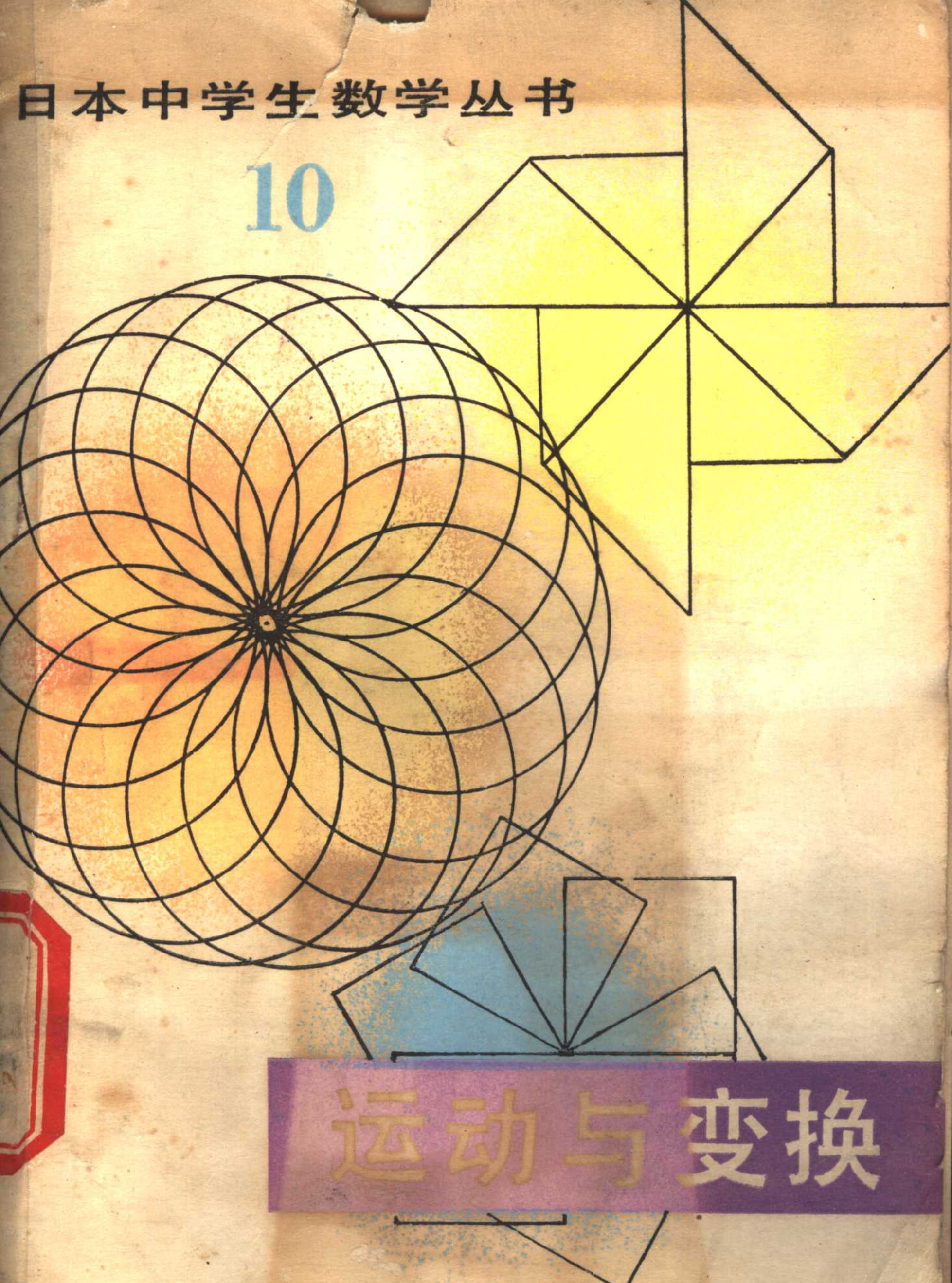
日本中学生数学丛书

10



运动与变换

日本中学生数学丛书(10)

运动与变换

〔日〕　　　大山正信　著

刘凤璞　译　　马忠林　审校

吉林人民出版社

内容提要

《运动与变换》是日本山梨大学教授横地 清主编的中学生数学丛书第10卷。本书共分三章：运动，变换，拓扑。著者用生动而有趣的实例，通俗易懂的语言阐述了运动、变换和拓扑三个数学专题。这本书是广大中学数学教师备课 和教学最适用的参考书，也是广大中学学生丰富数学知识不可多得的一本课外读物。

日本中学生数学丛书(10)

运　动　与　变　换

〔日〕大山正信　著

刘凤璞　译　马忠林　审校

*

吉林人民出版社出版　吉林省新华书店发行

长春新华印刷厂印刷

*

787×1092毫米32开本　4 1/8印张　70,000字

1981年7月第1版　1981年7月第1次印刷

印数：1—10,370册

书号：13091·64　定价：0.55元

出版说明

为了解国外教学情况，我们组织翻译出版由日本山梨大学教授横地　清主编的一套中学生数学丛书共十二卷，它是日本中学生的数学课外读物。这套丛书是以近代数学的观点和方法，系统地阐述初等数学中的一些重要专题，对我国广大中学生和中学数学教师在理论上和思考分析问题的方法上均有参考价值。

共有十二名同志参加丛书翻译工作，由吉林师大数学系马忠林同志审校，从一九八〇年起陆续出版发行。

吉林人民出版社
一九八〇年元月

目　　录

第Ⅰ章　变　　换

第Ⅰ章　运　　动

无论任何形状的图形，都可以不改变其大小和形状地挪动它。下面的图1，就表示出了在平面上把图形F挪动到了位置F′的状况。

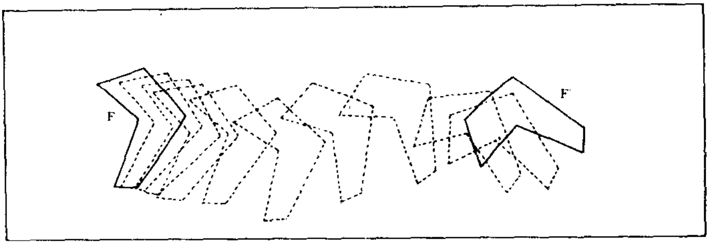


图 1

挪动图形时，即使确定了起始的位置和终止的位置，也能够想象到图形挪动的方式是多种多样的。在这一章里，就来研究作为图形运动的基础的平移、轴对称和旋转。

§1. 平　　移

（1）　挪动纸片

作一张小纸片，然后把它剪裁掉一个任意的图形（见图2）。试用这张纸片来挪动图形。

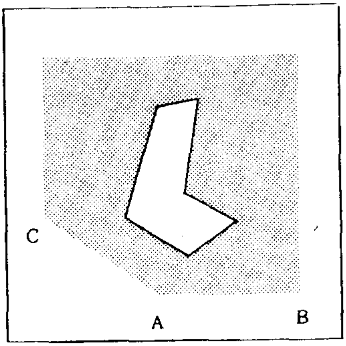


图 2

把纸片的边A B重合到直线 l 上（如图3），并沿着剪下来的形状，先画出来一个图形。

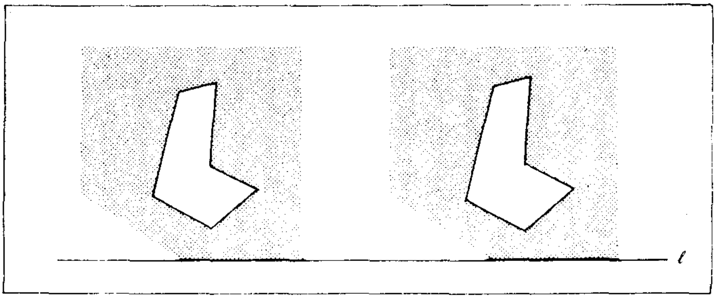


图 3

然后沿着直线 l 挪动一下纸片，并且同样也画出剪下来的图形。这时拿开纸片，就剩下了两个图形，其中的一个图形，正好是由另一个图形按着直线 l 的方向挪动了一定长度得来的。代替纸片的边A B，而用边A C 来说也是一样的。

把某一图形按一定方向挪动一定长度，这样来挪动图形

叫做平行移动。简称平移。

（2） 平移的特征

正象从挪动纸片进行平移时所了解的那样，在平移中图形上的任何点，都正好是按同一方向同一长度进行移动的。在图4的平移中，A移到A′，B移到B′、C移到C′。从而这些线段A A′，B B′，C C′都平行并且长度相等。

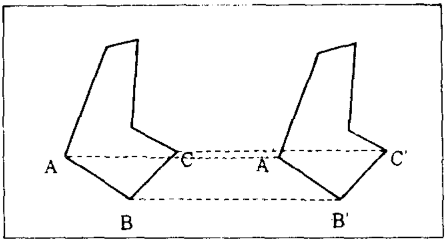


图 4

A与A′，B与B′等叫做对应点。取图形上任何对应的点组，联结它们的线段，都长度相等并且平行。从而有

○用一组对应点，即可确定平移

例如，在图4中，假如知道了A移到A′，那么图形上的所有的点，就都按A A′的方向，正好挪动了和A A′同样的长度。

在图4的平移中，A移到A′，B移到B′时，则线段A B上的点移到了线段A′B′上的点。亦即线段A B移到了线段A′B′。这时线段A B和线段A′B′叫做对应线段。

关于对应线段，下述命题成立。

○对应线段平行且长度相等

就图 4 来说，譬如就是 $AB \parallel A'B'$, $AB = A'B'$。这件事，可以象下面那样进行证明。

〖证明〗因为 A 与 A′，B 与 B′是对应点，所以有

$AA' = BB'$，$AA' \parallel BB'$

所以四边形 $ABB'A'$ 是平行四边形

所以 $AB = A'B'$，$AB \parallel A'B'$

○**对应线段所成的角相等**

就图 4 来说，例如 $\angle ABC = \angle A'B'C'$ 成立。

〖证明〗因为 AB 与 A′B′，BC 与 B′C′是对应线段，所以有

$AB \parallel A'B'$，$BC \parallel B'C'$

所以 $\angle ABC = \angle A'B'C'$

（3） **平移的合成**

一个图形，用平移移动之后，再用另外的平移移动它，这叫做**平移的合成**。

在图 5 中，用把 A 移到 A′的平移，可以把图形 F 移动到 F′。再用把 A′移到 A″的平移，可以把图形 F′移动到 F″。相继进行这两个平移的结果，图形 F 移到了 F″。实际上，这个结果可以用一个平移来代替，这就是把 A 移到 A″的平移。

为了弄清这件事，只要证明用把 A 移到 A″的平移，把图形 F 上的任何点例如 B 移到了图形 F″上的对应点 B″就可以了。

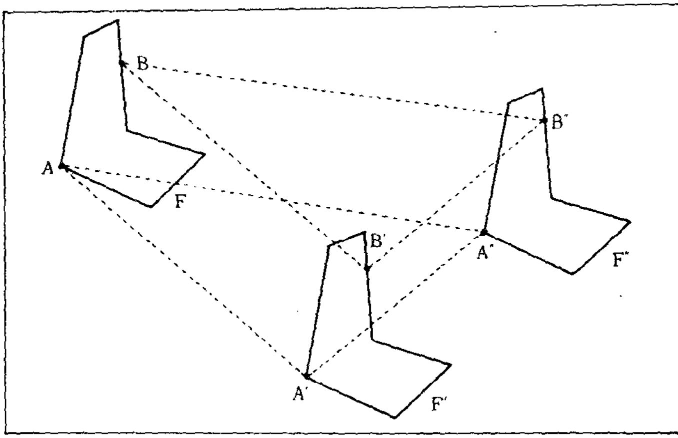


图 5　平移的合成

这个证明，可以象下面那样考虑。

〖证明〗 因为在把图形 F 移到 F′的平移中，线段 A B 与线段 A′B′是对应线段，所以有

$$AB = A'B',\quad AB \parallel A'B'$$

再把图形 F 移到 F″的平移中，同样有

$$A'B' = A''B'',\quad A'B' \parallel A''B''$$

所以

$$AB = A''B'',\quad AB \parallel A''B''$$

从而四边形 A A″B″B 是平行四边形，所以

$$AA'' = BB'',\quad AA'' \parallel BB''$$

所以，在把 A 移到 A″的移动中，B 移到了 B″。

从以上的事实，我们知道两个平移合成的结果，还是一

个平移。在平移中，如果确定了对应的一组点，则确定了这个平移，因此，把A移到A′，A′移到A″，A移到A″的平移，就可以用三个线段A A′，A′A″，AA″来表示它。象图6那样，如果作出了以A，A′，A″为顶点的三角形，那么就可以作两个平移的合成。例如把A″移到A的平移和把A移到A′的平移，二者合成的结果就是把A″移到A′的平移。

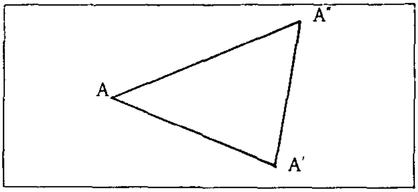


图 6

（4） 制作图案

从大厦的墙壁、西装以及和服（日本式的服装）的花色式样中看到的图案，多数是依据图形的平移，使同样形状反复出现的图案。图7是以直角三角形为基础，依据平移制作出来的图案。这个图案，若设想它左右、上下到任何地方都接连着的话，可以想象出把一个直角三角形移到下一个直角三角形的平移是多种多样的。而

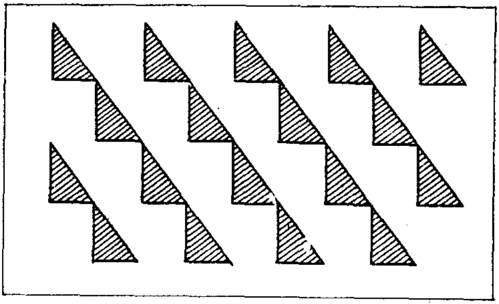


图 7

作为基础的图形，也可以取顶点连接着的两个直角三角形。

图 8 的图案，不能只用一个直角三角形的平移来构成。它的基础图形，是顶点连接着的两个直角三角形（有两种连接法*）。

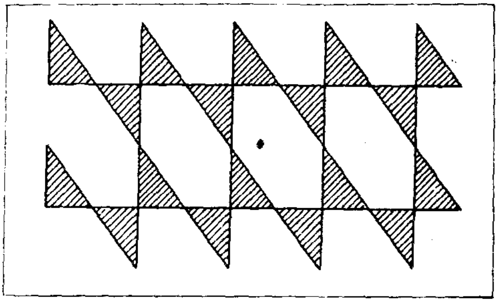


图 8

§2. 轴对称

（1） 翻折

先用上节用过的纸片剪下来的形状画出一个图形，然后

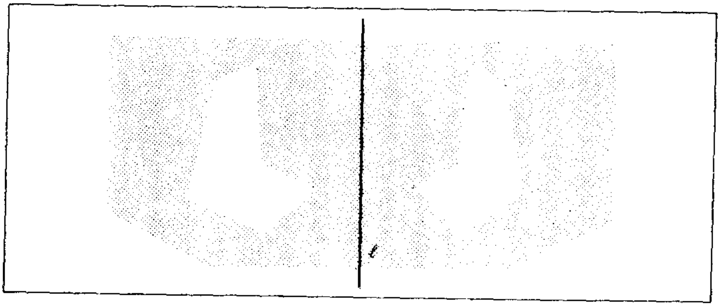


图 9 翻折

* 实际上，连接法不止两种。——译者

把这张纸片沿着它的一个边翻折过来，再画一个图形，象图9那样，就能够得到一个翻了个儿的图形。

往这样的位置来移动图形，若纸片边缘的直线为 l 时，就叫做以直线 l 为折痕的翻折。这时图形正好关于直线 l 成轴对称，因此叫做**轴对称移动**，直线 l 叫做**对称轴**。

（2） 轴对称的特征

用直线 l 为轴的轴对称移动，把图形F移动到图形F′。这个轴对称移动，使A移到A′，B移到B′，C移到了C′。和平移时一样，A与A′，B与B′等，叫做关于这个轴对称移动的对应点。线段AB与线段A′B′，线段BC与线段B′C′等叫做对应线段。并且∠A与∠A′，∠B与∠B′等是对应角。在轴对称移动中，对应线段的长度，对应角的大小都是相等的。并说对应的两个图形F，F′关于直线 l 是对称的。

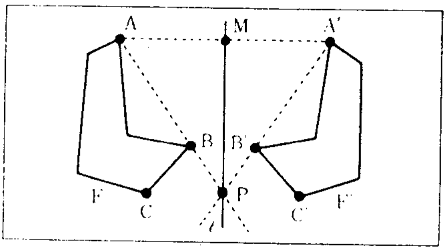


图 10

联结对应的两个点，例如A，A′所成的线段，和对称轴 l 的交点假如是M，由轴对称移动的方法可知

$$AM=MA',\quad AA'\perp l$$

l 平分线段AA′，并且垂直于AA′，所以 l 叫做线段AA′的

垂直平分线。对称轴 l，对于任何一组对应点来说，都是联结那两个点的线段的垂直平分线。

在图10中，线段AB与线段A′B′是对应的线段。从而把这些线段延长而得到的直线AB与直线A′B′，以直线 l为轴，也是对称的。由此可知直线AB与直线A′B′的交点P，必在对称轴 l 上。并且∠APM＝∠A′PM。换句话说通过对称轴 l 上点P的直线AP和A′P，如果关于 l 对称，那么 l 就是∠APA′的平分线。

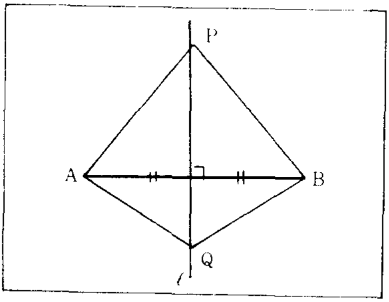


图 11　垂直平分线

（3）　利用轴对称作图

（a）　线段的垂直平分线

设线段AB的垂直平分线为 l，l 上的任意二点为P，Q，因为AP与BP，AQ与BQ是关于直线 l 的对称线段，所以下列等式成立。

$$AP=BP\ ,\ AQ=BQ$$

反之，若知道P，Q是使AP＝BP，AQ＝BQ成立的那样两个点，那么联结P，Q的直线，就是线段AB的垂直平分线。

由此可知，线段AB的垂直平分线，可以象下面那样进行作图。

〖**作图**〗分别以二点A，B为圆心，画半径大于AB长度