$X+Y=Z$

你懂得列方程吗

费得意 编著

$3(X+4)=4(X+1)$

广西人民出版社

你懂得列方程吗

费得意　编著

广西人民出版社

你懂得列方程吗

费得意 编著

☆

广西人民出版社出版
（南宁市河堤路14号）
广西新华书店发行　广西民族印刷厂印刷

开本 787×1092　1/32　7.125印张　158千字
1982年7月第1版　1982年7月第1次印刷
印数 1—37,130册
书号：7113·436　定价：0.57元

编 者 的 话

初中代数中的应用题是初中数学的重要内容，是培养学生分析问题、解决问题的主要课题之一．学会布列方程和方程组解答应用题是初中学生应具有的一项技能．由于这部分内容牵涉的知识面广、灵活多变、纵横交错，对于初中学生来说确是一大难点．

为了帮助初中学生提高解答应用题的能力，编者根据三十年来的教学实践编写了这本《你懂得列方程吗》．书中选择了各种不同类型的例题200例，通过详细剖析解题思路，借助直观的图解或简明的表解，着重研讨了如何设置未知数和布列方程，使初中学生看了以后收到触类旁通、举一反三的效果．书末配有40个练习题供读者练习时选用．

本书除供初中学生学习外，对于担任初中数学教学的青年教师也是一本教学参考读物．

由于水平有限，书中或有疏漏和错误之处，敬请读者批评指正．

1981年8月

目　　录

第一章　列方程（或方程组）解应用题的步骤和方法

在小学我们曾经学习过用四则运算解答应用题，要知道有的应用题，如果用算术方法去解答是比较困难甚至是不可能解答的。我们现在应该学会用代数的方法通过列方程（或方程组）解答应用题。那么列方程解应用题与用算术四则运算解应用题又有什么联系和区别呢？

首先让我们通过对两道应用题不同的解答，作一次初步分析。

例1. 甲、乙两车间今年第一季度都超额完成生产计划：甲车间完成计划的125%，乙车间完成计划的118%，两车间共生产某机件1340件，比原计划超产240件。问甲、乙两车间原计划各生产多少件？

（一）算术解法：

两车间原计划总产量为

$$1340-240=1100（件）.$$

假如两车间都完成原计划的118%，则总产量应有

$$1100\times118\%=1298（件）.$$

因为甲车间的实际产量是原计划的125%，因此它多完成原计划的

$$125\%-118\%=7\%.$$

这7%的产量又是多少呢？显然，从

$$1340-1298=42\text{（件）},$$

可以看出，这42件产品就是甲车间的7%的产量．因此甲车间原计划产量应为

$$42\div7\%=600\text{（件）},$$

如果列成总的算术式就是

$$[1340-(1340-240)\times118\%]\div(125\%-118\%)$$
$$=42\div7\%$$
$$=600\text{（件）}.$$

故乙车间原计划产量为

$$1100-600=500\text{（件）}.$$

答：甲车间原计划生产某机件600件，乙车间原计划生产某机件500件．

（二）代数解法之一：

设甲车间原计划生产某机件x件，则乙车间应计划生产某机件（$1340-240-x$）件．

根据题意，得

$$x\times125\%+(1340-240-x)\times118\%=1340.$$

解这个方程，得

$$x=600\text{（件）}.$$

所以甲车间计划生产600件，则乙车间计划生产

$$1340-240-x=1100-600$$
$$=500\text{（件）}.$$

答：甲车间原计划生产某机件600件，乙车间原计划生产某机件500件．

（三）代数解法之二：

设甲车间原计划生产某机件x件，乙车间计划生产某机件y件．

根据题意，得

$$\begin{cases} x + y + 240 = 1340, \\ x \cdot 125\% + y \cdot 118\% = 1340. \end{cases}$$

解这个方程组，得

$$\begin{cases} x = 600, \\ y = 500. \end{cases}$$

答：甲车间原计划生产某机件600件，乙车间原计划生产某机件500件。

例2. 八时与九时之间，两针在什么时候成直角？

（一）算术解法：

八时正两针相距$5\times8=40$（分），两针成直角的现象可以出现两次：

第一次，分针在时针前15分钟，即比时针多走

$40-15=25$（分）.

因为分针每小时走一周，时针每小时走$\frac{1}{12}$周，速度之差为$1-\frac{1}{12}=\frac{11}{12}$.

$$\begin{aligned}\therefore\quad &(5\times8-15)\div\left(1-\frac{1}{12}\right)\\ &=25\div\frac{11}{12}\\ &=27\frac{3}{11}\text{（分）}.\end{aligned}$$

第二次，分针超过时针15分钟，即比时针多走

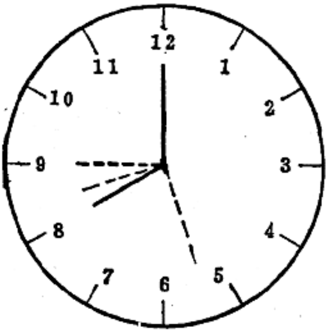
$40+15=55$（分）.

$$\therefore\quad (5\times8+15)\div\left(1-\frac{1}{12}\right)=60\text{（分）}.$$

答：两针在 8 时$27\frac{3}{11}$分或9时正成直角。

（二）代数解法：

分析：时针和分针在正八时的时候，它们的位置关系成



240°的角，而时针每分钟旋转$\left(\frac{1}{2}\right)^{\circ}$，分针每分钟旋转6°，两针成直角即两针相间90°。

解：设从八时正开始 x 分钟后两针成直角。依题意，

第一次：　$6x-\frac{1}{2}x=240-90$

$\therefore\quad x=27\frac{3}{11}$（分）。

第二次：　$6x-\frac{1}{2}x=240+90$

$\therefore\quad x=60$（分）。

答：8 时$27\frac{3}{11}$分或 9 时两针成直角。

从上述两个例题的两种解法中，可以看出算术解法和代数解法都需要从实际的数量关系中进行抽象，列式解题，这是它们共同的地方。但是，两种解题方法是不同的，特别是思路很不一样，用算术解题与列方程解题有很大的区别：

代数解法首先以字母代替未知数，从而使未知数在考虑所有的数量关系过程中，始终处于和已知数平等的地位，所以能全面地反映总的相等关系。

而算术解法始终使未知数处于特殊的地位，在解题过程中，一般是由已知数作先导，一步步向前探索，到解题基本结束，才建立要问的那个未知数与已知数之间的关系，这样做比较费时费力.

因此，我们必须掌握列方程解应用题的方法.

列方程或方程组解应用题将会碰到三大难关：

(1) 不善于用代数方法分析应用题的思路；

(2) 抓不住相等关系；

(3) 找出相等关系后不会列方程.

解决这三大难关的主要点应该选在第(2)关，要全力以赴地找出相等关系，它的关键又是深刻地理解题意，分析已知量和未知量的相依性.

列方程或方程组解应用题的步骤如下：

（一）分析题目，理解题意.

必须弄清楚下列各点：

(1) 题目中给出的已知量是什么；

(2) 题目中要求的未知量是什么；

(3) 题目中涉及的或者为了求出要求的未知量所必须涉及的其他未知量是什么；

(4) 题目中的已知量和未知量有什么相依的联系；

(5) 题目中的已知量和未知量各有什么约束条件.

（二）选择适当的未知数.

根据题意可设一个未知数，用一元方程来解，也可设两个或两个以上的未知数，用多元方程组来解. 所设的未知数有时就是所求的未知量，有时为了布列方程便利起见，也可以选择题目中所涉及的其他未知量. 设未知数时一定要用完整的语句，有单位的还要说明单位名称. 但有一点应该注

意，未知数设得多，布列方程比较容易，但解方程就比较麻烦。

（三）作出正确的示意图（如速度、行程、杠杆、几何方面的应用题），以利于分析数量之间的关系。

（四）根据题意，列出方程。

简单的题目在设定未知数及表示出其他未知数以后，只要按照题目给定的条件或者未知数之间或未知数与已知数之间存在的关系列成代数方程就行了。对比较复杂的题目，还需要进行必要的分析，根据那些还未曾用到的关系或条件列出方程。如果设定的未知数只有一个，那么只要布列一个方程；如果设定的未知数不止一个，那么要布列的方程数应与所设的未知数的个数相等。另外还要注意，对给出的条件应充分利用，不要漏掉，也不能重复用，否则，很难布列出方程，从而无法求解。方程中的数量关系的计量单位要统一，否则方程列出了，求出的解也不正确。还有一点值得注意的就是由于分析问题时思路不同，列出的方程很可能不一样：有的简，有的繁；有的则是同一个方程的不同形式，可以利用等式的性质，把其中一种形式变为另一种形式。而它们的答案是一样的。

（五）解方程，求出未知数的值。

解方程时要注意同解变形，避免产生增根或遗根现象.如果在解方程过程中由于非同解变形而引入增根，应通过验算加以排除；如果出现了遗根现象应查明原因，把遗根找回来。

（六）根据应用题的实际意义，检查所得的值是不是合理，最后写出答案。

这一步骤也是重要的，因为实际问题的解与所列方程的解两者之间是有区别的。我们看下面三个例子：

(1) 两数的和是9，这两数各是多少？

(2) 两匹布共长9丈，这两匹布各长多少？

(3) 9个学生去看电影，问男女学生各有几人？

这三道题的方程是：

(1) 设两数为 x 和 y，依题意得

$$x+y=9.$$

(2) 设两匹布的长分别为 x 丈和 y 丈，依题意得

$$x+y=9.$$

(3) 设男生有 x 人，女生有 y 人。依题意得

$$x+y=9.$$

很显然这三个方程都一样，从纯代数的角度考虑，方程的解，也应该是完全相同的。但是因为这三个问题的实际意义不同，答案是应该有所区别的。

在方程(1)中，x、y 是适合于方程的任意实数，这样的解有无数个；在方程(2)中，x、y 只能是不小于零和不大于9的实数，这样的解虽然也有无数个，但与(1)是不同的。因为(1)中的 x、y 可取负值，但(2)中的 x、y 就不能取负值。而方程(3)中的 x、y 却只能是不小于零和不大于9的整数，这样的解只有10个。即

$$\begin{cases}x=0\\y=9;\end{cases}\quad\begin{cases}x=1\\y=8;\end{cases}\quad\begin{cases}x=2\\y=7;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=3\\y=6;\end{cases}\quad\begin{cases}x=4\\y=5;\end{cases}\quad\begin{cases}x=5\\y=4;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=6\\y=3;\end{cases}\quad\begin{cases}x=7\\y=2;\end{cases}\quad\begin{cases}x=8\\y=1;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=9\\y=0.\end{cases}$$

下面让我们再举两个实例来探讨列方程或方程组解应用题的步骤和方法：

例3. 火车由A城开往B城，平均速度为每小时50公里。经过12小时，一架飞机由A城机场起飞，飞往B城。飞机速度是火车速度的7倍，并恰在由A到B的路程一半的地方追上火车。求A、B两城之间的距离。

分析与解答：

（一）分析题目，理解题意：

（1）已知量有：火车平均速度每小时50公里，
飞机平均速度每小时（50×7）公里，
火车多走12小时。

（2）未知量有：A、B两城之间的距离；
飞机飞行的时间，
飞机飞行的距离。

（3）未知量和已知量的条件以及它们之间的关系：

a. 飞机比火车每小时增快的速度（给定条件），
$50\times7-50=300$（公里/小时）.

b. 飞机追上火车时比火车多走的距离（给定条件），速度×时间＝距离（存在的关系）.
$50\times12=600$（公里）.

c. 飞机飞行的时间（过渡未知数），
距离÷速度＝时间（存在的关系）.
$600\div300=2$（小时）.

d. 飞机飞行的距离（过渡未知数），
速度×时间＝距离（存在的关系），
$50\times7\times2=700$（公里）.

e. A、B两城之间的距离（未知数）.

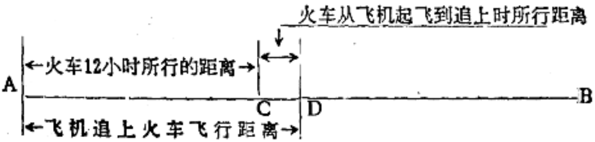
（4）约束条件：距离、速度、时间必须是正数。

（5）等量关系：飞机飞行时间＝飞机起飞后火车运行时间。

（二）注意选择适当的未知数。

本题有三个未知数，因此有三种不同的设未知数的方法。可以设A、B两城之间的距离为x公里，也可以设飞机飞行的时间为x小时，还可以设飞机飞行的距离为x公里。

（三）作出正确的示意图：



（四）根据题意，列出方程并进行解答。

(1) 思维方法与思维图解：

经常结合示意图采用分析法进行思维。从未知量探讨开始，通过逻辑推理，逐步推到已知量，这种解题方法叫做分析法。

a．要求A、B两城之间的距离，应先知道A到B的距离的一半（未知）。

b．要求A到B的距离的一半，即求火车共走的距离。要求火车总共所走距离，应该先知道火车运行的速度（已知）和火车运行的时间（过渡未知数）。

c．火车运行时间包括飞机起飞前火车运行时间（已知）和飞机起飞后火车运行时间（即飞机飞行时间）（过渡未知数）。

d．要求飞机飞行时间，应先知道飞机比火车多飞的距

离（已知）和飞机比火车每小时增快的速度（已知）。

e．思维图解：

A、B两城之间的距离

$=2\times$ A、D之间的距离

↓

火车运行速度 × 火车运行的时间

（已知）　　　　　　↓

飞机起飞前火车运行时间（已知） + 飞机起飞后火车运行时间

↓（等量关系）

飞机飞行时间

↓

飞机比火车多飞距离（已知） ÷ 飞机比火车每小时增快的速度．（已知）

(2) 列方程、解方程：

（解一）设A、B两城之间的距离为x公里．

由图解可知，未知数和已知数之间有以下的等量关系：

a．飞机飞行时间＝飞机起飞后火车运行时间．

b．飞机飞行距离＝火车所走的总距离．

究竟用哪一个等量关系去布列方程呢？这道题目中主要是距离、速度、时间三种量发生关系，因为速度是已知量，又把距离设为未知数，因此只有依靠时间的等量关系了．故应该选择等量关系*a*去布列方程．

∵飞机飞行的距离为$\frac{x}{2}$公里，飞行的速度为每小时（50×7）公里，根据“时间$=\frac{\text{距离}}{\text{速度}}$”可知

飞机飞行的时间是

$$\frac{x}{2}\div(50\times7)\text{（小时）}；$$

飞机起飞后，火车所走的距离为$\left(\frac{x}{2}-50\times12\right)$公里，它的速度为每小时50公里，所以飞机起飞后火车所走的时间是

$$\left(\frac{x}{2}-50\times12\right)\div50\text{（小时）}；$$

依题意，由等量关系 a 可得下列方程

$$\frac{x}{2}\div(50\times7)=\left(\frac{x}{2}-50\times12\right)\div50$$

解这个方程得　$x=1400$.

答：A、B 两城之间的距离为1400公里。

（解二）设飞机从起飞到追上火车需要 x 小时。

那么火车共运行（$12+x$）小时。

现在应该用什么等量关系去建立方程呢？

因为在距离、速度、时间这三个量中间，速度是已知的，时间已经假设为未知数x，所以只有依靠距离这个量来建立方程了．故应该选择下列等量关系去布列方程：

飞机起飞后飞机飞行距离＝火车所走的距离

∵飞机的速度是每小时（50×7）公里，火车的速度是每小时50公里，根据"距离＝速度×时间"可得：

飞机起飞后飞机飞行的距离是　$50\times7\times x$；

火车所走的距离是　$50(12+x)$。

故得方程　$50\times7\times x=50(12+x)$。

解这个方程得　$x=2$

∴A、B 两城之间的距离是

$50\times 7\times 2\times 2=1400$（公里）.

答：A、B两城之间的距离是1400公里.

例4. 某县农机厂金工车间共86个工人，已知每个工人平均可加工甲种部件15个，或者乙种部件12个，或丙种部件9个. 问应安排加工甲种部件、乙种部件和丙种部件各多少人，才能使加工后的3个甲种部件、2个乙种部件和一个丙种部件恰好配套.（即加工后的甲种部件个数是丙种部件个数的3倍，乙种部件个数是丙种部件个数的2倍）.

（1977年湖南省高等院校招生统考试题）.

分析：本题主要研究人数、劳动效率、总产品三种量之间的关系. 它们的相依关系是：

生产某种部件的总件数＝劳动效率×人数.

(1) 题目中的已知量有：

a. 车间共有86个工人；

b. 每人能加工甲部件15个，或乙部件12个，或丙部件9个；

c. 甲部件3个、乙部件2个、丙部件1个配成一套.

(2) 题目中的未知量有：

a. 生产甲种部件的人数；

b. 生产乙种部件的人数；

c. 生产丙种部件的人数；

d. 甲、乙、丙各部件的总件数.

(3) 题目中的等量关系有：

生产甲部件人数＋生产乙部件人数＋生产丙部件人数＝86.

甲部件个数＝3×丙部件个数；

乙部件个数＝2×丙部件个数.