航空高等院校教材

飞行器振动基础

南京航空学院
《飞行器振动基础》编写组

航空专业教材编审组

目　录

前　　言

随着现代科学技术的发展，振动分析在飞行器设计中，以及船舶设计、土建设计、机械设计等方面都占有愈来愈重要的地位。尤其是像飞行器这类结构，振动问题显得更为重要。飞行器在起飞、着陆、以及整个飞行过程中都经受有振动。飞机和直升飞机受到大气紊流引起的或其他振源产生的各种类型的变化载荷，都会使飞机和直升飞机发生振动。这类振动会使驾驶员和乘员易于疲劳，乘坐品质降低，重则导致驾驶员无法驾驶飞机；会使机载仪表不能正常工作，失去可靠性；会使结构产生交变应力，导致疲劳破坏；会使结构发生共振，以致迅速破坏。因而，在飞机和直升飞机的设计、研究、试飞，以及在航线上飞行过程中，经常需要解决它们的振动问题。飞行器还存在着另一种振动现象，称为动不稳定，如飞机机翼的颤振，直升飞机的“地面共振”等。它们是系统本身自己激发出的一种突发性的振动，故又称为自激振动。一旦发生这类振动，振幅急剧增大，难以及时处置，常导致灾难性事故。为了提高飞行器的性能，必须降低它的振动水平和防止自激振动的出现。要解决这些振动问题，必须用振动理论来指导。所以，振动理论方面的知识是工程技术人员所必不可少的。在高等工科院校中飞行器、应用固体力学等许多专业把“振动基础”定为一门必修课程。

《飞行器振动基础》是叙述飞行器等结构振动分析的基本理论和基本方法的。它是作为高等工科院校飞行器专业及应用固体力学专业“振动基础”课程的教材进行编写的。同时，考虑到从事振动分析的工程技术人员的需要，在内容上略加扩充，以便进一步学习振动方面的有关内容。

《飞行器振动基础》是研究机械系统（以后简称为系统）的振动问题。所谓机械系统是指由一些具有力学特性的元件组成的组合体，它可以完成某种特定的功能。组成系统的元件有弹性元件、惯性元件、阻尼元件等。系统所产生的在其平衡位置附近的往复运动称为振动。振动分析就是研究这种运动的规律性。

振动分析的一个首要问题是建立系统的数学模型。系统经过抽象化后，它的力学特性可用数学关系式表示。表达系统力学特性的数学方程称为系统的数学模型。为建立数学模型，要对系统进行抽象化，忽略一些次要因素，突出它的主要力学性能；分析各元件的力学特性，以及它们之间的组合关系；然后对抽象化了的系统，应用力学原理建立它们之间的数量关系，写出描述系统力学特性的数学方程，建立数学模型是进行振动分析的关键一步，它决定了振动分析的正确性和精确度，又决定了振动分析的可行性和繁简程度，

按系统的数学模型可分为线性系统和非线性系统。若系统内元件的力学特性是线性的，建立的数学方程是线性微分方程，则称这系统为线性系统。线性系统的振动分析占有重要地位。系统振动往往是微小振动，它的元件的力学特性是在线性范围内，所以，实际上遇到的振动问题很多是属于线性振动范畴。线性振动的一个重要性质是线性叠加原理，它给振动分析带来了方便。线性振动的分析方法已发展完善，所以这里主要叙述的是线性振动。但是，非线性因素在不少的情况下是不可避免的，有时必须予以考虑，因此对非线性振动的特性也需要

有一个初步的了解。在本书的第九章中介绍了用定性方法和定量方法分析非线性系统的振动，给出了它的基本性质。

按系统的数学模型还可分为单自由度系统、多自由度系统和无限多自由度系统。描述系统运动形态的独立座标数目是系统的自由度数。例如单摆（数学摆），如图0—1所示，描述它的运动形态仅需一个偏离铅垂位置的转角 θ，它是个单自由度系统。单自由度系统是一种最简单的系统，对它的分析可得出系统振动的主要特性，所以这里用较大的篇幅来叙述。分别在第一、二、三章叙述。

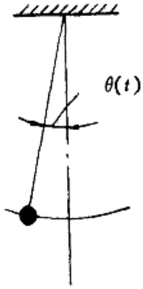


图0—1　单摆

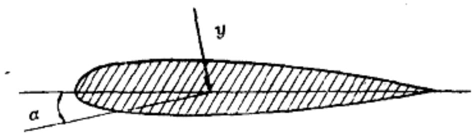


图0—2　机翼的二元翼段

例如机翼的二元翼段，如图 0—2 所示。描述它的运动形态需一个沉浮座标 y（铅垂位移）和一个俯仰座标 α（俯仰转角），它是个二自由度系统。这类系统是由有限个弹性元件、惯性元件和阻尼元件所组成的多自由度系统，又称之为集中参数系统。这在第四章内叙述。

例如直升飞机的桨叶，如图 0—3 所示。它是一根弹性直梁，它的运动形态需用它的挠曲方程 $w(x)$ 来描述，是个无限多自由度系统。这类系统是由连续弹性体组成，又称为连续参数系统。在第五章内叙述了轴的扭转振动和梁的弯曲振动等这些简单的连续参数系统的振动问题。

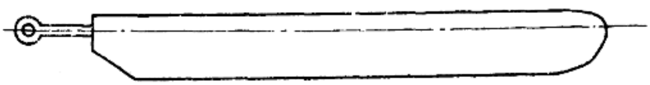


图0—3　直升飞机的桨叶

实际结构是由连续弹性体组成，是个无限多自由度系统。但由于结构的复杂性，对它的振动分析是困难的，甚至是不可能的，往往需要将系统作进一步的简化，主要是降低它的自由度数目。特别是现代数字电子计算机的广泛使用，离散化成为一种重要方法。它把复杂的连续参数系统离散化为有限多自由度系统，称之为离散参数系统。在第六章内对离散参数系统应用矩阵分析方法作了进一步的分析，叙述了系统振动的模态理论。

振动分析主要是两方面的内容：系统的固有动力特性与系统的动力响应。系统的固有动力特性是包括固有频率、固有振型、模态质量等的模态参数。它们是与外加激励无关的系统本身所具有的振动特性。它的理论分析是建立在没有外加激励的自由振动微分方程的求解上。它反映了系统的基本振动性质，所以，它在振动分析中占有特别重要的地位，对系统的振动分析常常是首先要分析系统的固有动力特性。系统的动力响应是系统在外加激

励作用下所产生的运动响应，包括位移响应、速度响应、加速度响应等。它的分析是建立在外加激励作用下的受迫振动微分方程的求解上。这是振动分析的主要内容。关于动不稳定问题超出了本书的范围，它们将在专门课程中介绍。

按激励与响应的变化规律可分为确定性振动与随机振动。确定性振动是系统振动的时间历程可以用确定的时间函数来描述，因而每一时刻的运动量是予知的确定值。它包括简谐振动、非简谐的周期振动和非周期的一般振动。确定性振动的分析是本书的重点，其中最基本的是简谐激振力作用下的稳态响应。它从另一方面给出了系统的振动特性，包括幅频特性、相频特性、共振等概念。从而引出了激励与响应之比——机械阻抗的概念，它是描述系统振动特性的又一个重要的物理量。这方面的分析在振动测试技术中具有重要意义。随机振动是系统振动并不能予先确定，而具有随机性，只能给出它的统计特性。自然界中大量存在的是随机振动。在第十章中介绍了随机振动的初步知识，若需进一步了解，则须阅读有关的专著。

振动分析的方法是建立在数学力学的基础上的。建立系统数学模型的方法主要是采用牛顿动力学的基本定律和基本定理。最基本的是牛顿第二定律以及由它导出的动量定理与动量矩定理。对于集中参数系统，应用分析力学中的拉格朗日方程是很有效的方法。分析系统的固有动力特性与动力响应的方法主要是采用微分方程求解的方法，辅以介绍一下拉氏变换的方法。考虑到数学知识的基础，这部分内容可不作要求。

振动分析除了上述方法外，能量分析方法是又一个重要方法。它给出清晰的物理概念，又能加深对系统振动特性的理解。它能用于建立系统的数学模型，并可作为离散化方法的理论基础。它又能作为一种重要的振动分析近似方法，特别是瑞利法和李茨法。在第七章内介绍了这种能量分析方法。

随着电子计算机的广泛使用，建立数学模型的离散化方法和分析固有动力特性与动力响应的数值计算方法愈来愈显得重要。在第七章内扼要地介绍了一种重要而又广泛应用的有限元素法在振动分析中的应用，和另一种传递矩阵法。在第八章内简要地介绍数值计算方法，侧重于讲解计算方法本身，而没有介绍具体的计算机程序。

参加本书编写工作的有：张阿舟、朱德懋、汤德满、张令弥、周传荣、顾仲权、陈振藩等同志，习题是由孙久厚、古增坤等同志选编的。

第一章　单自由度系统的自由振动

§1—1　简谐振动及其表示法

最简单的振动系统是由一个具有一定质量的重块（惯性元件）和一根无质量的弹簧（弹性元件）所组成的单自由度系统，如图1—1。通常称之为重块——弹簧系统。描述这个系统运动形态的独立座标是重块的铅垂位移 x，故它是一个单自由度系统。这个系统的重块在其平衡位置附近产生往复运动，称之为振动。暂且不涉及产生振动的原因，首先来分析一下它的运动量（位移、速度和加速度）随时间变化的规律，称之为它们的时间历程。这部分内容便是振动运动学。

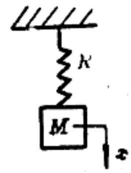


图1—1　重块——弹簧系统

我们知道，图1—1所示系统所作的是简谐振动。若以系统的平衡位置为原点，系统的位移时间历程是时间 t 的正弦函数，即

$$x(t)=A\sin(\omega t+\varphi) \tag{1—1}$$

描述简谐振动除了用上述的三角函数外，还可以用旋转矢量、复数等。下面分别介绍一下简谐振动的各种表示法及由此得出的简谐振动的一些特性。

（一）简谐振动的三角函数表示法

简谐振动可以用(1—1)式的正弦函数表示，也可以用余弦函数表示为

$$x(t)=A\cos(\omega t+\varphi') \tag{1—2}$$

它们两者是表示同一个简谐振动，仅它们的初相位不同，$\varphi'=\varphi-90°$。

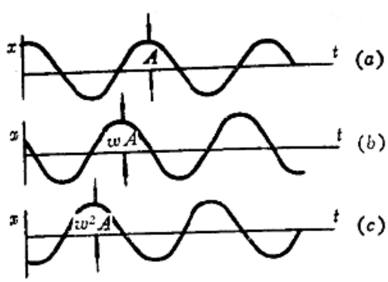


图1—2　简谐振动的运动

为了清晰地看出简谐振动的位移时间历程，可以用时间 t 为横座标，位移 x 为纵座标的曲线来描绘，称之为运动图。把它作在图1—2(a)上。由此图上可以看出以下特性：

(1) 系统作简谐振动时，它偏离平衡位置的最大位移始终等于 A，称之为振幅。图1—1所示的重块——弹簧系统，重块所作的是线位移，则它的振幅具有长度量纲，单位是米，记作 m。由此可见，简谐振动是等幅振动。

(2) 简谐振动是一种最简单的周期运动。经过一定的时间间隔 T，系统将重复它的运动过程，即

$$x(t+T)=x(t) \tag{1—3}$$

这种性质称为周期性。时间间隔 T 称为周期，它具有时间量纲，单位是秒，记作 s。

简谐振动的周期不难根据 (1—3) 式确定，它为

$$T=\frac{2\pi}{\omega} \tag{1—4}$$

应当指出，满足周期性条件（1—3）式的解不是唯一的，它的整数倍也都满足。我们所定义的周期是它的最小的正数。

在引入周期概念的同时，在振动分析中引入了另一个重要概念——频率，定义为

$$f=\frac{1}{T} \tag{1—5}$$

它表示了系统在单位时间内作重复运动的次数。对它引入频率量纲，单位为赫兹，记作Hz，表示每秒振动次数。

与频率相同的另一个概念是圆频率

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=2\pi f \tag{1—6}$$

它是频率的 2π 倍。它们两者表示的是同一个物理量。圆频率也是频率量纲，单位是秒分之弧度，记作 rad/s。在今后的振动分析中，我们将不加区别地统称为频率，仅在使用的符号及相应的单位上加以区别。

(3) 表示简谐振动的三角函数的自变量 $\omega t+\varphi$ 称为振动的相位，而 φ 称为初相位，它表示初瞬 ($t=0$) 的相位。它是角度量纲，单位是度或弧度，记作 ° 或 rad。初相位是取决于时间参考点（时间轴的原点）的选择，也就是说，初相位是相对于时间参考点而言的。

对于简谐振动，相位增加 2π 弧度，系统将重复它的运动过程，即完成一个周期。

$$\omega(t+T)+\varphi-(\omega t+\varphi)=2\pi$$

由此推出周期公式 (1—4)。故简谐振动完成一个周期，相位增加 2π。由此可看出频率的物理意义。

综合以上的分析，表示一个简谐振动需要三个要素：频率（或周期）、振幅和初相位。由它们完整地描述了一个简谐振动。它们不仅确定了位移时间历程，而且还确定了速度与加速度的时间历程。

系统振动的速度时间历程由下式决定

$$\dot{x}(t)=\frac{dx}{dt}=\omega A\cos(\omega t+\varphi)$$

$$=\omega A\sin\left(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{2}\right) \tag{1—7}$$

我们可以对它作如同（1—1）式同样的分析。用时间 t 为横座标，速度 $\dot{x}$ 为纵座标来绘制速度时间历程的变化曲线，把它作在图 1—2(b) 上。速度也是周期函数，它的频率也是 ω。速度的振幅是 ωA，是位移振幅的 ω 倍。速度的相位始终导前位移的相位 90°。

系统振动的加速度时间历程是

$$\ddot{x}(t)=\frac{d^2x}{dt^2}=-\omega^2 A\sin(\omega t+\varphi)$$

$$=\omega^2 A\sin(\omega t+\varphi+\pi) \tag{1—8}$$

用以时间 t 为横座标，加速度 $\ddot{x}$ 为纵座标来绘制加速度时间历程曲线，把它作在图 1—2(c) 上。加速度也是周期函数，它的频率也是 ω。加速度振幅是 $\omega^2 A$，是位移振幅的 ω^2 倍。加速度的相位始终导前位移的相位 180°，即反向。

由此可见，简谐振动的位移、速度、加速度都是以同频率作周期性变化。它们三者的相位之间在任一瞬时有固定的关系，幅值之间也有固定关系。这些构成了简谐振动的重要性质。

（二）简谐振动的旋转矢量表示法

简谐振动在某一时刻的位移可用它的振幅 A 和相位 $(\omega t+\varphi)$ 表示。象这能具有幅值和相位的量称为相量，它可以用一平面矢量表示。它的模（范数）是幅值，它的幅角是相位，见图 1—3。当这平面矢量以频率 ω 为其角速度作逆时针旋转，则它的铅垂轴（或水平轴）上的投影给出位移时间历程。这表示了简谐振动三要素的几何意义，从而，使我们可加深对它的理解。

在振动分析中，常会遇到这样的问题：已知两个同频率的简谐振动，设为

$$x_1=A_1\sin(\omega t+\varphi_1)$$

$$x_2=A_2\sin(\omega t+\varphi_2)$$

要求它们的合成振动

$$x=x_1+x_2$$

若采用三角函数表示法来分析这问题，运算是很烦琐的。若采用旋转矢量表示法，则显得容易得多了。这两个简谐振动分析可用旋转矢量表示，见图 1—4，由于它们是同频率，它们

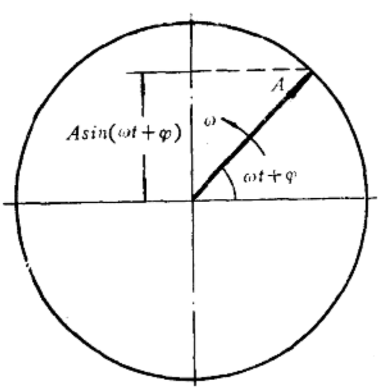


图1—3　旋转矢量表示法

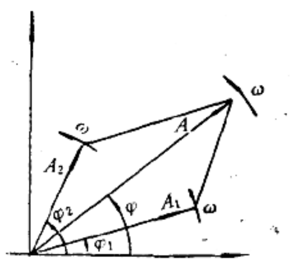


图1—4　同频率简谐振动的合成

是以同样角速度旋转的。因而，这两个旋转矢量的相对位置不改变。它们的合成就可以采用矢量和的办法给出，得出合成振动的旋转矢量。这两个简谐振动的相位差是

$$\alpha=\varphi_2-\varphi_1$$

它给出了这两个旋转矢量之间的夹角，于是，根据余弦定理可确定合成振动的振幅

$$A^2=A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\alpha \tag{1—9}$$

同时，可确定它的初相位

$$\varphi=\varphi_1+\mathrm{tg}^{-1}\frac{A_2\sin\alpha}{A_1+A_2\cos\alpha} \tag{1—10}$$

这合成的旋转矢量也是以角速度 ω 旋转，说明了合成运动也是以 ω 为频率的简谐振动。

例1—1 设有两个简谐振动

$$x_1=a\cos\omega t$$

$$x_2=b\sin\omega t$$

试求它们的合成振动。

解：合成振动是

$$x=x_1+x_2=a\cos\omega t+b\sin\omega t$$

它可写为

$$x=a\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)+b\sin\omega t$$

它们之间的相位差是 $\frac{\pi}{2}$。应用矢量和的办法，求得合成振动的振幅和初相位分别是

$$\left.\begin{aligned}A^2&=a^2+b^2\\ \varphi&=\mathrm{tg}^{-1}\frac{a}{b}\end{aligned}\right\} \tag{1—11}$$

即合成振动是

$$x=A\sin(\omega t+\varphi)$$

这些公式，我们将在分析自由振动时应用它。

简谐振动的速度和加速度同样地也可用旋转矢量表示。现把位移、速度和加速度旋转矢量综合画在图1—5上。由于它们都有相同的频率，它们是以相同的角速度旋转，故它们的相对位置不变。它们的振幅分别是 A，ωA，$\omega^2 A$。它们的相位是依次导前 90°。根据旋转矢量，我们不难得出它们的时间历程及其运动图。

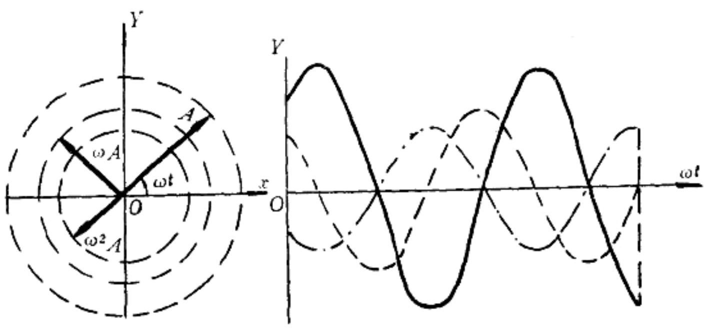


图1—5 位移、速度和加速度旋转矢量

（三）简谐振动的复数表示法

简谐振动的更为一般的表示法是复数表示法，它便于在振动分析中使用。复数 z 的指数表示形式是

$$z = re^{i\theta}$$

它的模记作

$$\|z\| = r$$

它的幅角记作

$$\arg(z) = \theta$$

我们可以用它的模表示振幅，幅角表示相位，则复数表示了一个简谐振动，它是

$$z = Ae^{i(\omega t+\varphi)} \tag{1—12}$$

它可改写为

$$z = Ae^{i\varphi} \cdot e^{i\omega t} \tag{1—13}$$

其中 $e^{i\omega t}$ 称为旋转因子，它对应为旋转矢量以角速度 ω 旋转。$Ae^{i\varphi}$ 称为复振幅，它不仅给出振动的振幅，而且给出它的初相位，它对应的是初始状态，用 z_0 表示。

$$z_0 = Ae^{i\varphi} \tag{1—14}$$

复数也可以用它的实部和虚部表示，它的实部记作 $Re(z)$，它的虚部记作 $Im(z)$，则（1—12）式的实部与虚部分别是

$$Re(z) = A\cos(\omega t+\varphi)$$

$$Im(z) = A\sin(\omega t+\varphi) \tag{1—15}$$

它们就是简谐振动的位移时间历程。

简谐振动的速度和加速度同样地也可用复数表示。它的位移是由(1—12)式给出，则它的速度和加速度分别是

$$\dot{z} = \frac{dz}{dt} = i\omega Ae^{i(\omega t+\varphi)}$$

$$\ddot{z} = \frac{d^2z}{dt^2} = -\omega^2 Ae^{i(\omega t+\varphi)} \tag{1—16}$$

上述的三种表示方法各有特点，三角函数表示法比较直观，旋转矢量表示法几何意义明确，复数表示法便于分析。在振动分析中将根据不同情况加以选用。同时，必须熟悉它们之间的转换关系。在振动分析时相互变换，能加深对振动现象的理解。

§1—2 周期振动及其谱分析

系统的振动并不一定是简谐振动，有时呈现出一种非简谐的周期振动（简称为周期振动）。

周期振动是经过一定的时间间隔 T，系统将重复它的运动过程，即

$$x(t+T) = x(t) \tag{1—17}$$

时间间隔 T 是其振动周期。它的时间历程用运动图表示在图 1—6 上。由此可见，一般周期振动比上述的简谐振动要复杂得多，它的分析方法是谱分析方法。

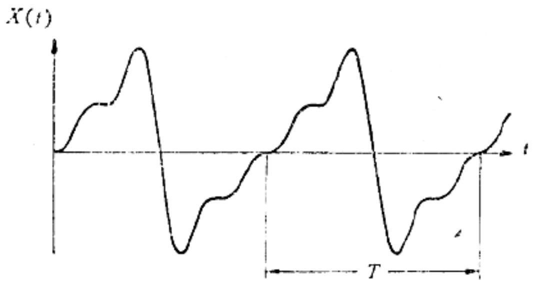


图1—6 周期振动

由数学分析理论知，一个周期函数 $x(t)$ 可展开为付氏级数，只要它在一个周期的区间 $[0, T]$ 内是分段单调连续。于是，它可写为付氏级数

$$x(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos n\,\omega_0\,t+b_n\sin n\,\omega_0 t\right] \tag{1—18}$$

其中 a_0，a_n，$b_n(n=1, 2, \cdots)$ 称为付氏系数，及

$$\omega_0=\frac{2\pi}{T} \tag{1—19}$$

是周期振动的基频。付氏系数由下列公式确定

$$\begin{aligned} a_0&=\frac{2}{T}\int_0^T x(t)dt \\ a_n&=\frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos n\,\omega_0 t dt \\ b_n&=\frac{2}{T}\int_0^T x(t)\sin n\,\omega_0 t dt \end{aligned} \tag{1—20}$$

根据上节对同频率简谐振动的合成分析的（1—11）式，公式（1—18）可改写为

$$x(t)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\left(n\,\omega_0\,t+\varphi_n\right) \tag{1—21}$$

即一个周期振动可以用（1—21）式表示为不同频率的简谐振动的迭加。它的第一项是

$$A_0=\frac{a_0}{2}=\frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt \tag{1—22}$$

它给出周期振动的运动量 x 在一个整周期内的平均值，称之为直流分量。在总和号内的任意项是

$$A_n\sin(n\,\omega_0\,t+\varphi_n) \tag{1—23}$$

它是以基频 ω_0 的 n 倍为其频率的简谐振动，称之为 n 阶谐波分量。它的幅值与初相位分别是

$$A_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2} \tag{1—24}$$

$$\varphi_n=\mathrm{tg}^{-1}\frac{a_n}{b_n} \tag{1—25}$$

由上分析得出：周期振动可用付氏级数分解为各阶谐波分量的迭加。它具有如下特性：

(1) 组成周期振动的各阶谐波分量的频率是基频的整数倍，即它具有频率分别为 ω_0，$2\omega_0$，$3\omega_0$，……$n\omega_0$，……的谐波分量。它不含有其他频率的谐波分量。

(2) 组成周期振动的各阶谐波分量的幅值是由付氏系数用(1—24)式确定，不同阶谐波分量具有不同的幅值。为了清楚地给出它们的幅值，用频率为横座标，幅值为纵座标，可作出幅值的频谱图，见图1—7(a)。由于它仅出现一些离散点，构成的是一张离散的频谱图。

(3) 组成周期振动的各阶谐波分量的初相位由付氏系数用(1—25)式确定，不同阶谐波分量具有不同的初相位。这就是说，各阶谐波分量之间一般地说是具有相位差的，设为α，

$\alpha=0$　　同相

$\alpha=\pi$　　反相

$\alpha=\pm\dfrac{\pi}{2}$　　正交

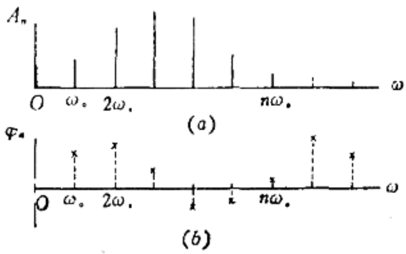


图1—7　周期振动的频谱图

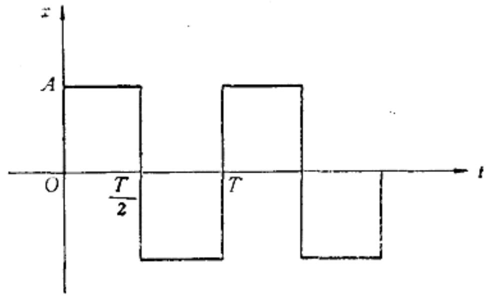


图1—8　矩形波

为了清楚地给出它们的相位，用频率为横座标，相位为纵座标，可作出相位的频谱图，见图1—7(b)。它同样地是离散频谱图。

以上的分析称之为谱分析。

例1—2　求图1—8所示在时间间隔$[0,T]$的矩形波的频谱图。

解：图1—8所示矩形波的时间历程是

$$x(t)=\begin{cases}+A, & 0<t<\frac{1}{2}T\\ -A, & \frac{1}{2}T<t<T\end{cases}$$

其中T是矩形波的周期。根据(1—20)式，求得付氏系数是

$$a_0=0$$

$$a_n=0\qquad(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

$$b_n=\begin{cases}\dfrac{4A}{n\pi} & (n=1,\ 3,\ \cdots)\\ 0 & (n=2,\ 4,\ \cdots)\end{cases}$$

于是，由(1—24)及(1—25)式，得幅值与相位是

$$A_n=\begin{cases}\dfrac{4A}{n\pi} & (n=1,\ 3,\ \cdots)\\ 0 & (n=2,\ 4,\ \cdots)\end{cases}$$

$$\varphi_n=0$$

由此可见，矩形波的各阶谐波分量是同相的。它们的幅值频谱图绘于图 1—9。

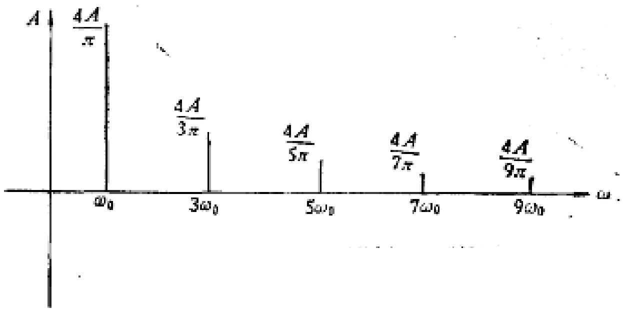


图1—9 矩形波的幅值频谱图

由矩形波的谱分析看出，它的基频是

$$\omega_0=\frac{2\pi}{T}$$

基频的谐波分量占主要地位，它的幅值最大。当在基频分量上迭加上三阶谐波分量所给出的波形已逐渐接近矩形波。若再迭加上五阶谐波分量，已近似于矩形波。这迭加过程见图 1—10。高阶谐波分量通常是比较小的，所以，常常用有限项谐波分量的迭加来近似周期振动，这将使分析简化。

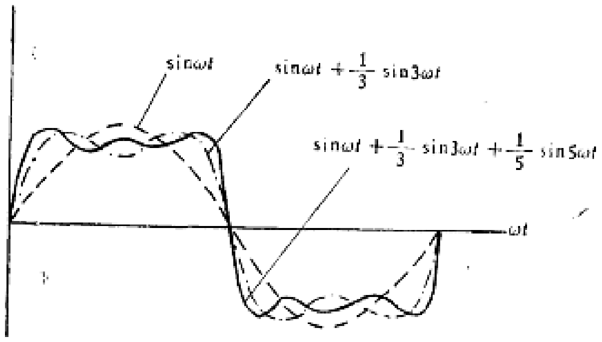


图1—10 矩形波的迭加过程

为了对不同频率的谐波分量的迭加有进一步的理解，这里进一步讨论一下二个不同频率的简谐振动的合成问题。设有两个简谐振动

$$x_1=A_1\sin(\omega_1 t+\varphi_1)$$
$$x_2=A_2\sin(\omega_2 t+\varphi_2)$$

它们的合成振动是

$$x=x_1+x_2=A_1\sin(\omega_1 t+\varphi_1)+A_2\sin(\omega_2 t+\varphi_2)$$

现分三种情况来讨论：

(1) 它们的频率是可通约的，即可写为

$$\omega_1=m\omega_0$$

$$\omega_2=n\,\omega_0$$

其中 m 与 n 是互质整数，则它们的合成振动具有周期性，它的基频是

$$\omega=\omega_0$$

这就是说，两个可通约的不同频率的简谐振动，它们的合成振动是周期振动。这个结论在上面周期振动的谱分析结果已经给出了。

(2) 它们的频率是不可通约的，则它们的合成振动是非周期振动。关于非周期的一般振动将在以后讨论。

(3) 它们的频率是很相近的近频情况，它们的合成振动将出现"拍"的现象。先讨论一个特殊情况，设两个近频的简谐振动有相同的振幅

$$x_1=A_1\sin(\omega_1 t+\varphi_1)$$

$$x_2=A_1\sin(\omega_2 t+\varphi_2)$$

它们的合成振动是

$$x(t)=2A_1\cos\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t+\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}\right)\sin\left(\frac{\omega_2+\omega_1}{2}t+\frac{\varphi_2+\varphi_1}{2}\right) \quad (1\text{—}26)$$

由于是近频情况，可将它写成"调制波"形式

$$x(t)=A(t)\sin\left(\frac{\omega_2+\omega_1}{2}t+\frac{\varphi_2+\varphi_1}{2}\right) \quad (1\text{—}27)$$

其中

$$A(t)=2A_1\cos\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t+\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}\right) \quad (1\text{—}28)$$

即合成振动是以$\frac{\omega_2+\omega_1}{2}$为频率作变幅振动，它的幅值是在缓慢地作周期变化，幅值的包络线由 $A(t)$ 给出。这种振动现象称为"拍"。这种周期变化的拍的频率称为拍频，它等于 $\omega_2-\omega_1$。拍的振动波形以 $x_1=2\sin 5t$，$x_2=2\sin 6t$ 为例作出它们合成振动表示在图1—11(*a*)上。

对于一般的近频情况也有相同的结果。它们的合成可以采用在任意瞬时 t 的矢量求和法来确定。在瞬时 t，这两个矢量的幅值为 A_1 和 A_2，相位差为 $(\omega_2-\omega_1)t+(\varphi_2-\varphi_1)$。它们的合成矢量的"幅值"是

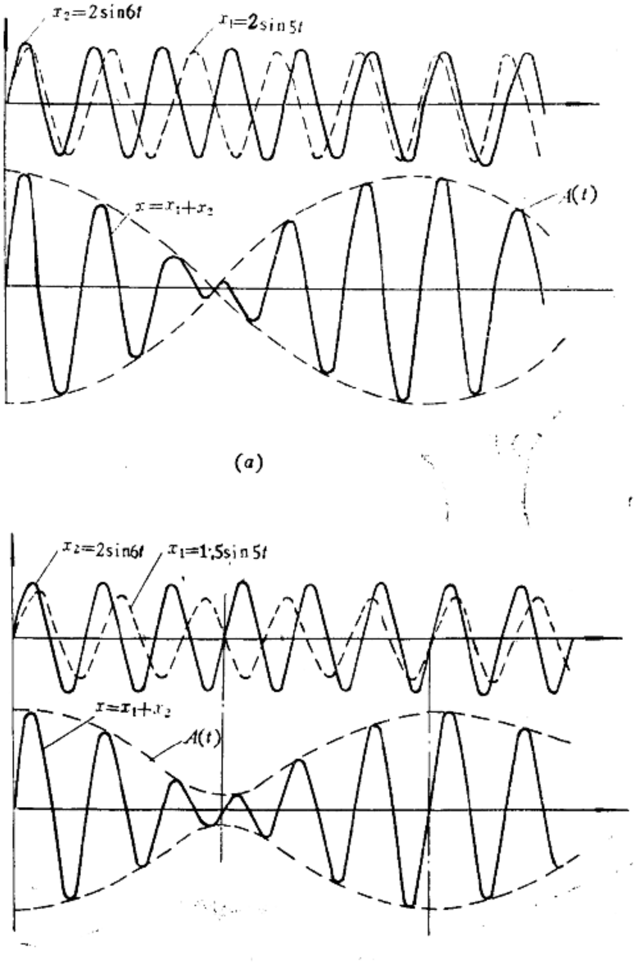
$$A(t)=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos[(\omega_2-\omega_1)t+(\varphi_2-\varphi_1)]} \quad (1\text{—}29)$$

"相位"是

$$\omega_1 t+\psi(t)=\omega_1 t+\varphi_1+\mathrm{tg}^{-1}\frac{A_2\sin[(\omega_2-\omega_1)t+(\varphi_2-\varphi_1)]}{A_1+A_2\cos[(\omega_2-\omega_1)t+(\varphi_2-\varphi_1)]} \quad (1\text{—}30)$$

则

$$x(t)=A(t)\cdot\sin[\omega_1 t+\psi(t)] \quad (1\text{—}31)$$



(b)

图1—11 拍的现象

得出了与（1—27）式相似的结果。可以证明，它是以近似于 $\frac{\omega_2+\omega_1}{2}$ 的频率作变幅振动。幅值在 $|A_1+A_2|$ 和 $|A_1-A_2|$ 之间缓慢地作周期变化。现以 $x_1=1.5\sin 5t$，$x_2=2\sin 6t$ 为例绘制它的拍的振动波形于图 1—11(b) 上。

对于周期振动也可以用复数形式表示。根据欧拉公式

$$\cos n\,\omega_0 t=\frac{1}{2}(e^{in\omega_0 t}+e^{-in\omega_0 t})$$

$$\sin n\,\omega_0 t=\frac{1}{2i}(e^{in\omega_0 t}-e^{-in\omega_0 t})$$

则