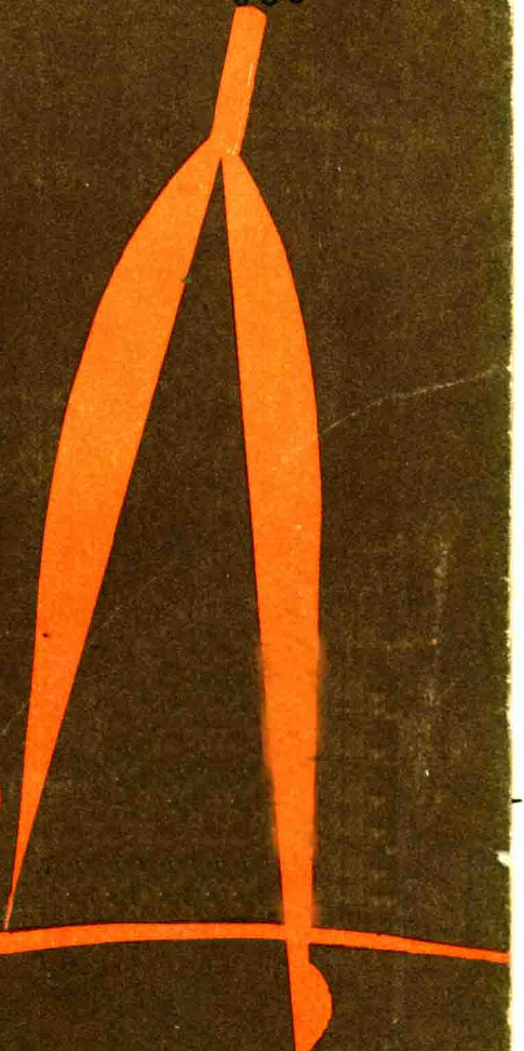
崔冠之 编著



高中数学 自测试题解析

中国和平出版社

内 容 提 要

本书根据全日制中学数学教学大纲及全国成人高考复习大纲的要求，围绕高中数学知识的重点、难点及关键问题采取了每章自测试题的形式。

本书将高中数学内容分为代数、三角、立体几何和平面解析几何这四大部分，每部分又分成若干章，每章均由内容提要、自测试题（一）、自测试题（一）的解法及解答、自测试题（二）、自测试题（二）的答案及注意事项等五方面内容组成。

本书可供高中学生、广大自学青年和准备参加成人高考的职工学习使用，也可供学生家长辅导子女学习时参考使用，并可供中等学校数学教师参考。

高中数学自测题解析
崔冠之 编著
※
中国和平出版社出版
（北京东城区豆腐池9号）
新华书店北京发行所发行
冶金胶印厂印刷
※
开本787×1092 1/32开 印张16.5 字数330千字
1988年10月第1版 1988年第1次印刷
印数1—23400
ISBN 7—80037—168—9/G·86
定价：4.35元

前　　言

《高中数学自测试题解析》一书是为帮助广大职工和高中学生系统地学习和复习高中数学课程，以适应四化建设的需要和参加高等院校招生考试的需要而编写的。本书按照国家教委制定的全日制中学数学教学新大纲和全国成人高考复习大纲的要求，对现行高中数学教材的基本内容进行了系统的综合整理，特别是在总结了作者多年来从事中学数学教学工作所取得的经验的基础上，汇集了高考复习课中许多行之有效的题目编写而成的。

从自学青年和高中学生的实际情况出发，为了使大家能以较少的时间获得较全面地掌握高中数学知识，并提高分析问题和解决问题的能力的目的，本书围绕高中数学知识的重点、难点及关键问题采取了每章自测试题的形式，便于读者单元过关，只要按本书的顺序自学或复习，并做出每章中的一份自测试题，读者便能一步一个脚印地把高中数学知识切实学到手。

本书将高中数学内容分为代数、三角、立体几何和平面解析几何这四大部分，每部分又分成若干章，每章均由内容提要、自测试题（一）、自测试题（一）的解法及解答、自测试题（二）、自测试题（二）的答案及注意事项等五方面的内容组成。有些是作者精心设计的。这些题目能紧扣大纲和教材，突出双基、富有典型性，有的还有举一反三、触类旁通的效果，在注意了题目对知识覆盖面的同时，还特别注意了尽量减少题目的数量。在每份试题中，仅含七、八个题目，一般不超过十个题，

全书共计二十二章，每章两份自测试题，共计四百余题，由于自测试题（一）和（二）是类型相同的题目，所以读者只需独立做出大约二百个题目，就可达到掌握高中数学的目的了。因此本书在帮助读者摆脱茫茫题海、开拓解题思路、掌握题解方法和技巧、提高学习效果等方面，将成为广大中学生和自学青年的良师益友。

本书除供中学生和广大职工学习使用外，还可供学生家长辅导子女学习时使用，也可供中学数学教师参考。

本书请有丰富教学经验的郑国安先生审读，在此特致以谢意。

由于编者水平有限，加上编写时间仓促，有错误和不妥之处，欢迎批评指正。

编者　崔冠之

1988年10月于北京

目　　录

代　　数

三　　角

立体几何

平面解析几何

代　　数

一、数与代数式

1．实数与代数式

内容提要

中学所学的各种数的范围及代数式的类型可归纳如下：

- 复数 $a+bi$ $(a, b \in R)$
  - 实数 $(b=0)$
    - 有理数
      - 整数
        - 正整数（自然数）
        - 零
        - 负整数
      - 分数
        - 正分数（可以化为有限小数
        - 负分数　或无限循环小数）
    - 无理数
      - 正无理数（可以化为无限不循环
      - 负无理数　小数）
  - 虚数
    - 纯虚数 $(a=0)$
    - 非纯虚数 $(a \neq 0)$

- 代数式
  - 有理式
    - 整式
      - 单项式
      - 多项式
    - 分式
  - 无理式

这部分知识中，只有复数的概念及运算是高中的内容，其余都是在初中学习的．为了学好高中数学，这些初中学过的旧知识必须牢固地掌握．以下仅强调绝对值和平方根这两个较难掌握的概念，希望能引起注意．

1．实数的绝对值

正数和零的绝对值是其本身，负数的绝对值是它的相反数．实数 a 的绝对值记为 $|a|$．

即：

$$|a|=\begin{cases} a & （当 a \geqslant 0 时）, \\ -a & （当 a<0 时）. \end{cases}$$

$|a|$的几何意义：在数轴上表示实数 a 的点到原点的距离．显然 $|a| \geqslant 0$．

2．平方根与算术平方根

如果一个数的平方等于 a（$a \geqslant 0$），那么这个数就叫做 a 的平方根．

正数 a 的平方根是两个相反的数．它的正的平方根叫做算术平方根（简称算术根），用 $\sqrt{a}$ 表示；负的平方根用 $-\sqrt{a}$ 表示．

零的平方根仍是零，它的算术根也是零．

自测试题（一）

1．求 $|x-2|$ 的值．

2．若 a 为实数，求 $\sqrt{a^2}$ 的值．

3．若 $2<x<4$，求 $|x-2|+\sqrt{(x-5)^2}-\left[|x-6|+\sqrt{(x-1)^2}\right]$ 的值．

4．如果 a 为任意实数，化简 $\sqrt{a^2}+\sqrt{(1-a)^2}$．

5．计算 $\left(\dfrac{6}{2-\sqrt{2}}+\sqrt{0.08}+\sqrt{1\dfrac{7}{25}}\right)\times 6\sqrt{2}$．

6．将多项式 x^5y-9xy^5 分别在有理数、实数、复数范围内分解因式．

7. 化简

$$\frac{2+\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}}{x+\dfrac{x}{x^2-1}}$$

8. 用语言叙述下列各式所确定的实数 a 与 b 之间的关系或值的范围.

（1）$a+b=0$；（2）$ab=1$；（3）$ab=0$；（4）$ab\neq 0$；（5）$(a-b)^2=0$；（6）$a^2+b^2=0$；（7）$a^2=b^2$；（8）$a^2+b^2>0$.

自测试题（一）的解法分析及解答

1.

分析：根据定义，要去掉绝对值的符号，应分为 $x-2\geqslant 0$ 或 $x-2<0$ 两种情况讨论.

解：$|x-2|=\begin{cases} x-2 & (\text{当 } x\geqslant 2 \text{ 时}), \\ 2-x & (\text{当 } x<2 \text{ 时}). \end{cases}$

2.

分析：根据算术根的定义，$\sqrt{a^2}=|a|$；再根据绝对值的定义求值.

解：$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases} a & (\text{当 } a\geqslant 0 \text{ 时}), \\ -a & (\text{当 } a<0 \text{ 时}). \end{cases}$

3.

分析：先去掉算术平方根符号，此时应注意加绝对值符号；然后根据已知条件 $2<x<4$，考虑绝对值符号里面的数是正数、是负数还是零，再根据绝对值的定义，去掉绝对值符号；最后，进行加、减法运算求出结果。

解：$\because 2<x<4$，

$\therefore$ 原式 $=|x-2|+|x-5|-(|x-6|+|x-1|)$

$=(x-2)+(5-x)-[(6-x)+(x-1)]$

$=x-2+5-x-6+x-x+1$

$=-2$.

4．

分析：解题的步骤与第3题基本相同．要注意的是本题没有给出 a 在哪两个具体数字之间，因此，在去掉绝对值符号时，应分别讨论．对 $|a|$ 而言，要求 a 与0比较；对 $|1-a|$ 而言，要求 a 与1比较，遇到这种情况，不妨先画出一条数轴，然后把0，1标出，数轴就被表示0，1的点分为三部分，这样就可分为 $a\geqslant 1$，$0\leqslant a<1$ 及 $a<0$ 这三种情况来讨论了．

解：原式 $=|a|+|1-a|$.

分下面三种情况讨论：

当 $a\geqslant 1$ 时，$|a|+|1-a|=a+(a-1)=2a-1$；

当 $0\leqslant a<1$ 时，$|a|+|1-a|=a+(1-a)=1$；

当 $a<0$ 时，$|a|+|1-a|=(-a)+(1-a)=1-2a$.

所以，$$\sqrt{a^2}+\sqrt{(1-a)^2}=\begin{cases}2a-1 & (\text{当 } a\geqslant 1 \text{ 时}),\\ 1 & (\text{当 } 0\leqslant a<1 \text{ 时}),\\ 1-2a & (\text{当 } a<0 \text{ 时}).\end{cases}$$

5．

分析：先把小数化成分数；再把括号内的各根式化简，其中包括分母有理化，合并同类根式，最后与括号外面的根式相乘．

解：原式 $=\left(\dfrac{6}{2-\sqrt{2}}+\sqrt{\dfrac{8}{100}}+\sqrt{\dfrac{32}{25}}\right)\times 6\sqrt{2}$

$=\left(\dfrac{6(2+\sqrt{2})}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{5}+\dfrac{4\sqrt{2}}{5}\right)\times 6\sqrt{2}$

$$= \left(6 + 3\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{5} + \frac{4\sqrt{2}}{5}\right) \times 6\sqrt{2}$$

$$= (6 + 4\sqrt{2}) \times 6\sqrt{2}$$

$$= 36\sqrt{2} + 48.$$

6．

分析： 在指定的数的范围内，分解到不能再分解为止．

解： 原式 $= x^5y - 9xy^5$

$= xy(x^4 - 9y^4)$

$= xy(x^2 - 3y^2)(x^2 + 3y^2)$

（在有理数范围内）

$= xy(x - \sqrt{3}y)(x + \sqrt{3}y)(x^2 + 3y^2)$

（在实数范围内）

$= xy(x - \sqrt{3}y)(x + \sqrt{3}y)(x - \sqrt{3}yi)(x + \sqrt{3}yi)$

（在复数范围内）

7．

分析： 先对繁分式的分子、分母中的分式分别进行通分，然后再利用除法法则进行化简．

解：

$$原式 = \frac{2 + \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+1}}{x + \dfrac{x}{(x-1)(x+1)}}$$

$$= \frac{\dfrac{2(x-1)(x+1) + (x+1) - (x-1)}{(x-1)(x+1)}}{\dfrac{x(x-1)(x+1) + x}{(x-1)(x+1)}}$$

$$= \frac{2(x-1)(x+1) + (x+1) - (x-1)}{x(x-1)(x+1) + x}$$

$$=\frac{2x^2-2+x+1-x+1}{x^3-x+x}$$

$$=\frac{2x^2}{x^3}=\frac{2}{x}.$$

8．

解：（1）$a+b=0$　即 $a=-b$，表示 a，b 是互为相反的数；

（2）$ab=1$ 即 $a=\frac{1}{b}$，表示 a，b 互为倒数（显然 $a\neq 0$ 且 $b\neq 0$）；

（3）$ab=0$　表示 a，b 中至少有一个为零；

（4）$ab\neq 0$　表示 a，b 都不为零；

（5）由 $(a-b)^2=0$ 得 $a-b=0$ 也就是 $a=b$，表示 a 与 b 相等；

（6）$a^2+b^2=0$ 表示 a，b 都是零；

（7）$a^2=b^2$，则有 $|a|=|b|$　表示 a 与 b 相等或 a 与 b 互为相反数；

（8）$a^2+b^2>0$ 表示 a，b 不全为零．

注意：在数学题目中，经常用一个等式或不等式表示已知条件，正确理解这些式子的含意，即正确理解其中各字母之间的关系或它们的取值范围，对于正确地应用已知条件解决问题是十分有利的．

自测试题（二）

1．求 $\sqrt{(2x-3)^2}$ 的值．

2．当 x 取何值时，下列各等式成立．

（1）$\sqrt{(x-8)^2}=x-8$；

（2）$\sqrt{(5-x)^2}=x-5$.

3．若 a 为任意实数，化简 $\sqrt{(1-a)^2}+\sqrt{(a-7)^2}$.

4．当 $1<x<2$ 时，化简 $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$.

5．计算：

（1）$16\times(-3)^2+5\times(-3)-12\div2+(-60)\div(-4)+18\times(-2)^3-(-3)\times2$；

（2）$\left[(-5)^2\times\left(-\frac{3}{5}\right)+15\right]\times8\div7+1$.

6．把下列各数按从小到大的顺序用不等号连接起来.

$|-5|$，-3，$\left|\frac{2}{3}\right|$，0，$\sqrt{5}$，$-\left|-\frac{1}{\sqrt{2}}\right|$

7．如果 $x=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$，$y=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$；

求多项式 $3x^2-5xy+3y^2$ 的值.

8．将下列各式分解因式：

（1）$x^4y-x^2y^3+x^3y^2-xy^4$；

（2）$a^2-2ab+b^2-3b+3a+2$；

（3）$ax^2+b^2xy-2a^2y^2-b^2x^2-a^2xy+2b^2y^2$.

自测试题（二）的答案及注意事项

1．$\begin{cases}2x-3 & \left(\text{当 } x>\frac{3}{2}\text{ 时}\right),\\ 3-2x & \left(\text{当 } x<\frac{3}{2}\text{ 时}\right).\end{cases}$

2．（1）$x>8$；（2）$x<5$.

3. $\begin{cases} 2a-8 & (\text{当 } a\geqslant 7 \text{ 时}), \\ 6 & (\text{当 } 1\leqslant a<7 \text{ 时}), \\ 8-2a & (\text{当 } a<1 \text{ 时}). \end{cases}$

4. 2

注意：（1）把原式中的被开方式 $x+2\sqrt{x-1}$ 和 $x-2\sqrt{x-1}$ 都写成完全平方的形式.

即
$$\begin{aligned} x+2\sqrt{x-1} &= (x-1)+2\sqrt{x-1}+1 \\ &= (\sqrt{x-1})^2+2\sqrt{x-1}+1 \\ &= (\sqrt{x-1}+1)^2. \end{aligned}$$

同样 $x-2\sqrt{x-1}=(\sqrt{x-1}-1)^2$.

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2}+\sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2} \\ &= |\sqrt{x-1}+1|+|\sqrt{x-1}-1|. \end{aligned}$$

（2）在去掉绝对值符号时，由已知条件 $1\leqslant x<2$，可有 $0\leqslant x-1<1$，也就有 $0\leqslant\sqrt{x-1}<1$.

于是 $\sqrt{x-1}+1>0$，

$\sqrt{x-1}-1<0$.

$|\sqrt{x-1}+1|=\sqrt{x-1}+1$，

$|\sqrt{x-1}-1|=1-\sqrt{x-1}$.

5. （1）0；（2）1.

6. $-3<-\left|-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right|<0<\left|\dfrac{2}{3}\right|<\sqrt{5}<|-5|$.

7. 289.

注意：先把已知条件中的分式化简，再代入多项式求值.

8.

（1）$xy(x-y)(x+y)^2$；

（2）$(a-b+1)(a-b+2)$；

（3）$(x-y)(x-2y)(a+b)(a-b)$.

注意：通常如果不特殊声明时，因式分解都是在有理数范围内进行.

2. 复　数

内容提要

（一）复数的概念

（1）虚数单位

(i) 虚数单位为 i，并且规定 $i^2=-1$；

(ii) 虚数单位 i 可以与实数一起进行加、减、乘、除四则运算；

(iii) i 的乘方具有如下性质：

$$i^{4n}=1,\ i^{4n+1}=i,\ i^{4n+2}=-1,\ i^{4n+3}=-i\ (n\in N)$$

若规定 $i^0=1$，$i^{-m}=\frac{1}{i^m}$ $(m\in N)$，则上述性质对于一切 $n\in Z$ 都成立.

（2）复数的定义

形如 $a+bi$ 的数（其中 a，b 均为实数），叫做复数. a 叫做复数的实部，b 叫做复数的虚部.

(i) 当 $b=0$ 时，复数 $a+bi$ 就是实数；当 $b=0$ 且 $a=0$ 时，这个复数为零；

(ii) 当 $b\neq 0$ 时，复数 $a+bi$ 叫做虚数；当 $b\neq 0$ 且 $a=0$ 时，复数 $a+bi$ 叫做纯虚数.

（3）复数的相等

(i) 两个复数 $a+bi$ 和 $c+di$ 相等的充要条件是 $a=c$ 且 $b=d$（a、b、c、$d\in R$）.

(ii) 复数 $a+bi=0$ 的充要条件是 $a=0$ 且 $b=0$