解　设$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

则
$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$$

$$x_1x_2\cdots x_n=\left(1+\frac{1}{1}\right)^1\left(1+\frac{1}{2}\right)^2\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$=\left(\frac{2}{1}\right)^1\left(\frac{3}{2}\right)^2\left(\frac{4}{3}\right)^3\cdots\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=\frac{(n+1)^n}{n!}$$

由几何平均值的极限公式，有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}}=\lim_{n\to\infty}x_n=e$$

故得
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}}\cdot\frac{n}{n+1}\right)=e$$

例8　（利用与调和平均值极限相等）

设$|q|<1$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}nq^n$

解　当$q=0$时，显然有 $\lim\limits_{n\to\infty}nq^n=0$

设$q\neq 0$，并令$r=\frac{1}{q}$，则$nq^n=\frac{n}{r^n}$

而
$$r^n=r^n-r^{n-1}+r^{n-1}-r^{n-2}+\cdots+r^2-r+r$$

令$a_1=\dfrac{1}{r}$，　　$a_n=\dfrac{1}{r^n-r^{n-1}}$　　$(n=2,3,\cdots)$

于是　　$r^n=\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}$

故可由$\{a_n\}$的极限与调和平均值极限相等的公式知

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{r^{n-1}}\cdot\frac{1}{r-1}=\lim_{n\to\infty}q^{n-1}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{q}{1-q}=0$$

故　　$\lim\limits_{n\to\infty}nq^n=0$

6° 利用与加权算术平均值的极限相等的关系

利用此定理的想法同上一样，想办法把所给数列看成为加权平均值，这样求复杂数列（加权平均值）的极限就转化为求简单数列的极限。

关于加权算术平均值的定理叙述如下：

设ⅰ）　$P_n>0$ $(n=1,2,\cdots)$；　　ⅱ）　$\lim\limits_{n\to\infty}(P_1+P_2+\cdots p_n)=\infty$；

ⅲ）　$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在　　则　　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{P_1a_1+P_2a_2\cdots+P_na_n}{P_1+P_2+\cdots+P_n}=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$

例9　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}}$

解　令$p_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ $(n=1,2,\cdots)$，则$p_n>0$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}(p_1+p_2+\cdots p_n)=\infty$

再令　$p_na_n=\dfrac{1}{n}$，则$a_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}}$，且$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}=0$

因为　$\dfrac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}}=\dfrac{p_1a_1+p_2a_2+\cdots+p_na_n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}$

由加权算术平均值的极限与数列$\{a_n\}$的极限相等的公式有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{p_1a_1+p_2a_2+\cdots p_na_n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}=\lim_{n\to\infty}a_n=0$$

7°连续函数代入法

（1）若$f(x)$在$x=x_0$处连续，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，所以，若$x_0$为初等函数$f(x)$

定义区间内之一点，则可利用 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$求极限。

(2)若$f[\varphi(x)]$是复合函数，又 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$，且$f(u)$在$u=a$处连续，则 $\lim\limits_{x\to x_0}$ $f[\varphi(x)]=f[\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)]=f(a)$，所以求复合函数的极限值时，可利用其连续性的特点将极限号"移"到复合函数的运算符号里面。

例10 求极限 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} Sin x\, Sin 2x\, Sin 3x$

解 由$Sin x$，$Sin 2x$，$Sin 3x$在$x=\frac{\pi}{4}$的连续性，有

$$原式=Sin\frac{\pi}{4}Sin\frac{\pi}{2}Sin\frac{3\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}$$

例11 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty} lg\frac{x^2+100}{100x^2+1}$

解 由复合函数的连续性，有

$$原式=lg\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+100}{100x^2+1}=lg\frac{1}{100}=-2$$

8° 变量代换法

有时采用变量代换，可给求极限带来方便，甚至可使$\frac{0}{0}$型，$\frac{\infty}{\infty}$型等未定型极限转化。

例12 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n-1}{4^n-1}$

解 令$t=2^n$，则当$n\to\infty$时，$t\to+\infty$

同时有 $4^n=(2^2)^n=(2^n)^2=t^2$，从而求得极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n-1}{4^n+1}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t-1}{t^2+1}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}}{1+\frac{1}{t^2}}=0$$

例13 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1}$（$m$、$n$为大于1的正整数）

解 令$x=t+1$，$x\to 1$时，$t\to 0$，则有

$$原式=\lim_{t\to 0}\frac{(t+1)^m-1}{(t+1)^n-1}$$