高等数学（同济五版）学习指导与习题全解

QUANJIE

雷发社 黄璞生 主编

陕西科学技术出版社

学好高等数学的良师益友

- 各节内容精要
- 课后习题全解
- 常考题型分析
- 考研题目精解

高等数学(同济五版)

学习指导与习题全解

主编　雷发社　黄璞生
编者　金海红　杜建丽　侯奠社
　　　李毅君　郝修清　杨艺芳
　　　王建刚　付瑞琴　刘孝艳

陕西科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(同济五版)学习指导与习题全解/雷发社等编。—西安:陕西科学技术出版社,2003.8
ISBN 7-5369-3645-1

Ⅰ.高... Ⅱ.雷... Ⅲ.高等数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 032572 号

出版者 陕西科学技术出版社
西安北大街 131 号 邮编 710003
电话(029)7211894 传真(029)7218236
http://www.snstp.com
发行者 陕西科学技术出版社
电话(029)7212206 7260001
印　刷 陕西宝石兰有限责任公司印装
规　格 880mm×1230mm 1/32 开本
印　张 19.5 印张
字　数 906 千字
版　次 2003 年 8 月第 1 版
2003 年 8 月第 1 次印刷
定　价 30.00 元

前　　言

高等数学是高等工科院校的一门非常重要的基础课，也是硕士研究生入学考试全国统一命题的必考课程。同济大学《高等数学》(第五版)教材自出版以来，被越来越多的高等工科院校所采用。该教材在以前版本的基础上作了较大的改动，调整了部分章节的内容，增加了部分习题。为了帮助广大同学学好《高等数学》这门课程，为学习大学的后续课程以及考研打好坚实的基础，我们根据多年的教学经验和历届考研辅导留给我们的深刻体会，结合学生反馈的信息，编写了《高等数学(同济五版)学习指导和习题全解》一书。

本书按照高等数学(同济五版)教材的章节顺序，分为十二章，每章均设计了四个版块：

一、各节内容精要　列出了该节的基本概念，重要的定理公式，突出考点的核心知识，使同学们对本节的内容一目了然。

二、各节习题全解　对课后习题以及各章总习题全部作了详细解答。对一些较难的题目，从分析题目的条件入手，结合所学知识，作了较详细的解答，有的题目还给了几种解法，以帮助同学们提高分析问题和解题的能力。

三、各章常考题型选讲　精选了部分常考题型，这些题目覆盖了本章的内容，题型典型、解法灵活，解题方法富于技巧。通过这些题目帮助同学们对本章内容进行全面复习。

四、考研全题精析　对 1991—2002 年的考研题目，按章分类列于各章

后面，给出了较为详细的分析和解答，用以提高同学们的知识水平和综合解题能力。

本书从指导教学、学习和考试、考研的角度出发，通过对大量涉及广泛、类型众多、综合性、技巧性强的习题的解答，揭示了高等数学的解题方法、解题规律和解题技巧。这对于提高同学们分析问题的能力，理解基本概念和理论，开拓解题思路，全面增强数学素质，将会收到良好的效果。对于课后习题，希望同学们在学习过程中应先经过独立思考，自己动手，给出解答，然后再对照检查，不要依赖于本书给出的解答。

我们恳切希望本书能够对广大工科院校的在校本科生、专升本学生及有志考研的学生在学习高等数学课程中有所帮助，成为同学们的知心朋友。由于水平有限，书中疏漏不妥之处，在所难免，恳请各位读者及同行不吝赐教。

编者

2003.7

目 录

【第一章】

函数与极限

第一节　映射与函数

内·容·精·要

1. 函数的几种特性

(1) 有界性：$|f(x)| \leqslant M, \forall x \in X \subset D$.

(2) 单调性：$x_1 < x_2$ 时，$f(x_1) \leqslant f(x_2), \forall x_1, x_2 \in D$.

(3) 奇偶性：$f(-x) = \pm f(x), \forall x, -x \in D$.

(4) 周期性：$f(x+L) = f(x), \forall x, x \pm L \in D$.

2. 初等函数

幂函数，指数函数，对数函数，三角函数和反三角函数统称为基本初等函数. 由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数，称为初等函数.

习题 1－1 解答

1. 设 $A = (-\infty, -5) \cup (5, +\infty), B = [-10, 3)$，写出 $A \cup B, A \cap B, A \setminus B$ 及 $A \setminus (A \setminus B)$ 的表达式.

解　$A \cup B = (-\infty, 3) \cup (5, +\infty), A \cap B = [-10, -5)$,

$A \setminus B = (-\infty, -10) \cup (5, +\infty), A \setminus (A \setminus B) = [-10, -5)$.

2. 设 A、B、C 是任意三个集合，证明对偶律：$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$.

证　$I = I \cap I = (A \cup A^C) \cap (B \cup B^C)$

$= (A \cap B) \cup (A \cap B^C) \cup (A^C \cap B) \cup (A^C \cap B^C)$

$= (A \cap B) \cup (A^C \cup B^C)$.

又 $(A \cap B) \cap (A^C \cup B^C) = \phi$，所以 $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$.

3. 设映射 $f: X \to Y, A \subset X, B \subset X$. 证明

(1) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$;　(2) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

证　(1) 设 $C = f(A \cup B), D = f(A) \cup f(B)$，若 $y \in C$，则一定有 $x \in A \cup B$，使 $f(x) = y$.

当 $x \in A$ 时，$f(x) = y \in f(A)$.

当 $x \in B$ 时，$f(x) = y \in f(B)$，即总有 $y = f(x) \in f(A) \cup f(B) = D$.

即 $C \subset D$,同理可证 $D \subset C$.

于是,$C = D$.即 $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

(2) 若 $y \in f(A \cap B)$,则一定有 $x \in A \cap B$,使 $f(x) = y$.

因 $x \in A$,所以 $f(x) = y \in f(A)$,又因 $x \in B$,所以 $f(x) = y \in f(B)$.

即有 $y \in f(A) \cap f(B)$.

故 $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

4. 设映射 $f: X \to Y$,若存在一个映射 $g: Y \to X$,使 $g \circ f = I_X$,$f \circ g = I_Y$,其中 I_X、I_Y 分别是 X、Y 上的恒等映射,即对于每一个 $x \in X$,有 $I_X x = x$;对于每一个 $y \in Y$,有 $I_Y y = y$.证明:f 是双射,且 g 是 f 的逆映射:$g = f^{-1}$.

证 用反证法.若 f 不是满射的,即至少有一个 $y_0 \in y$,对任 $x \in X$,$f(x) \neq y_0$.又已知 $g: y \to X$,所以有确定的 $x_0 \in X$,使 $g(y_0) = x_0$,于是

$$f \circ g(y_0) = f(x_0) \neq y_0,$$

与条件"$f \circ g = I_Y$"矛盾,故 f 是满射的.

若 f 不是一一的,即至少有 $x_1, x_2 \in X$,$x_1 \neq x_2$,使 $f(x_1) = f(x_2) = y_0 \in Y$,于是

$$g \circ f(x_1) = g(y_0) = g \circ f(x_2),$$

与已知条件"$g \circ f = I_X$"矛盾,故 f 是一一的.

综上,f 是双射的,且显然 g 是 f 的逆映射.

5. 设映射:$f: X \to Y$,$A \subset X$.证明:

(1) $f^{-1}(f(A)) \supset A$; (2) 当 f 是单射时,有 $f^{-1}(f(A)) = A$.

证 (1) 若 $x_1 \in A$,则有 $f(x_1) = y_0 \in f(A)$,又若有 $x_2 \in X \cap \overline{A}$,也有 $f(x_2) = y_0 \in A(A)$. 则 $f^{-1}(y_0) = \{x_1\} \cup \{x_2\} \in f^{-1}(f(A))$.

注意:$x_2 \in A$,所以 $f^{-1}(f(A)) \supset A$.

(2) 由(1)知:当 f 是单射时,显然有 $f^{-1}(f(A)) = A$.

6. 求下列函数的定义域:

(1) $y = \sqrt{3x + 2}$;　(2) $y = \dfrac{1}{1 - x^2}$;

(3) $y = \dfrac{1}{x} - \sqrt{1 - x^2}$;　(4) $y = \dfrac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$;

(5) $y = \sin\sqrt{x}$;　(6) $y = \tan(x + 1)$;

(7) $y = \arcsin(x - 3)$;　(8) $y = \sqrt{3 - x} + \arctan\dfrac{1}{x}$;

(9) $y = \ln(x + 1)$;　(10) $y = e^{1/x}$.

解 (1) 定义域为 $3x + 2 \geqslant 0$,即 $D = [-\frac{2}{3}, +\infty)$.

(2) 定义域为 $x \neq \pm 1$,即 $D = (-\infty, -1) \cup (-1,1) \cup (1, +\infty)$.

(3) 定义域为 $x \neq 0$,且 $1 - x^2 \geqslant 0$,即 $x \neq 0$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$,从而 $D = [-1,0) \cup (0,1]$.

(4) 定义域为 $4 - x^2 > 0$,由此得 $-2 < x < 2$,即 $D = (-2,2)$.

(5) 定义域为 $x \geqslant 0$,即 $D = [0, +\infty)$.

(6) 定义域为 $x + 1 \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$,即 $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} - 1$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$

(7) 定义域为 $-1 \leqslant x - 3 \leqslant 1$. 即 $D = [2,4]$.

(8) 定义域为 $3 - x \geqslant 0$,且 $x \neq 0$,即 $D = (-\infty,0) \cup (0,3]$.

(9) 定义域为 $x + 1 > 0$,即 $D = (-1, +\infty)$.

(10) 定义域为 $x \neq 0$,即 $D = (-\infty,0) \cup (0, +\infty)$.

7. 下列各题中,函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同?为什么?

(1) $f(x) = \lg x^2, g(x) = 2\lg x$;

(2) $f(x) = x, g(x) = \sqrt{x^2}$;

(3) $f(x) = \sqrt[3]{x^4 - x^3}, g(x) = x\sqrt[3]{x - 1}$.

(4) $f(x) = 1, g(x) = \sec^2 x - \tan^2 x$.

解　(1) $f(x)$ 与 $g(x)$ 不相同,因它们的定义域不相同;

(2) $f(x)$ 与 $g(x)$ 不相同,因它们的对应法则不相同;

(3) $f(x) = g(x)$,因它们的定义域相同且对应法则也一样.

(4) $f(x)$ 与 $g(x)$ 不相同,因它们的定义域不相同.

8. 设 $\varphi(x) = \begin{cases} |\sin x|, & |x| < \frac{\pi}{3}, \\ 0, & |x| \geqslant \frac{\pi}{3}, \end{cases}$ 求 $\varphi(\frac{\pi}{6})$, $\varphi(\frac{\pi}{4}), \varphi(-\frac{\pi}{4}), \varphi(-2)$,并作出函数 $y = \varphi(x)$ 的图形.

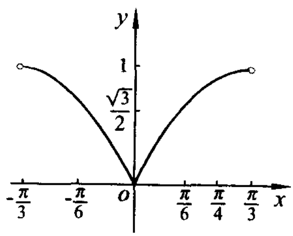

图 1 - 1

解　$\varphi(\frac{\pi}{6}) = \left|\sin\frac{\pi}{6}\right| = \frac{1}{2}$,

$\varphi(\frac{\pi}{4}) = \left|\sin\frac{\pi}{4}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\varphi(-\frac{\pi}{4}) = \left|\sin(-\frac{\pi}{4})\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\varphi(-2) = 0$.

$y = \varphi(x)$ 的图形如图 1 - 1 所示.

9. 试证下列函数在指定区间内的单调性:

(1) $y = \frac{x}{1 - x}, (-\infty,1)$;　　　(2) $y = x + \ln x, (0, +\infty)$.

证　(1) $\forall x_1, x_2 \in (-\infty,1)$,且 $x_1 < x_2$,则 $y(x_2) - y(x_1) = \frac{x_2}{1 - x_2} - \frac{x_1}{1 - x_1}$ $= \frac{x_2 - x_1}{(1 - x_1)(1 - x_2)} > 0$,从而 $y(x_2) > y(x_1)$,故 $y = \frac{x}{1 - x}$ 在 $(-\infty,1)$ 内单调增加.

(2) $\forall x_1, x_2 \in (0, +\infty)$,且 $x_1 < x_2$,则

$$y(x_2) - y(x_1) = x_2 + \ln x_2 - x_1 - \ln x_1 = (x_2 - x_1) + \ln\frac{x_2}{x_1} > 0,$$

从而 $y(x_2) > y(x_1)$,故 $y = x + \ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调增加.

10. 设 $f(x)$ 为定义在 $(-l,l)$ 内的奇函数,若 $f(x)$ 在 $(0,l)$ 内单调增加,证明 $f(x)$ 在 $(-l,0)$ 内也单调增加.

证 任取 $x_1, x_2 \in (-l,0)$,且 $x_1 < x_2$,则 $-x_1, -x_2 \in (0,l)$ 且 $-x_1 > -x_2$. 因 $f(x)$ 是 $(-l,l)$ 内的奇函数,且在 $(0,l)$ 内单调增,有 $f(-x_1) > f(-x_2)$, 即 $-f(x_1) > -f(x_2)$,从而 $f(x_1) < f(x_2)$,故 $f(x)$ 在 $(-l,0)$ 内单调增加.

11. 设下面所考虑的函数都是定义在对称区间 $(-l,l)$ 上的.证明:

(1) 两个偶函数的和是偶函数,两个奇函数的和是奇函数;

(2) 两个偶函数的乘积是偶函数,两个奇函数的乘积是偶函数,偶函数与奇函数的乘积是奇函数.

证 设 $f_1(x), f_2(x)$ 为奇函数, $g_1(x), g_2(x)$ 为偶函数,

(1) 因 $g_1(-x) + g_2(-x) = g_1(x) + g_2(x)$,所以两个偶函数的和是偶函数.

因 $f_1(-x) + f_2(-x) = -[f_1(x) + f_2(x)]$,所以两个奇函数的和是奇函数.

(2) 因 $g_1(-x)g_2(-x) = g_1(x)g_2(x)$,所以两个偶函数的乘积是偶函数.

因 $f_1(-x)f_2(-x) = [-f_1(x)][-f_2(x)] = f_1(x)f_2(x)$,所以两个奇函数的乘积是偶函数.

因 $f_1(-x)g_1(-x) = -f_1(x)g_1(x)$,所以偶函数与奇函数的乘积是奇函数.

12. 下列函数中哪些是偶函数,哪些是奇函数,哪些既非奇函数又非偶函数?

(1) $y = x^2(1 - x^2)$;　　(2) $y = 3x^2 - x^3$;

(3) $y = \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$;　　(4) $y = x(x-1)(x+1)$;

(5) $y = \sin x - \cos x + 1$;　　(6) $y = \dfrac{a^x + a^{-x}}{2}$.

解 (1) 偶函数;(2) 既非奇函数又非偶函数;(3) 偶函数;(4) 奇函数;(5) 既非奇函数又非偶函数;(6) 偶函数.

13. 下列各函数中哪些是周期函数?对于周期函数,指出其周期.

(1) $y = \cos(x - 2)$;　　(2) $y = \cos 4x$;　　(3) $y = 1 + \sin \pi x$;

(4) $y = x\cos x$;　　(5) $y = \sin^2 x$.

解 (1) 是周期函数,周期 $l = 2\pi$;(2) 是周期函数,周期 $l = \dfrac{\pi}{2}$;(3) 是周期函数,周期 $l = 2$;(4) 不是周期函数;(5) 是周期函数,周期 $l = \pi$.

14. 求下列函数的反函数:

(1) $y = \sqrt[3]{x + 1}$;　　(2) $y = \dfrac{1 - x}{1 + x}$;

(3) $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}(ad - bc \neq 0)$. 又问当 a, b, c, d 满足什么条件时,这反函数与直接函数相同?

(4) $y = 2\sin 3x$;　　(5) $y = 1 + \ln(x + 2)$;

(6) $y = \dfrac{2^x}{2^x + 1}$.