李 军 徐玖平 编著

运筹学

——非线性系统优化

科学出版社
www.sciencep.com

教育部高等学校优秀青年教师教学科研奖励计划资助

运 筹 学

——非线性系统优化

李 军 徐玖平 编著

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书是《运筹学——线性系统优化》的姊妹篇. 书中系统地介绍了非线性系统的主要理论和方法, 重点陈述了管理科学中有着广泛应用的非线性规划、随机规划、Markov 链、Markov 过程、排队论、库存论、可靠性模型等非线性系统优化定理分析的理论和方法. 本书突出了计算机在运筹学中的运用, 提供了与实际工具的知识接口; 各章后附有一定量的习题, 以帮助复习和巩固基本知识, 并为教师提供了丰富的在线多媒体课件支持. 本书各章具有相对独立性, 因此, 本书可供读者根据需要选学其中的部分内容.

阅读本书只需要微积分、线性代数和概率统计的基本知识, 本书可作为高等院校管理类和理工类各专业的本科生和研究生学习运筹学的教材, 也可供从事管理科学与实践的科研人员与实际工程技术人员参考.

图书在版编目 (CIP) 数据

运筹学: 非线性系统优化/李军, 徐玖平编著. —北京: 科学出版社, 2003

ISBN 7-03-012417-0

Ⅰ. 运… Ⅱ. ①李…②徐… Ⅲ. 运筹学 Ⅳ. O22

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2003) 第 100906 号

责任编辑: 陈 亮/责任校对: 包志虹

责任印制: 安春生/封面设计: 耕者设计工作室

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码: 100717

http: www.sciencep.com

双青印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2003 年 11 月第 一 版 开本: B5 (720×1000)

2003 年 11 月第一次印刷 印张: 20 1/4

印数: 1—4 000 字数: 355 000

定价: 26.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换〈双青〉)

前　言

运筹学是一门新兴的应用科学, 最早应用于军事领域. 20 世纪 40 年代以后, 工业的生产结构和管理关系日趋复杂化、产品更新换代速度的加快对运筹学的发展提出了新的需求. 而计算机的出现与普及, 使得运筹学在各个领域都得到了迅速的发展. 因此, 运筹学研究的对象极其广泛, 对它有着许多不同的定义. 但是, 不少运筹学专著与教科书未能真正从系统角度出发来研究与讲述其研究的对象. 而运筹学的基本要求就是进行系统性的思考.

21 世纪的思维方式高度重视系统性思考, 其科学研究更加突出学科的交叉与融合, 以多学科交叉、渗透和融合为重要特征的复杂性科学将在人类探索各种未知的科学奥秘中发挥作用. 而运筹学的研究就是要面向物理层次、生物层次与社会层次的复杂系统以及复杂性科学的理论与方法, 揭示系统的演化、涌现、自组织、自适应、自相似的机理及内在规律, 发现客观事物构成的原因、演化的历程和复杂机理, 尽可能准确地预测未来的发展. 因此, 21 世纪的运筹学教学要体现系统性思考的要求. 从这个角度出发, 我们决定将运筹学的内容分为线性系统优化与非线性系统优化来阐述, 并力图使这套教材形成如下特点: 遵循读者认知的逻辑体系, 对问题从简单、具体到一般进行分析; 以系统的观点, 依照科学知识的逻辑体系, 内容体系完整、全面, 算法有效而尽量不重复; 在信息技术的平台上对所有主题的分析模型化与软件化, 理论论述与实际应用达到了较好的统一.

本书涵盖了非线性规划、随机规划、Markov 链、Markov 决策规划、排队论 (随机服务系统)、库存论、可靠性模型与模拟等内容, 讲述了运筹学模型中绝大多数的随机模型. 我们以抓住主要问题和掌握基本方法为着眼点来安排本书的结构和内容. 第 1 章介绍了非线性规划的一般数学模型与算法, 并给出了软件的实现方法; 第 2 章将内容扩展到随机规划, 着重陈述了处理随机的基本模型和求解方法; 第 3 章、第 4 章则讲述 Markov 链、Markov 决策规划的问题; 第 5 章的基本内容是排队论. 除了通常的排队模型之外, 我们还讲述带优先服务权的排队模型及排队网络等内容; 第 6 章介绍库存论中确定性库存模型及随

机性库存模型; 第 7 章是可靠性理论的内容, 限于篇幅只讨论了典型不可修系统的可靠性分析. 第 8 章简单地介绍了前面一些章节所需要的模拟技术.

在行文过程中, 我们根据管理类和理工类学生的基础和特点, 侧重介绍运筹学的基本概念、理论和方法, 并尽可能结合案例培养读者解决实际问题的能力. 为使读者更好地掌握本书中涉及的理论和方法, 每章后都配有一定量的有代表性的习题.

本书力图做到内容丰富而结构科学, 以适应不同类型与层次的教学对象. 本书适合于 68 学时的授课安排, 若采用幻灯片进行多媒体教学, 也适合于 51 学时的授课安排. 此外, 由于本书各章内容具有相对独立性, 并采取灵活的抽屉式结构, 因此除第 1 章和第 3 章作为基础内容一般应讲授之外, 其他各章内容教师可根据具体的需要选讲.

与《运筹学 —— 线性系统优化》一样, 本书配备有完整的教学支持系统, 包括教师手册、不同课时的教学幻灯片讲义以及不断更新的在线支持等. 我们期待通过丰富而到位的教学支持, 能够大大减轻教师的教学负担, 提高学生的学习兴趣与效率.

我们真诚地期待您的批评和建议, 来信请发至 ljscu@163.com, 或者请发至 xujiuping@openmba.com.

作　者

2003 年 11 月

常用符号说明

$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ —— n 维行向量 (或点)

$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$ —— n 维列向量 (或点)

x_i —— n 维向量 x 的第 i 个分量

$x>y$ —— x 的每个分量都大于 y 的相应分量

$\alpha,\alpha_i,\beta,\beta_i,\gamma,\gamma_i$ —— 实数

$[\alpha,\beta]/(\alpha,\beta)$ —— 闭区间 $\alpha\leqslant\xi\leqslant\beta$/开区间 $\alpha<\xi<\beta$

$S=\{x|x$ 所满足的性质$\}$ —— 满足某种性质的 x 的全体 (集合)

$S=\{x^1,x^2,\cdots,x^n\}$ —— 由 $x^1,x^2,\cdots,x^n$ 组成的有限集合

$\forall$ —— 任意

$\exists$ —— 存在

$\emptyset$ —— 空集

E^n —— n 维欧氏空间

$x\in S\ (x\notin S)$ —— x 属于 (不属于) 集合 S

$X\cup Y\ (X\cap Y, X\setminus Y)$ —— X 与 Y 之并集 (交集、余集)

$X\subseteq\ (\subset)\ Y$ —— Y 包含 (完全包含) X

$\|x\|$ —— x 的范数

$x^Ty=x_1y_1+\cdots+x_ny_n$ —— 两个 n 维列向量的内积

$A=(a_{ij})_{m\times n}$ —— $m\times n$ 矩阵

A^T —— 矩阵 A 的转置

A^{-1} —— 满秩方阵 A 的逆矩阵

$|A|=\det A$ —— 方阵 A 的行列式

$f(x)$ —— 向量 x 的函数 (或 n 元函数)

$\max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ —— 数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中最大者

$\min\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ —— 数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中最小者

$\max\limits_{x\in R}f(x)\ (\min\limits_{x\in R}f(x))$ —— $f(x)$ 在 R 上的最大 (最小) 者

目　录

第 1 章 非线性规划

1.1 引 言

在《运筹学 —— 线性系统优化》一书中, 我们讨论过线性规划, 其目标函数和约束条件都是自变量的线性函数. 如果目标函数和约束函数中至少有一个是自变量的非线性函数, 则这种规划问题就称为非线性规划问题 (nonlinear programming, 可简记为 NP). 作为运筹学的一个十分重要的分支, 最近几十年, 非线性规划发展得很快, 在资源分配、最优设计、管理科学、质量控制等许多领域有着广泛的应用.

一般地, 解非线性规划问题要比解线性规划问题困难得多, 因为它不像线性规划问题有单纯形法这一通用方法, 而是要根据目标函数和约束条件的具体特点给出不同解法. 因而, 非线性规划的各种算法大都有自己特定的适用范围.

1.1.1 非线性规划问题举例

【例 1.1】(资金最优使用方案) 设有 400 万元资金, 要求 4 年内使用完, 若在一年内使用资金 x 万元, 则可获得效益 $\sqrt{x}$ 万元 (效益不能再使用), 当年不用的资金可存入银行, 年利率为 10%. 试制定出这笔资金的使用方案, 以使 4 年的经济效益总和为最大.

很明显, 使用方案不同, 现有资金在 4 年内所获得的效益总和是不相同的. 针对现有资金 400 万元, 对于不同的使用方案, 4 年内所获得的效益总和是不相同的. 比如第 1 年就把 400 万元全部用完, 则获得效益总和为 20.0 万元; 若前 3 年均不用这笔资金, 而是把它存入银行, 则第 4 年时本息和为 $400\times1.1^3=532.4$ 万元, 再把它全部用完, 则效益总和为 23.07 万元, 比第一种方案多 3 万多元. 所以, 用最优化的方法可以制定出一种最优的使用方案, 使得 4 年的经济效益总和为最大.

设 $x_j(j=1,2,\cdots,4)$ 分别表示第 j 年所使用的资金数; 用变量 z 表示 4 年的效益总和.

目标函数为

$$\max z=\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\sqrt{x_3}+\sqrt{x_4}$$

由于每一年所使用的资金数既不能为负值, 也不能超过当年所拥有的资金数, 于是, 需要满足以下的约束:

第 1 年: $0\leqslant x_1\leqslant 400$;

第 2 年: $0\leqslant x_2\leqslant 1.1\times(400-x_1)$ (第 1 年未用资金存入银行一年后本利之和);

第 3 年: $0\leqslant x_3\leqslant 1.1\times[1.1\times(400-x_1)-x_2]$;

第 4 年: $0\leqslant x_4\leqslant 1.1\times\{1.1\times[1.1\times(400-x_1)-x_2]-x_3\}$.

所以, 资金使用问题的数学模型为

$$\max z=\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\sqrt{x_3}+\sqrt{x_4}$$
$$\text{s.t.}\begin{cases}x_1\leqslant 400\\1.1x_1+x_2\leqslant 440\\1.21x_1+1.1x_2+x_3\leqslant 484\\1.331x_1+1.21x_2+1.1x_3+x_4\leqslant 532.4\\x_j\geqslant 0\quad(j=1,2,\cdots,4)\end{cases}$$

【例 1.2】(定位问题) 某地要选定一个供应某类物品的服务中心, 让它向该地的 n 个固定位置的用户提供服务. 假设该地的所有道路均是相互平行或垂直的 (见图 1.1), 试确定这个服务中心的位置, 使它到各用户的总距离为最短?

在地面上引进直角坐标系如图 1.1 所示. 设服务中心的位置为 $C(x_1,x_2)$, n

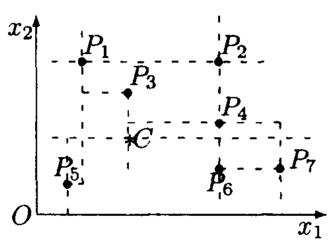


图 1.1 定位问题

个用户的坐标分别为 $P_i(a_i, b_i)$ $(i=1,2,\cdots,n)$, 则服务中心到第 i 个用户的距离为 $|x_1-a_i|+|x_2-b_i|(i=1,2,\cdots,n)$. 显然, 求服务中心到各用户的总距离 D 的极小的数学模型为

$$\min\ D=\sum_{i=1}^{n}[|x_1-a_i|+|x_2-b_i|]$$

如果还要求服务中心 C 到第 i $(i=1,2,\cdots,n)$ 个用户 P_i 的距离必须介于 c_i 和 d_i 之间, 那么, 相应的数学模型为

$$\begin{aligned}&\min D=\sum_{i=1}^{n}(|x_1-a_i|+|x_2-b_i|)\\&\quad\text{s.t.}\ \ c_i\leqslant|x_1-a_i|+|x_2-b_i|\leqslant d_i\quad(i=1,2,\cdots,n)\end{aligned}$$

1.1.2 非线性规划模型和最优解

现在, 对前面所举的非线性规划问题的例子进行归纳抽象, 给出非线性规划一般的数学模型, 并介绍非线性规划模型的最优解等有关概念.

非线性规划的一般模型为

$$\min_{x\in X} f(x) \tag{1.1}$$

其中 $X\subseteq E^n$, X 称为可行域. 当 $X=E^n$ 时, 非线性规划模型 (1.1) 称为无约束问题; 当 $X\subset E^n$ 时, 非线性规划模型 (1.1) 称为有约束问题. 可行域中的点 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$ 称为可行点, 或说点 x 对模型 (1.1) 是可行的. $f(x)$ 称为目标函数, 使 $f(x)$ 在 X 上取到最小值的点 x^* 称为最优解, 对应的目标函数值称为最优值.

由于问题 $\max\limits_{x\in X} f(x)$ 可以转化为等价的模型 $\min\limits_{x\in X}[-f(x)]$, 故以下仅考虑极小化问题. 为统一起见, 称以下模型:

$$\begin{aligned}&\min\ \ f(x)\\&\ \text{s.t.}\ \begin{cases}g_i(x)\leqslant 0 & (i=1,2,\cdots,m)\\ h_j(x)=0 & (j=1,2,\cdots,l)\end{cases}\end{aligned} \tag{1.2}$$

为标准的非线性规划, 简记为 (NP). 如不作特别说明本书中所讨论的均为该模型. 其中 $f(x), g_i(x), h_j(x)$ 都是定义在 E^n 上的实值函数, s.t. 表示 "受限制于", 取自英文 "subject to" 的缩写; $g_i(x)(i=1,2,\cdots,m)$ 及 $h_j(x)$ $(j=1,2,\cdots,l)$ 称为约束函数, 称 $g_i(x)\leqslant 0$ 为不等式约束, $h_j(x)=0$ 为等式约束.

若记 $g(x)=(g_1(x),g_2(x),\cdots,g_m(x))^T, h(x)=(h_1(x),h_2(x),\cdots,h_l(x))^T$，则模型可简写为

$$\begin{aligned}&\min\ f(x)\\&\text{s.t.}\begin{cases}g(x)\leqslant 0\\h(x)=0\end{cases}\end{aligned}$$

【定义 1.1】(**全局最优解**) 设 $X\subseteq E^n, f:E^n\to E^1$. 若 $x^*\in X$, 且对 $\forall x\in X$ 有 $f(x^*)\leqslant f(x)$, 则称 x^* 是 (NP) 的全局最优解或全局极小点. 相应的, 称 $f(x^*)$ 是 (NP) 的全局最优值或全局极小值.

如果对 $\forall x\in X, x\neq x^*$, 有 $f(x^*)<f(x)$, 则称 x^* 是 (NP) 的严格全局最优解或严格全局极小点. 相应的, 称 $f(x^*)$ 是 (NP) 的严格全局最优值或严格全局极小值.

【定义 1.2】(**局部最优解**) 设 $X\subseteq E^n, f:E^n\to E^1$. 若 $x^*\in X$, 并且存在 x^* 的邻域 $N_\delta(x^*)$, 使得对 $\forall x\in N_\delta(x^*)\cap X$, 有 $f(x^*)\leqslant f(x)$, 则 x^* 是 (NP) 的局部最优解或局部极小点, 称 $f(x^*)$ 是 (NP) 的局部最优值或局部极小值. 其中, $N_\delta(x^*)=\{x\in E^n \mid \|x-x^*\|<\delta\}\ (\delta>0)$.

当 $x\neq x^*$, 且上面的不等式为严格不等式 $f(x^*)<f(x)$ 时, 则称 x^* 为 (NP) 的严格局部最优解.

当一个非线性规划问题只有一个或两个决策变量时, 全局最优解及局部最优解具有直观的几何意义. 图 1.2 给出了 $n=1$ 时的直观图示.

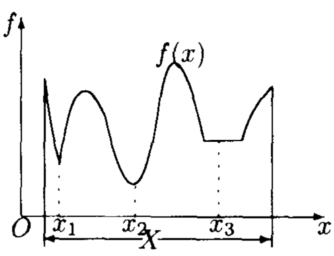


图 1.2 一元函数的全局及局部最优解

可以看出, x_1,x_2,x_3 是局部最优解, 而且 x_2 还是全局最优解, x_1 是严格局部最优解, 而 x_3 不是严格局部最优解. 在非线性规划中, 局部最优解不一定是全局最优解, 而全局最优解一定为局部最优解.

【例 1.3】 考虑用图解法求解如下非线性规划问题:

(1) $\max z = 3x_1 + 5x_2$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 \leqslant 4 \\ 9x_1^2 + 5x_2^2 \leqslant 216 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

(2) $\max z = 54x_1 - 9x_1^2 + 78x_2 - 13x_2^2$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 \leqslant 4 \\ 2x_2 \leqslant 12 \\ 3x_1 + 2x_2 \leqslant 18 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

解 (1) 目标函数为线性函数, 约束条件中有一个是非线性函数, 可行域 X_1 如图 1.3(a) 中阴影区域所示. 点 $(x_1, x_2)^T = (2,6)^T$ 为最优解, 且最优解落在可行域的边界上 (但它不是可行域 X 的顶点或极点).

(2) 目标函数为非线性函数, 约束条件均为线性函数, 可行域 X_2 如图 1.3(b) 中阴影区域所示. 点 $(x_1, x_2)^T = (3,3)^T$ 为最优解, 它落在可行域的内部.

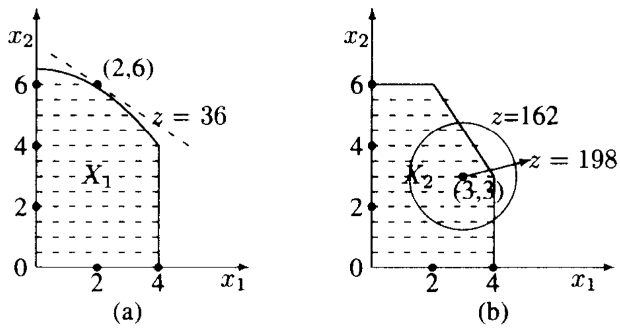


图 1.3 二元函数的全局最优解

由此可见, 在寻找非线性规划问题的最优解时, 不能像在线性规划中一样只在顶点处寻找, 不但要考虑边界上的点, 还要考虑可行域中的所有点.

1.2 凸集与凸函数

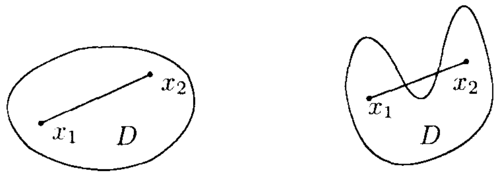
下面非线性规划中的某些理论以这样或那样的方式和凸集及凸函数相联系, 接下来, 介绍与数学规划密切相关的凸集及凸函数的一些性质.

1.2.1 凸集及有关性质

【定义 1.3】 设集合 $D \subseteq E^n$, 如果对 $\forall\, x^1, x^2 \in D$ 及 $\alpha \in (0,1)$, 有 $\alpha x^1 + (1 -$

$\alpha)x^2 \in D$, 则称 D 为凸集.

凸集具有明显的几何意义. 从上述定义可知, 若一个集合是凸的, 意味着连接该集合中任意两点的线段也必包含在此集合中 (如图 1.4 所示).



(a) 凸集　　(b) 不是凸集

图 1.4 凸集与非凸集

【例 1.4】 设 $x^* \in E^n$, 点 x^* 的 δ 邻域 $N_\delta(x^*)$ 是凸集, 其中 $N_\delta(x^*) = \{x \in E^n | \, \| x - x^* \| \leqslant \delta\}$ $(\delta > 0)$.

集合 $D = \{x \in E^n | Ax \leqslant b, \, x \geqslant 0\}$ 也是凸集.

【例 1.5】 设 $x_1, x_2, \cdots, x_m \in E^n$, 对任意的 α_i $(0 < \alpha_i < 1; i = 1, 2, \cdots, m)$ 并且 $\sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$, 则集合 $D = \{x \in E^n | x = \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i x_i\}$ 是凸集. D 中的点 x 叫做点 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 的凸组合.

【定理 1.1】 设 D_1, D_2 是 E^n 中的凸集, 则

(1) $\alpha D_1 = \{\alpha x | x \in D_1\}$ 是凸集, 其中 α 是实数;

(2) $D_1 + D_2 = \{x + y | x \in D_1, y \in D_2\}$ 是凸集;

(3) $D_1 \cap D_2$ 是凸集.

以上都可由凸集的定义直接得到验证, 请自行证明, 或参见文献 [1].

1.2.2 凸函数的定义及性质

【定义 1.4】 设 $D \subseteq E^n$ 非空凸集, $f: D \to E^1$. 若对 $\forall x_1, x_2 \in D$ 及 $\forall \alpha \in (0, 1)$ 有

$$f[\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2] \leqslant \alpha f(x_1) + (1 - \alpha) f(x_2) \tag{1.3}$$

则称 $f(x)$ 为 D 上的凸函数, 或 $f(x)$ 在 D 上是凸的.

如果不等式 (1.3) 对 $\forall x_1, x_2 \in D, x_1 \neq x_2$ 严格成立, 即有

$$f[\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2] < \alpha f(x_1) + (1 - \alpha) f(x_2)$$