中国科普名家名作

院士数学讲座专辑

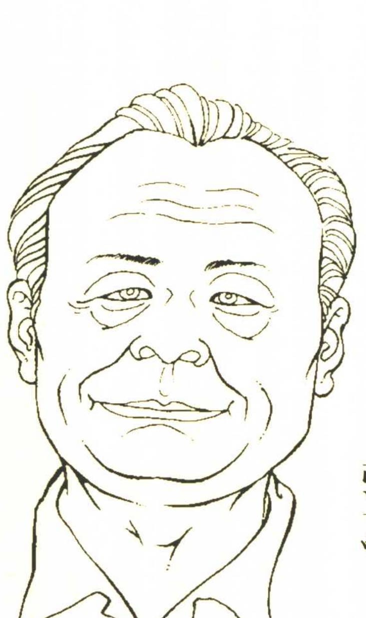
XINGAINIAN
JIHE

新概念几何

——张景中院士献给中学生的礼物

最新版

ZHANGJINGZHONG ZHU



张景中◎著

中国少年儿童出版社

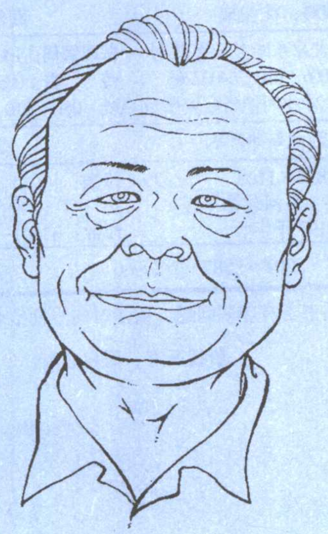
中国科普名家名作

院士数学讲座专辑

新概念几何

——张景中院士献给中学生的礼物

最新版



张景中◎著

中国少年儿童出版社

图书在版编目（CIP）数据

新概念几何：最新版／张景中著．—2版．—北京：中国少年儿童出版社，2002.1（2003.10重印）
（中国科普名家名作系列）
ISBN 7－5007－5887－1

Ⅰ. 新…　Ⅱ. 张…　Ⅲ. 平面几何-少年读物
Ⅳ. 0123.1－49

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第079063号

XINGAINIANJIHE

出版发行：中国少年儿童出版社
出 版 人：

作　　者：张景中　插　　图：萧　燕　版式设计：田家雨
责任编辑：陈效师等　美术编辑：颜　雷
责任校对：沈浚成　责任印务：书　慧

社址：北京东四十二条21号　邮政编码：100708
电话：086－010－64032266　传　　真：086－010－64012262
24小时销售咨询服务热线：086－010－84037667

印刷：河北新华印刷一厂　经销：新华书店

开本：850×1168　1/32　印张：10.25
2002年1月河北第1版　2003年10月河北第5次印刷
字数：197千字　印数：33001—41000册

ISBN 7－5007－5887－1/O·66　定价：14.00元

图书若有印装问题，请随时向本社出版科退换。

目　录

上篇:平面几何解题新思路

下篇:平面三角解题新思路

一 精益求精

——比比两个三角形的面积

有些看来极为简单平常的题目,仔细想想,却会有新收获。

图 1－1 画了两个三角形:△PAB 和△QAB,一眼可以看出,△PAB 的面积比△QAB 的面积大。

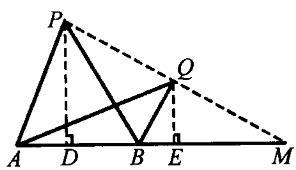


图 1－1

若进一步问:△PAB 的面积是△QAB 的多少倍呢?这就不是一眼能看出来的了。要量一量。

这是不难的。在小学里就学过,三角形面积等于底乘高之积的一半。先画出△PAB 的高 PD 和△QAB 的高 QE,量出

$$AB = 4(\text{厘米})$$
$$PD = 4(\text{厘米})$$
$$QE = 2(\text{厘米})$$

立刻可以算出,△PAB 的面积是 8 平方厘米,△QAB 的面积是 4 平方厘米。因此,△PAB 的面积是△QAB 面积的 2

倍。

你马上会想到,上面这个方法是个笨办法。根本不用算出两个三角形的面积来。因为△*PAB* 和△*QAB* 有一条公共边 *AB*,这条公共边也就可以当作公共底。有公共底的两个三角形叫做同底三角形。同底三角形的面积比等于它们的高的比,因此:

$$\frac{\triangle PAB}{\triangle QAB}=\frac{PD}{QE}=\frac{4}{2}=2 \tag{1·1}$$

可见,△*PAB* 的面积是△*QAB* 的 2 倍。

在(1·1)式中,为了写起来简便,我们用"△*PAB*"表示三角形 *PAB* 的面积。这种记法下面还会使用。在本书中,△*PAB* 有时表示三角形 *PAB*,有时表示三角形 *PAB* 的面积;不要紧,我们从上下文可以看出,△*PAB* 什么时候表示三角形 *PAB*,什么时候表示它的面积。

只量高,不量底,就可以求出△*PAB* 和△*QAB* 的面积比。这里利用了两个三角形有公共底的特点。这比先分别算出两个三角形的面积的办法要高明些。

进一步问,能不能精益求精,再高明一点呢?

量高,要用带直角的三角板先画高,还要量两次。有没有更简单点的方法呢?

有,看图 1-1。设 *M* 是直线 *AB* 与 *PQ* 的交点,量出线段 *PM* 和 *QM* 的长度。量这两条线段,既不用画垂线,又可以一次量出。量得 $PM=8$(厘米)、$QM=4$(厘米),同样可算出

$$\frac{\triangle PAB}{\triangle QAB}=\frac{PM}{QM}=\frac{8}{4}=2 \tag{1·2}$$

这是什么道理呢?

学过相似三角形的读者,很快会发现△*PDM*

$\backsim \triangle QEM$，因而有

$$\frac{PD}{QE}=\frac{PM}{QM} \tag{1·3}$$

这表明，知道了 PM 与 QM 的比，也就知道了 PD 与 QE 的比，从而也就知道了$\triangle PAB$ 与$\triangle QAB$ 的面积比。

很好。你找到了更高明的办法，而且应用相似三角形的知识说明了其中的道理。值得祝贺。

但你不应就此满足。你可以再问，能不能用更简单明了的推理，来说明等式

$$\frac{\triangle PAB}{\triangle QAB}=\frac{PM}{QM} \tag{1·4}$$

的来历呢？

比如，一位小朋友还没学过相似三角形的知识，你能不能向他说明(1·4)成立的道理呢？

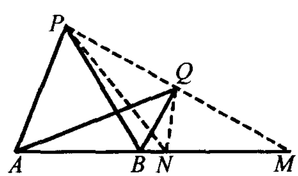


图 1－2

办法仍是有的。在直线 AB 上取一点 N，让 $MN=AB$，如图 1－2。于是

$$\triangle PAB=\triangle PMN$$

$$\triangle QAB=\triangle QMN$$

因而

$$\frac{\triangle PAB}{\triangle QAB}=\frac{\triangle PMN}{\triangle QMN}=\frac{PM}{QM} \tag{1·5}$$

这里，用到了“同高三角形的面积比等于底之比”。因为，把 PM 看成$\triangle PMN$ 的底，把 QM 看成$\triangle QMN$ 的底，$\triangle PMN$ 和$\triangle QMN$ 便成了同高三角形。它们的公共高在图中没有画出来。

为了说明等式(1·4)，我们在直线 AB 上取了一个点

N,又连了线段 PN、QN。如果不想添加这些辅助点和辅助线,可以利用现成的同高三角形来过渡:

$$\begin{aligned}\frac{\triangle PAB}{\triangle QAB} &= \frac{\triangle PAB}{\triangle PBM}\cdot\frac{\triangle PBM}{\triangle QBM}\cdot\frac{\triangle QBM}{\triangle QAB} \\ &= \frac{AB}{BM}\cdot\frac{PM}{QM}\cdot\frac{BM}{AB} = \frac{PM}{QM}\end{aligned} \tag{1·6}$$

这同样推出了等式(1·4),但没有用辅助点和辅助线。

现在回顾一下我们思考的过程,从中获得一些有益的启示:

一、不要放过那些表面上看来平凡而简单的问题,它们背后也许有你还没有弄明白的东西;

二、找到一种解题方法之后,不妨再想想,有没有更高明的办法;

三、更高明的办法也许要用到更多的知识来说明其中的奥妙。不妨进一步想:能不能用更少的、更基本的知识来说明那些你本以为要用较多的知识才能说明的道理呢?

问题到此并没有结束,还可以“举一反三”。图 1-1 中画出的两个三角形$\triangle PAB$、$\triangle QAB$,其特点是有一条公共边 AB。但是,有公共边的两个三角形,它们的位置关系并不一定像图 1-1 那样,情形是多种多样的。

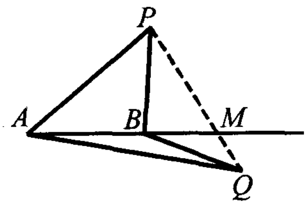
是不是在任何情形之下,等式(1·4)都成立呢?

这样看问题和提问题,我们就从图 1-1 的两个特殊三角形$\triangle PAB$、$\triangle QAB$ 出发,提出了“有公共边的两个三角形”的一般概念。有了一般概念,就可以提出更一般的问题,找出更一般的规律。

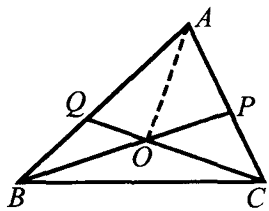
习　题　一

1·1　在一开始所提的问题中，如果 P、Q 两点在直线 AB 两侧，$\triangle PAB$ 与 $\triangle QAB$ 之比可化为哪两段线段之比。（看图回答）

1·2　如图，已知 $AP:PC=4:3$，$AQ:QB=3:2$，求 $\triangle AOB$ 与 $\triangle AOC$ 之比。



题 1·1



题 1·2

二　举一反三

——共边定理和它的用处

有一条公共边的两个三角形,叫做共边三角形。

几何课本里有全等三角形、相似三角形,但没有共边三角形。其实,共边三角形在几何图形中出现的机会更多。比如,平面上随意取4个点 A、B、C、D,如图2-1,这里一般没有全等三角形,也没有相似三角形,但却有许多共边三角形。(你不妨数一数,不算对角线交点 P,共有6对共边三角形。算上 P 点,有18对之多呢!)

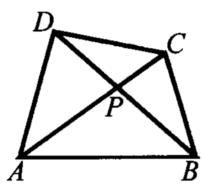


图2-1

下面,我们就来研究一下共边三角形吧。关于共边三角形,有什么值得一提的一般规律吗?

前面,我们通过对一对特殊的共边三角形 $\triangle PAB$、$\triangle QAB$ 的讨论,发现了等式(1·4),即共边三角形的面积比可以转化为线段比表示。用数学语言来表述就是:

共边定理　设直线 AB 与 PQ 交于 M,则

$$\frac{\triangle PAB}{\triangle QAB}=\frac{PM}{QM} \qquad (2\cdot1)$$

证明 有4种情形(*：

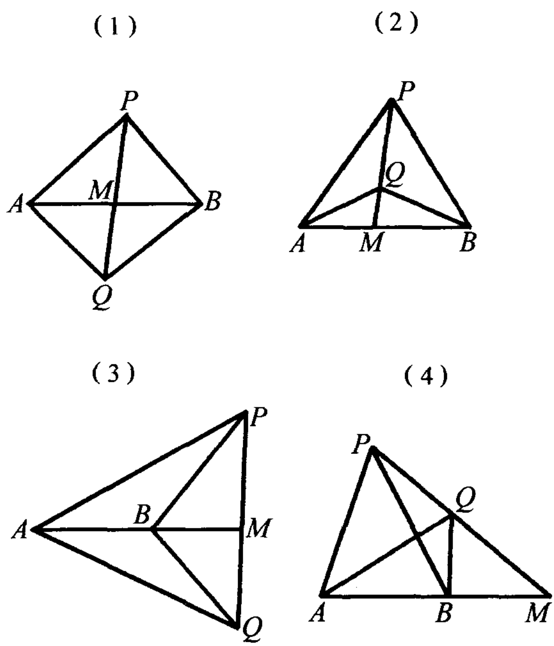


图2-2

下面的推理适合于任一种情形。不妨设 M 与 B 不重合(否则,要证的等式显然成立),于是:

(*4种情形为(1) P、Q 在直线 AB 两侧,A、B 也在直线 PQ 两侧;
(2) P、Q 在直线 AB 同侧,A、B 在直线 PQ 两侧;
(3) P、Q 在直线 AB 两侧,A、B 在直线 PQ 同侧;
(4) P、Q 在直线 AB 同侧,A、B 也在直线 PQ 同侧。

$$\frac{\triangle PAB}{\triangle QAB}=\frac{\triangle PAB}{\triangle PMB}\cdot\frac{\triangle PMB}{\triangle QMB}\cdot\frac{\triangle QMB}{\triangle QAB}$$

$$=\frac{AB}{MB}\cdot\frac{PM}{QM}\cdot\frac{MB}{AB}=\frac{PM}{QM}\qquad\square$$

这里,记号"□"表示证明完毕,或计算过程结束。另一种证明方法是在直线 AB 上另取一点 N 使 $MN=AB$,立刻得到

$$\frac{\triangle PAB}{\triangle QAB}=\frac{\triangle PMN}{\triangle QMN}=\frac{PM}{QM}$$

对比一下上一节的做法,我们体会到:在解决特殊问题的过程中,可以找到解决一般问题的方法。一开始推导等式(1·4)时,是针对图 1-1 的;但那方法又不局限于图 1-1,它对图 2-2 中的四种情形都适用。

定理证出来了,不妨评述一下证法,以便总结经验,利于解决新问题。上面两种证法中,取辅助点的想法是巧妙的,一下子把问题化简了。但前一方法也大有教益,它叫做过渡法或架桥法。问题是寻找$\triangle PAB$ 和$\triangle QAB$ 的面积比,这一下看不出来。我们利用另外的三角形作为桥,逐步过渡。$\triangle PAB$ 与$\triangle PMB$ 的比好找,$\triangle PMB$ 与$\triangle QMB$ 的比好找,$\triangle QMB$ 与$\triangle QAB$ 的比也好找。于是,过渡完成了。这种办法有时能解决相当难的问题。本书后面会一再用到它。

一个定理的用处越多,就越重要。为了说明共边定理是一个重要定理,下面举几个例子。

【例 2·1】 如图 2-3,设$\triangle ABC$ 两边 AB、AC 的中点分别是 M、N,线段 BN 和 CM 交于点 P,求证:$CP=2PM$。

【分析】 问题是求线段比 CP/PM。用共边定理,这线段比可以化成面积比:

$$\frac{CP}{PM}=\frac{\triangle CBN}{\triangle MBN}$$

由于 N 是 AC 中点，$\triangle CBN$ 是 $\triangle ABC$ 的一半；$\triangle MBN$ 又是 $\triangle ABN$ 的一半，即 $\triangle MBN$ 是 $\triangle ABC$ 的 $\frac{1}{4}$，问题便水落石出了。

据此分析，可写出证明。

证明：由共边定理得

$$\frac{CP}{PM}=\frac{\triangle CBN}{\triangle MBN}=\frac{\triangle CBN}{\triangle ABN}\cdot\frac{\triangle ABN}{\triangle MBN}$$

$$=\frac{CN}{AN}\cdot\frac{AB}{MB}=2 \qquad \square$$

例 2·1 是平面几何里一条常用的定理：三角形重心（图 2－3中，P 就是三角形的重心）到顶点的距离，等于它到对边中点距离的 2 倍。更一般的情形是：

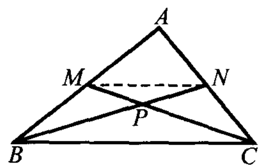


图 2－3

【例 2·2】 上题中若 $AM=\lambda MB$，$AN=\mu NC$。求比值 $\frac{CP}{PM}$。

解：用共边定理可得

$$\frac{CP}{PM}=\frac{\triangle CBN}{\triangle MBN}=\frac{\triangle CBN}{\triangle ABN}\cdot\frac{\triangle ABN}{\triangle MBN}$$

$$=\frac{CN}{AN}\cdot\frac{AB}{MB}=\frac{1+\lambda}{\mu} \qquad \square$$

利用这种办法，可以作一些有趣的面积计算，如：

【例 2·3】 在 $\triangle ABC$ 的三边 BC、CA、AB 上，分别取

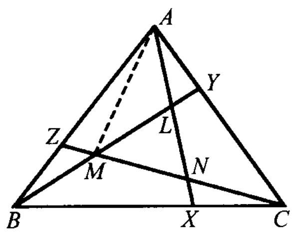


图 2-4

点 X、Y、Z 使得 $CX=\frac{1}{3}BC$、$AY=\frac{1}{3}AC$、$BZ=\frac{1}{3}AB$。连 AX、BY、CZ 三条线,围成三角形 LMN,如图 2-4。问$\triangle LMN$ 的面积是$\triangle ABC$ 面积的几分之几?

解:利用所给条件,先求$\triangle MBC$、$\triangle NCA$、$\triangle LAB$ 与$\triangle ABC$ 之比。

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle MBC}=\frac{\triangle ABM+\triangle BCM+\triangle ACM}{\triangle MBC}$$

$$=\frac{AY}{CY}+1+\frac{AZ}{BZ}$$

$$=\frac{1}{2}+1+2=\frac{7}{2}$$

$$\therefore \triangle MBC=\frac{2}{7}\triangle ABC$$

同理,$\triangle NCA=\frac{2}{7}\triangle ABC$

$$\triangle LAB=\frac{2}{7}\triangle ABC$$

$$\therefore \triangle LMN=\frac{1}{7}\triangle ABC$$ □

这三个例子都很简单。下面我们就会看到,有些初看很难下手的题目,用了共边定理,竟能迎刃而解!

【例 2·4】 在$\triangle ABC$ 内任取一点 P,连 AP、BP、CP 分别交对边于 X、Y、Z。求证:$\frac{PX}{AX}+\frac{PY}{BY}+\frac{PZ}{CZ}=1$。

证明:如图 2-5,用共边定理可得:

$$\frac{PX}{AX}+\frac{PY}{BY}+\frac{PZ}{CZ}=\frac{\triangle PBC}{\triangle ABC}+\frac{\triangle PAC}{\triangle ABC}+\frac{\triangle PAB}{\triangle ABC}$$

$$=\frac{\triangle ABC}{\triangle ABC}=1 \qquad \square$$

【例 2·5】 在图 2－5 中，试证

$$\frac{AZ}{ZB}\cdot\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}=1$$

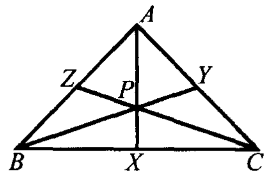


图 2－5

证明：用共边定理可得：

$$\frac{AZ}{ZB}\cdot\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}$$

$$=\frac{\triangle PAC}{\triangle PBC}\cdot\frac{\triangle PAB}{\triangle PAC}\cdot\frac{\triangle PBC}{\triangle PAB}$$

$$=1 \qquad \square$$

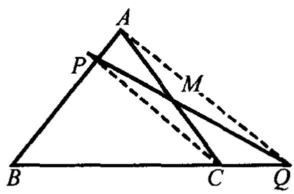


图 2－6

【例 2·6】 （1978 年北京市中学生数学竞赛试题）设 M 是 $\triangle ABC$ 的 AC 边的中点。过 M 任作一直线与 AB 边交于 P，与 BC 边的延长线交于 Q。求证：

$$\frac{PA}{PB}=\frac{QC}{QB}$$

证明： $\dfrac{PA}{PB}=\dfrac{\triangle QPA}{\triangle QPB}=\dfrac{\triangle QPA}{\triangle QPC}\cdot\dfrac{\triangle QPC}{\triangle QPB}$

$$=\frac{AM}{MC}\cdot\frac{QC}{QB}=\frac{QC}{QB} \qquad \square$$

【例 2·7】 四边形 $ABCD$ 中，$AD=BC$，另两边 AB、CD 的中点分别为 M、N。延长 AD、BC 分别与直线 MN 交于 P、Q，如图 2－7。求证：$PD=QC$。

证明:由已知条件及共边定理得

$$\frac{PA}{PD}=\frac{\triangle AMN}{\triangle DMN}=\frac{\triangle BMN}{\triangle CMN}$$

$$=\frac{QB}{QC}$$

利用 $PA=PD+DA$ 及 $QB=QC+CB$ 代入两端并整理,再用条件 $DA=CB$,即得 $PD=QC$。

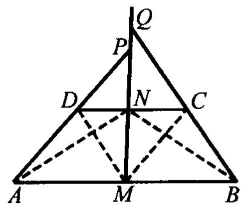


图 2-7

【例 2·8】 设 G 是$\triangle ABC$ 的重心(三角形三条中线的交点)。过 G 任作一直线与$\triangle ABC$ 的两边 AB、AC 分别交于X、Y。求证: $GX\leqslant 2GY$。(1979 年安徽省数学竞赛试题)

证明:如图 2-8,有

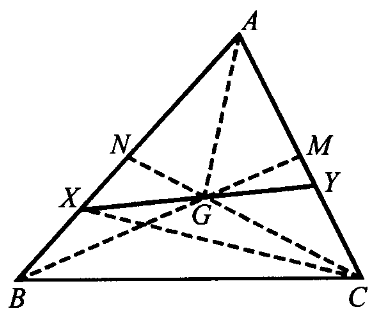


图 2-8