索拉氏微積分詳解

（1979最新版）第三版（單變數與多變數）

李明偉
孫宜昌 譯著

上册

CALCULUS

ONE AND SEVERAL VARIABLES

THIRD EDITION

S.L. SALAS　　EINAR HILLE

久大書局

索拉氏微積分詳解上冊

原著人：SALAS HILLE
譯著人：李明偉
發行人：孫宜昌
總經銷：久大書局
地　址：淡水鎮英專路68號
電　話：6211032
台北連絡處：台北市齊東街82巷8號
電　話：5927473・3511918
郵政劃撥：112537（許秋子帳戶）

中華民國六十九年八月十五日
定價：新台幣 100 元

目錄

習題 1-3

1. 試求出下列各題中，經過所予點之直線方程式的斜率

在下列各題中令 m 表各直線之斜率

* (a) $P_0(-1, 2)$；$P_1(3, 4)$

解：斜率 $m_{P_0P_1}=\dfrac{4-2}{3-(-1)}=\dfrac{2}{+1}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$

(b) $P_0(4, 5)$；$P_1(6, -3)$

解：斜率 $m_{P_0P_1}=\dfrac{-3-5}{6-4}=\dfrac{-8}{2}=-4$

* (c) $P_0(3, 5)$；$P_1(6, 5)$

解：斜率 $m_{P_0P_1}=\dfrac{5-5}{6-3}=\dfrac{0}{3}=0$

(d) O；$P(x_0, y_0)$

解：斜率 $m_{OP}=\dfrac{y_0-0}{x_0-0}=\dfrac{y_0}{x_0}$

(e) $P(x_0, 0)$；$Q(0, y_0)$

解：斜率 $m_{PQ}=\dfrac{y_0-0}{0-x_0}=\dfrac{y_0}{x_0}$

(f) $P(a, b)$；$Q(b, a)$

解：斜率 $m_{PQ}=\dfrac{a-b}{b-a}=\dfrac{a-b}{-(a-b)}=-1$

2. 求下列所予直線的斜率及其在平面座標上 y 軸的截距

(a) $y=x+4$

解：由公式 $y=mx+b$ （其中 m 爲直線之斜率，b 爲 y 軸之截距）

則知 $y=x+4$ 中斜率 $m=1$

$y-intercept\ b=4$

(b) $y = 3x - 1$

解：$\because y = mx + b = 3x - 1$

$\therefore$ 斜率 $m = 3$

$y -$ *intercept* $b = -1$

(c) $4x = 1$

解：原式 $4x = 1$ 化爲 $x = 1/4$

則可知斜率爲不能定義 (undefind)

$y -$ *intercept* 不存在

(d) $3y = x + 2$

解：原式化爲 $y = 1/3\, x + 2/3$

由 $y = mx + b$

則斜率 $m = 1/3$

$y -$ *intercept* $b = 2/3$

(e) $x + y + 1 = 0$

解：原式化爲 $y = -x - 1$

則由 $y = mx + b$ 得知

斜率 $m = -1$

$y -$ *intercept* $b = -1$

(f) $4x - 2y + 6 = 0$

解：原式化爲 $y = 2x + 3$

由 $y = mx + b$

則斜率 $m = 2$

$y -$ *intercept* $b = 3$

(g) $7x + 4y + 4 = 0$

解：原式化爲 $y = -\dfrac{7}{4}x - 1$

由 $y = mx + b$

則斜率 $m = -\frac{7}{4}$

$y - intercept \quad b = -1$

(h) $7x - 4y + 4 = 0$

解：原式化為 $y = \frac{7}{4}x + 1$

由 $y = mx + b$

則斜率 $m = \frac{7}{4}$

$y - intercept \quad b = 1$

(i) $2y + 5 = 0$

解：原式化為 $y = -\frac{5}{2}$

由 $y = mx + b$

則斜率 $m = 0$

$y - intercept \quad b = -\frac{5}{2}$

(j) $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = \frac{1}{6}$

解：原式化為 $y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$

由 $y = mx + b$

則斜率 $m = -\frac{3}{2}$

$y - intercept \quad b = \frac{1}{2}$

3. 試利用下列所予之條件，求出直線之方程式

(a) 斜率 5 ； y 軸截距 2

解：由 $y = mx + b$

則直線方程式： $y = 5x + 2$ 即為所求

(b) 斜率 -5 ； y 軸截距 2

解：由 $y = mx +$

則直線方程式： $y = (-5)x + 2$

$y = -5x + 2$ 即為所

(c) 斜率 5 ； y 軸截距 -2

解：由 $y = mx + b$

則直線方程式： $y = 5x - 2$ 即爲所求

(d) 斜率 -5 ； y 軸截距 -2

解：由 $y = mx + b$

則直線方程式： $y = -5x - 2$ 即爲所求

4. 請寫出距離下列所予直線 3 個單位的水平直線方程式：

(a) 在 x 軸的上方

解： $y = 3$ 即爲所求

(b) 在 x 軸的下方

解： $y = -3$ 即爲所求

5. 請寫出距離下列所予直線 3 個單位的鉛直直線方程式：

(a) 在 y 軸的右方

解： $x = 3$ 即爲所求

(b) 在 y 軸的左方

解： $x = -3$ 即爲所求

6. 試求通過已知點 $P(2,7)$ ；且合於下列條件之直線方程式：

(a) 平行於 x 軸

解：平行於 x 軸 $(y = 0)$ 之方程式，其斜率 m 均爲 0

由此則可求出通過點 $P(2,7)$ 之平行直線爲

$(y - 7) = 0(x - 2)$

$\Rightarrow$ $y = 7$ 即爲所求

(b) 平行於 y 軸

解：平行於 y 軸 $(x = 0)$ 之方程式，其斜率 m 均爲不能定義的

由此則可求出通過點 $P(2,7)$ 之平行直線爲

$0(y - 7) = (x - 2)$

$\Rightarrow$ $x = 2$ 即爲所求

(c) 平行於 $x + y + 1 = 0$

解：原式可化爲 $y = mx + b$ 則 $m_2 = m_1 = -1$ (∵平

由 $y-y_0=m_2(x-x_0)$

則通過點 $P(2,7)$ 之平行直線

可求出為 $y-7=(-1)(x-2)$

$$y-7=-x+2$$

$$y=-x+9$$

所以 $x+y-9=0$ 即為所求

(d)垂直於 $x+y+1=0$

解：原式可化為 $y=-x-1$ 則 $m_1=-1$

由 $m_1m_2=-1$（垂直）$\Rightarrow m_2=1$

且 $y-y_0=m_2(x-x_0)$

則通過點 $P(2,7)$ 之垂直直線

可求出為 $y-7=(1)(x-2)$

$$y=x+5$$

$$\Rightarrow \quad x-y+5=0$$

(e)平行於 $3x-2y+6=0$

解：將原式化為 $y=\frac{3}{2}x+3$

其中 $m_1=\frac{3}{2}$ 則 $m_2=m_1=\frac{3}{2}$（平行）

由 $y-y_0=m_2(x-x_0)$

則通過 $P(2,7)$ 之平行直線

為 $y-7=\frac{3}{2}(x-2)$

$$y=\frac{3}{2}x-3+7$$

$$=\frac{3}{2}x+4$$

$$\Rightarrow \quad 2y=3x+8$$

則 $3x-2y+8=0$ 即為所求

(f)垂直於 $3x-2y+6=0$

解：將原式化為 $y=\frac{3}{2}x+3$

其中 $m_1=\frac{3}{2}$ 由 $m_1m_2=-1$（垂直）

$\Rightarrow \quad m_2 = -\dfrac{2}{3}$

代入 $y - y_0 = m_2(x - x_0)$

則通過 $P(2,7)$ 之平行直線

為 $\quad y - 7 = -\dfrac{2}{3}(x - 2)$

$y - 7 = -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{4}{3}$

$3y - 21 = -2x + 4$

$\Rightarrow \quad 2x + 3y - 25 = 0$

7. 關於方程式 $3y + 6x - 12 = 0$

(a) 寫出其斜截式

解：斜截式的通式為 $y = mx + b$

則原方程式 $3y + 6x - 12 = 0$

$\Rightarrow \quad y + 2x - 4 = 0$

$\Rightarrow \quad y = -2x + 4$ 即為所求

(b) 利用 $P(1,2)$ 寫出其點斜式

解：由(a)知斜率 $m = -2$

則 $\quad y - 2 = m(x - 1)$

$\Rightarrow \quad y - 2 = -2(x - 1)$

$\Rightarrow \quad y = -2x + 3$ 即為所求

(c) 寫出其截距式

解：原式化為 $\quad 3y + 6x = 12$

$\Rightarrow \quad 2x + y = 4$ （兩邊均除以 4 ）

$\Rightarrow \quad \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{4} = 1$ 即為所求

8. 試求出下列各所予直線的斜角度數

(a) $x - y + 2 = 0$

解：原式化為 $\quad y = x + 2$，由斜截式得知斜率 $m = 1$

由於　$m = \tan\theta$，即　$\tan\theta = 1$

$\Rightarrow$　$\theta = 45°$

(b) $6y + 5 = 0$

解：原式化爲　$y = \frac{-5}{6}$，由斜截式得知斜率 $m = 0$

由於　$m = \tan\theta$，即　$\tan\theta = 0$

$\Rightarrow$　$\theta = 0°$

(c) $2x - 3 = 0$

解：原式化爲　$x = \frac{3}{2}$，則知直線爲一鉛垂線

$\Rightarrow$　$\theta = 90°$

(d) $2x - 3y + 6 = 0$

解：原式化爲　$y = \frac{2}{3}x + 2$

由斜截式得知斜率 $m = \frac{2}{3}$

由於　$m = \tan\theta$，即　$\tan\theta = \frac{2}{3} = 0.666\cdots \Rightarrow \theta = 33.5$

（請查閱 Standard Mathematical Table by Selby）

9. 試利用下列各題中所予之條件求出直線之方程式

(a) 斜角爲30°，y 軸截距爲 2

解：令　$\theta = 30°$

則求出斜率 $m = \tan\theta = \tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

代入斜截式則 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 2$　即爲所求

(b) 斜角爲60°，x 軸截距爲 2

解：令　$\theta = 60°$

則斜率 $m = \tan\theta = \tan 60° = \sqrt{3}$

$\because \tan = \frac{y\text{軸截距}}{x\text{軸截距}}$，且 x 軸距爲 2，代入 $\tan\theta$，

則可求出 y 軸截距爲 $2\sqrt{3} \Rightarrow y = \sqrt{3}x + 2\sqrt{3}$　即爲所求

(c)斜角為 150°，x 軸截距為 3

解：令 $\theta = 150°$

則斜率 $m = \tan 150° = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\because \tan\theta =$ y 軸截距／x 軸截距，

且 x 軸截距為 3，代入 $\tan\theta$

則求出 y 軸截距為 $\sqrt{3}$

$\Rightarrow \quad y = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3}$ 即為所求

10.求下列各題中兩已知直線之交點及交角

(a) l_1 : $2x - 3y - 3 = 0$; l_2 : $3x - 2y - 3 = 0$

解：聯立方程式 $l_1 = 2x - 3y - 3 = 0$

$l_2 = 3x - 2y - 3 = 0$

$\Rightarrow \quad x = \dfrac{3}{5}$; $y = -\dfrac{3}{5}$，則其交點為 $P(\dfrac{3}{5}, -\dfrac{3}{5})$

再利用交角公式 $\tan\theta = \dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$ ………… (1)

其中由 l_1 求出 $m_1 = \dfrac{2}{3}$

由 l_2 求出 $m_2 = \dfrac{3}{2}$

將 m_1 , m_2 代入(1)式中

$\Rightarrow \quad \tan\theta = \dfrac{(3/2) - (2/3)}{1 + 1} = \dfrac{(9-4)/6}{2}$

$\tan\theta = \dfrac{5}{12} = 0.4166\cdots$

$\Rightarrow \quad \theta \cong 23°$ 即為交角度數

*請查閱 Standard Mathematical Table by Selby

(b) l_1 : $3x + 10y + 4 = 0$; l_2 : $7x - 10y - 1 = 0$

解：聯立方程式 l_1 : $3x + 10y + 4 = 0$

l_2 : $7x - 10y - 1 = 0$

$\Rightarrow \quad x = -\dfrac{3}{10}$; $y = -\dfrac{31}{100}$，則其交點為 $P(-\dfrac{3}{10}, -\dfrac{31}{100})$

再利用交角公式 $\tan\theta = \dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$ ……… (1)

其中由 l_1 求出 $m_1 = -3/10$

由 l_2 求出 $m_2 = 7/10$

將 m_1 , m_2 代入(1)式中

則 $\tan\theta = \dfrac{(7/10)+(3/10)}{1+(-21/100)} = \dfrac{1}{79/100} = \dfrac{100}{79} = 1.266\cdots$

$\Rightarrow \quad \theta \cong 52^\circ$

(c) $l_1 : 4x - y + 2 = 0$; $l_2 : 19x + y = 0$

解：聯立方程式 $l_1 : 4x - y + 2 = 0$

$l_2 : 19x + y = 0$

$\Rightarrow \quad x = -\dfrac{2}{23}; \quad y = \dfrac{38}{23}$，則其交點為 $P(-\dfrac{2}{23}, \dfrac{38}{23})$

再利用交角公式 $\tan\theta = \dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$ ……… (1)

其中由 l_1 求出 $m_1 = 4$

由 l_2 求出 $m_2 = -19$

將 m_1 , m_2 代入(1)式

則 $\tan\theta = \dfrac{-19-4}{1+(-19)(4)} = \dfrac{-23}{-75} = \dfrac{23}{75} = 0.3066\cdots$

$\Rightarrow \quad \theta \cong 17^\circ$

(d) $l_1 : 5x - 6y + 1 = 0$; $l_2 : 8x + 5y + 2 = 0$

解：聯立方程式 $l_1 : 5x - 6y + 1 = 0$

$l_2 : 8x + 5y + 2 = 0$

$\Rightarrow \quad x = -\dfrac{17}{73}; \quad y = -\dfrac{2}{73}$，則其交點為 $P(-\dfrac{17}{73}, -\dfrac{2}{73}$

再利用交角公式 $\tan\theta = \dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$ ……… (1)

其中由 l_1 求出 $m = \dfrac{5}{6}$

由 l_2 求出 $m_2=-\dfrac{8}{5}$

代入(1)式中：

則 $\tan\theta=\dfrac{(-8/5)-(5/6)}{1+(5/6)(-8/5)}=\dfrac{-73/30}{1-4/3}=\dfrac{-73/30}{-1/3}$

$=73/10\quad=7.3$

$\Rightarrow\quad\theta\cong 82^\circ$

11. 利用下列各題中之所予三角形頂點，求出三角形各內角之角度

(a) $(-2,-5)$；$(0,0)$；$(5,-2)$

解：由兩點式 $y-y_0=\dfrac{y_1-y_0}{x_1-x_0}($

$x-x_0)$

(i) $(-2,-5)$；$(0,0)$

$\Rightarrow y-0=\dfrac{-5-0}{-2-0}(x-0)$

$y=(5/2)(x)$

$2y=5x$

$\Rightarrow\quad 5x-2y=0$

(ii) $(0,0)$；$(5,-2)$

$\Rightarrow y-0=\dfrac{-2-0}{5-0}(x-0)$

$y=-\dfrac{2}{5}x$

$5y=-2x$

$\Rightarrow\quad 2x+5y=0$

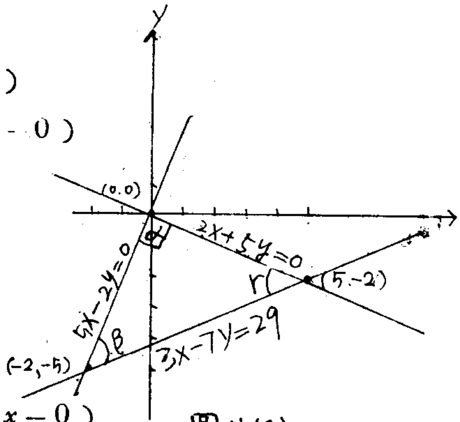

圖 11.(a)

(iii) $(-2,-5)$；$(5,-2)$

$y-(-2)=\dfrac{-5-(-2)}{-2-5}(x-5)$

$y+2=\dfrac{-5+2}{-7}(x-5)$

$$y+2=\frac{3}{7}(x-5)$$

$$7y+14=3x-15$$

$$\Rightarrow \quad 3x-7y-29=0$$

令三角形之三內角分別爲 α,β,γ〔如圖11(a)〕

則由(i) $5x-2y=0 \quad \Rightarrow$ 斜率 $m_1=\dfrac{5}{2}$

(ii) $2x+5y=0 \quad \Rightarrow$ 斜率 $m_2=-\dfrac{2}{5}$

求出 $\tan\alpha=\dfrac{(-2/5)-(5/2)}{1+(5/2)(-2/5)}=\dfrac{-29/10}{0}=$ 不定値

$$\Rightarrow \quad \alpha=90^\circ$$

由(i) $5x-2y=0 \quad \Rightarrow$ 斜率 $m_1=5/2$

(iii) $3x-7y-29=0 \quad \Rightarrow$ 斜率 $m_3=\dfrac{3}{7}$

求出 $\tan\beta=\dfrac{-(3/7)+(5/2)}{1+(3/7)(5/2)}=\dfrac{29/14}{1+(15/14)}=1$

$$\Rightarrow \quad \beta=45^\circ$$

由 $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$

$$\Rightarrow \quad \gamma=45^\circ$$

(b) $(1,-1)$；$(4,0)$；$(3,2)$

解：由兩點式 $\quad y-y_0=\dfrac{y_1-y_0}{x_1-y_0}(x-x_0)$

(i) $(1,-1)$；$(4,0)$

$$\Rightarrow \quad y-(-1)=\frac{0-(-1)}{4-1}(x-1)$$

$$y+1=\frac{1}{3}(x-1)$$

$$3y+3=x-1$$

$$\Rightarrow \quad x-3y-4=0$$

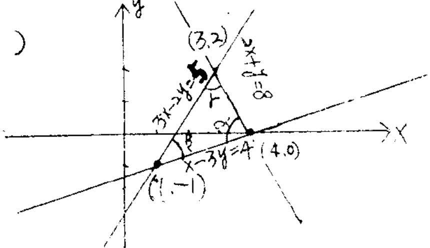

圖11(b)

(ii) $(4,0)$；$(3,2)$

$$\Rightarrow \quad y-0=\frac{2-0}{3-4}(x-4)$$

$$y = \frac{2}{-1}(x-4)$$

$$-y = 2x - 8$$

$$\Rightarrow \quad 2x + y - 8 = 0$$

(iii) $(1, -1)$；$(3, 2)$

$$\Rightarrow \quad y-(-1) = \frac{2-(-1)}{3-1}[x-(1)]$$

$$y + 1 = \frac{3}{2}(x-1)$$

$$2y + 2 = 3x - 3$$

$$\Rightarrow \quad 3x - 2y - 5 = 0$$

令三角形之三內角分別爲 α, β, γ 〔如圖11(b)〕

則由(i) $x - 3y - 4 = 0 \Rightarrow$ 斜率 $m_1 = 1/3$

(ii) $2x + y - 8 = 0 \Rightarrow$ 斜率 $m_2 = -2$

求出 $\tan\alpha = \frac{(1/3)+2}{1+(-2)(1/3)} = \frac{7}{3-2} = \frac{7}{1} = 7$

$$\Rightarrow \quad \alpha \cong 81°51'$$

由(i) $x - 3y - 4 = 0 \Rightarrow$ 斜率 $m_1 = 1/3$

(ii) $3x - 2y - 5 = 0 \Rightarrow$ 斜率 $m = \frac{3}{2}$.

求出 $\tan\beta = \frac{(3/2)-(1/3)}{1+(3/2)(1/3)} = \frac{7/6}{3/2} = \frac{7}{9} = 0.77\cdots$

$$\Rightarrow \quad \beta \cong 37°52'$$

$$\because \quad \alpha + \beta + \gamma = 180°$$

$$\Rightarrow \quad \gamma \cong 60°16'$$

(c) $(-4, -2)$，$(0, -1)$；$(1, 1)$

解：由兩點 $y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$

(i) $(-4, -2)$；$(0, -1)$

$$\Rightarrow \quad y-(-2) = \frac{-1-(-2)}{0-(-4)}[x-(-4)]$$

$y+2=\frac{1}{4}(x+4)$

$4y+8=x+4$

$\Rightarrow\quad x-4y-4=0$

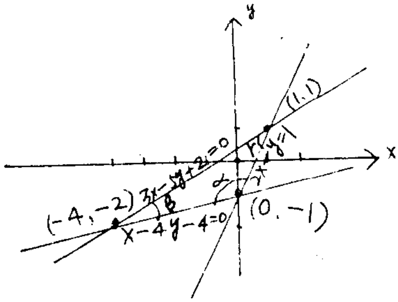

圖11(c)

(ii) $(0,-1)$; $(1,1)$

$\Rightarrow\quad y-(-1)=\dfrac{1-(-1)}{1-0}(x-0)$

$y+1=2x$

$\Rightarrow 2x-y-1=0$

(iii) $(-4,-2)$; $(1,1)$

$\Rightarrow\quad y-(-2)=\dfrac{1-(-2)}{1-(-4)}(x+4)$

$y+2=\dfrac{3}{5}(x+4)$

$5y+10=3x+12$

$\Rightarrow\quad 3x-5y+2=0$

令三角形之三內角分別為 α,β,γ〔如圖11 (c)〕

則由(i) $x-4y-4=0\quad\Rightarrow$斜率 $m_1=\dfrac{1}{4}$

(ii) $2x-y-1=0\quad\Rightarrow$斜率 $m_2=2$

$$\tan\alpha=\frac{2-1/4}{1+(2)(1/4)}=\frac{7/4}{1+(1/2)}=\frac{7}{6}=1.166\cdots$$

$\Rightarrow\quad \alpha\cong 130^\circ 36'$

由(i) $x-4y-4=0\quad\Rightarrow$斜率 $m_1=\dfrac{1}{4}$

(iii) $3x-5y+2=0\Rightarrow$斜率 $m_3=\dfrac{3}{5}$

$$\tan\beta=\frac{(3/5)-(1/4)}{1+(3/5)(1/4)}=\frac{7/20}{23/20}=\frac{7}{23}=0.30\cdots$$

$\Rightarrow\quad \beta\cong 16^\circ 42'$

$\because\quad \alpha+\beta+\gamma=180^\circ$

$\Rightarrow \quad \gamma \cong 32°42'$

(d) $(-4, 2)$；$(1, 0)$；$(1, 1)$

解：由兩點式 $y - y_0 = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$

(i) $(-4, 2)$；$(1, 0)$

$\Rightarrow \quad y - 2 = \dfrac{0 - 2}{1 - (-4)}(x + 4)$

$y - 2 = \dfrac{-2}{5}(x + 4)$

$5y - 10 = -2x - 8$

$\Rightarrow \quad 2x + 5y - 2 = 0$

(ii) $(-4, 2)$；$(1, 1)$

$\Rightarrow \quad y - 2 = \dfrac{1 - 2}{1 - (-4)}(x + 4)$

$y - 2 = (-1/5)(x + 4)$

$5y - 10 = -x - 4$

$\Rightarrow \quad x + 5y - 6 = 0$

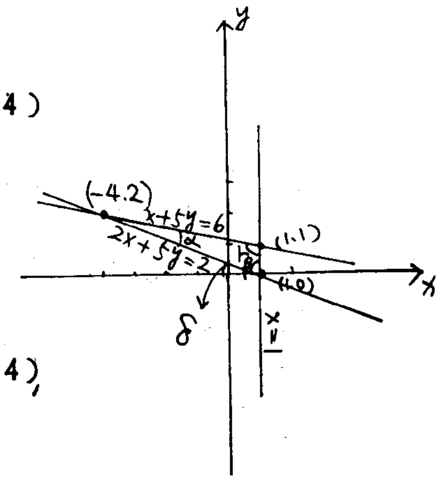

圖 11.(d)

(iii) $(1, 0)$；$(1, 1)$

$\because$ 其斜率不存在

$\therefore$ 直線方程式直接寫為 $x = 1$

令三角形之三內角分別為 α, β, γ〔如圖 11.(d)〕

由(i) $2x + 5y - 2 = 0 \quad \Rightarrow$ 斜率 $m_1 = -\dfrac{2}{5}$

(ii) $x + 5y - 6 = 0 \quad \Rightarrow$ 斜率 $m_2 = -\dfrac{1}{5}$

求出 $\tan\alpha = \dfrac{(-1/5) - (-2/5)}{1 + (-1/5)(-2/5)} = \dfrac{1/5}{1 + (2/25)} = \dfrac{1/5}{27/25}$

$= \dfrac{5}{27} = 0.185 \cdots$

$\Rightarrow \quad \alpha \cong 10°19'$

利用 x 軸 $\Rightarrow y = 0$