主 编 杨松华 王爵禄

高等数学一题多解

GAODENG SHUXUE
YITI DUOJIE

荟萃名题
强化训练
开阔思路
考研助手

郑州大学出版社

高等数学一题多解

主编　杨松华　王爵禄

郑州大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学一题多解/杨松华,王爵禄主编.一郑州:郑州大学出版社,2002.10
ISBN 7-81048-674-8

Ⅰ.高… Ⅱ.①杨… ②王… Ⅲ.高等数学—高等学校—解题 Ⅳ.013-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第076503号

郑州大学出版社出版发行
郑州市大学路40号 邮政编码:450052
出版人:谷振清 发行部电话:0371-6966070
全国新华书店经销
郑州文华印刷厂印制
开本:787 mm×1 092 mm 1/16
印张:14.25
字数:493千字
版次:2002年10月第1版 印次:2002年10月第1次印刷

书号:ISBN 7-81048-674-8/O·13 定价:19.80元
本书如有质量问题,由承印厂负责调换

编者名单

主　编　杨松华　王爵禄
副主编　陆宜清　袁　舫

前言

在高等数学教材中，为了说明某个问题，一个题目一般只给出一种解法，这样就有很大的局限性。事实上，在高等数学的部分题目中，一个题往往会有多种解法。

本书致力于高等数学部分题目的一题多解，提供各类解题的方法和技巧。这不仅有助于学生巩固基础知识，提高解题能力，加强运算技巧，还可以使我们对所学知识间的纵横关系有所了解，同时还可以从这些不同解法中比较优劣，从中找出更简洁的解题途径。

作者根据多年高等数学教学过程中所积累的一些试题和历年工科研究生考试试题中的一些题目，并优选了其他书籍中的一些试题汇编成《高等数学一题多解》。所选题目一般都具有综合性和技巧性。其中每题至少给出三种解法，多的达十种以上。读者可从这多种解法的比较中得到启发，开阔解题思路，进而提高分析问题和解决问题的能力。

本书可供工科院校学生学习高等数学时参考，也可供报考工科院校研究生的同志复习时使用。

本书在编写过程中，采取了部分书刊中的题目和解法，谨向这些书刊的作者表示谢意。由于编者水平有限，时间仓促，书中难免出现缺点和错误，恳请批评指正。

编者

2002 年 4 月

目　录

一　函数与极限

【例1】　设$f(x)$连续，$\int_0^{x^3-1}f(t)\mathrm{d}t = x$，求$f(7)$.

解法一　对等式两边求导，得　$\left[\int_0^{x^3-1}f(t)\mathrm{d}t\right]' = 1$　即　$f(x^3-1)\cdot 3x^2 = 1$

令　$x = 2$，得　$f(7) = \dfrac{1}{12}$.

解法二　设　$F'(x) = f(x)$，则

$$\int_0^{x^3-1}F'(t)\mathrm{d}t = F(t)\Big|_0^{x^3-1} = F(x^3-1) - F(0) = x$$

求导得　$3x^2f(x^3-1) = 1$，令$x = 2$得$f(7) = \dfrac{1}{12}$.

解法三　由于$\left[\int_0^{x^3-1}f'(t)\mathrm{d}t\right]' = 1$

令　$x^3 - 1 = t$，则$x = (1+t)^{\frac{1}{3}}$，　$3(1+t)^{\frac{2}{3}}f(t) = 1$

故　$f(t) = \dfrac{1}{3(1+t)^{2/3}}$

令　$t = 2$，所以　$f(7) = \dfrac{1}{12}$.

【例2】　设　$f(x+1) = x^2 - 3x + 2$，求　$f(x)$.

解法一　$f(x) = f[(x-1)+1] = (x-1)^2 - 3(x-1) + 2 = x^2 - 5x + 6$.

解法二　将$f(x+1) = x^2 - 3x + 2$表为$x+1$的多项式

$$f(x+1) = (x+1)^2 - 5(x+1) + 6$$

所以　$f(x) = x^2 - 5x + 6$.

解法三　换元法

令　$x + 1 = t$，则　$x = t - 1$，于是

$$f(t) = (t-1)^2 - 3(t-1) + 2 = t^2 - 5t + 6$$

所以　$f(x) = x^2 - 5x + 6$.

【例3】　设$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leqslant 0 \\ x^2 + x & x > 0, \end{cases}$求$f(-x)$.

解法一　令$y = -x$，则$x = -y$，且当$x \leqslant 0$时，$y \geqslant 0$；$x > 0$时，$y < 0$. 代入$f(x)$的表达式，有

$$f(-y) = \begin{cases} (-y)^2, & y \geqslant 0, \\ (-y)^2 + (-y), & y < 0. \end{cases}$$

视式中的y为x，便得

$$f(-x) = \begin{cases} x^2 - x, & x < 0, \\ x^2, & x \geqslant 0. \end{cases}$$

解法二　当$x \geqslant 0$时，$-x \leqslant 0$，故由$f(x)$的定义，$f(-x) = (-x)^2 = x^2$；而当$x < 0$时，$-x > 0$，则

$$f(-x) = (-x)^2 + (-x) = x^2 - x,$$

即　$f(-x) = \begin{cases} x^2 - x, & x < 0, \\ x^2, & x \geqslant 0. \end{cases}$

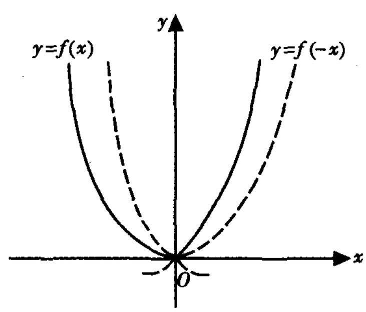

图1－1

解法三　由图1－1可知$f(x)$和$f(-x)$的图形是关于y轴对称的，根据对称原理，从图1－1推出

$$f(-x) = \begin{cases} x^2 - x, & x < 0, \\ x^2, & x \geqslant 0. \end{cases}$$

【例4】 设 $u_1=0.9, u_2=0.99, u_3=0.999, \cdots, u_n=0.\underbrace{99\cdots9}_{n个}$，问 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=?$，$n$ 为何值时，才能使 u_n 与其极限之差的绝对值小于 0.000 1？

解法一 $u_1=0.9, u_2=0.99, u_n=0.\underbrace{99\cdots9}_{n个}$，

当 $n\to\infty$ 时，u_n 无限接近于 1．即 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=1$

又 $u_n=0.\underbrace{99\cdots9}_{n个}=0.9+0.09+0.009+\cdots+\underbrace{0.0\cdots0}_{n个}9=0.9\dfrac{1-0.1^n}{1-0.1}=1-0.1^n$

要使 $|u_n-1|=|(1-0.1^n)-1|=0.1^n<0.000\,1.$

必须 $n>4$．

解法二 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=1$

对任给的 $\varepsilon>0$，要使 $|u_n-1|<\varepsilon$，

因为 $|u_n-1|=\left|0.\underbrace{99\cdots9}_{n个}-1\right|=\left|-0.\overbrace{0\cdots01}^{n个}\right|=0.\overbrace{0\cdots0}^{n个}1$

即是 $0.\overbrace{0\cdots0}^{n个}1<\varepsilon$．

现取 $\varepsilon=0.000\,1$．故 $n>4$ 时，便有 $|u_n-1|<0.000\,1$．

解法三 因为 $u_1=0.9=\dfrac{9}{10}=\dfrac{10-1}{10}=1-\dfrac{1}{10}$，

$$u_2=0.99=\frac{99}{10^2}=\frac{10^2-1}{10^2}=1-\frac{1}{10^2},$$

$$u_3=0.999=\frac{999}{10^3}=\frac{10^3-1}{10^3}=1-\frac{1}{10^3},$$

$$\cdots$$

$$u_n=0.\overbrace{99\cdots9}^{n个}=\frac{\overbrace{99\cdots9}^{n个}}{10^n}=\frac{10^n-1}{10^n}=1-\frac{1}{10^n},$$

要使 $|u_n-1|=\left|(1-\dfrac{1}{10^n})-1\right|=\dfrac{1}{10^n}<0.000\,1=\dfrac{1}{10^4}$，

必须 $n>4$．故 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}0.\overbrace{99\cdots9}^{n个}=1$．

【例5】 设 $x_1=\sqrt{2}$，$x_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}$，$\cdots$，$x_n=\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}$，证明其收敛，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$．

【分析】 这个数列的第 n 项与第 $n+1$ 项分别是

$$x_n=\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}},\ x_{n+1}=\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+\sqrt{2}}}},$$

即有 $x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}$．从直观上看，似有 $x_{n+1}>x_n$ 成立，因此，我们设法证明这个数列是单调上升上有界的．

先用2种方法证明它的单调性．

解法一 数学归纳法

当 $n=1$ 时，有 $x_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}>\sqrt{2}=x_1$

设当 $n=k$ 时，有 $x_{k+1}=\sqrt{2+x_k}>x_k$，则 $\sqrt{2+x_{k+1}}>\sqrt{2+x_k}$，

于是当 $n=k+1$ 时，即有 $x_{k+2}>x_{k+1}$．

所以，对任意自然数 n，恒有 $x_{n+1}>x_n$ 成立，从而数列单调上升．

次证有界性．用数学归纳法

当 $n=1$ 时，有 $x_1<2$，$x_2<2$

设 $n=k$ 时，有 $x_k<2$，则 $x_{k+1}=\sqrt{2+x_k}<\sqrt{2+2}=2$，所以对于任意的 n，有 $x_n<2$．

由上所证，数列$\{x_n\}$单调上升有上界，因而极限一定存在．设其为a，即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n = a$.

由 $x_{n+1}^2 = 2 + x_n$， $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}^2 = 2 + \lim\limits_{n\to\infty}x_n$，

而 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1} = a$， $\lim\limits_{n\to\infty}x_n = a$，于是 $a^2 = 2 + a$．

解方程，得$a_1 = 2, a_2 = -1$（不适合），所以$a = 2$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n = 2$．

解法二 先证单调性．

因为 $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$， $x_{n+1}^2 = 2 + x_n$， $x_n^2 = 2 + x_{n-1}$，

所以 $x_{n+1}^2 - x_n^2 = x_n - x_{n-1}$，$x_{n+1} - x_n = \dfrac{1}{x_{n+1} + x_n}(x_n - x_{n-1})$，

注意到$x_{n+1} + x_n > 0$，故$x_{n+1} - x_n$与$x_n - x_{n-1}$同号，从而推出与$x_2 - x_1$同号，但$x_2 - x_1 > 0$，因此有$x_{n+1} - x_n > 0$，即$x_{n+1} > x_n$，

所以数列$\{x_n\}$单调上升．

再证有界性．

由 $x_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}} < \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2 + \sqrt{4}}}} = 2$，得到$x_n < 2$．

由上面所证，数列$\{x_n\}$单调上升上有界，因而一定有极限存在．

同解法一得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n = 2$．

解法三 先求出x_n再求极限

$$x_1 = \sqrt{2} = 2\cos\frac{\pi}{4},$$

$$x_2 = \sqrt{2 + x_1} = \sqrt{2\left(1 + \cos\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{4\cos^2\frac{\pi}{8}} = 2\cos\frac{\pi}{2^3},$$

设 $x_k = 2\cos\dfrac{\pi}{2^{k+1}}$，

则 $x_{k+1} = \sqrt{2 + x_k} = \sqrt{2\left(1 + \cos\dfrac{\pi}{2^{k+1}}\right)} = \sqrt{4\cos^2\dfrac{\pi}{2^{k+2}}} = 2\cos\dfrac{\pi}{2^{k+2}}$．

故对一切自然数n，均有 $x_n = 2\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$，

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n = \lim\limits_{n\to\infty}2\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}} = 2$．

解法四 由 $|x_{n+1} - 2| = |\sqrt{2 + x_n} - 2| = \left|\dfrac{(\sqrt{2 + x_n} - 2)(\sqrt{2 + x_n} + 2)}{\sqrt{2 + x_n} + 2}\right|$

$$= \frac{|x_n - 2|}{\sqrt{2 + x_n} + 2} \leqslant \frac{1}{2}|x_n - 2|.$$

再由：若自然数N及$r(0 < r < 1)$均为常数，且对任何自然数$n \geqslant N$均有

$$|x_{n+1} - a| \leqslant r|x_n - a|$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n = a$．所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n = 2$．

【注】 解答"已知$x_0 = a, x_{n+1} = f(x_n), n = 0,1,\cdots$，求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$．"这种题目，第一步一定要证明数列$\{x_n\}$的极限存在，第二步令$\lim\limits_{n\to\infty}x_n = a$，由$a = f(a)$解出$a$．这种题目中的$\{x_n\}$多数是单调有界数列．推证单调的常用方法有3种：(1)用数学归纳法；(2)设法证明$x_{n+1} - x_n > 0$（或< 0），或者设法证明$\dfrac{x_{n+1}}{x_n} > 1$（或< 1）；(3)用拉格朗日中值定理：$f(x_n) - f(x_{n-1}) = f'(\xi)(x_n - x_{n-1})$．若$f'(\xi) > 0$，可知$x_{n+1} - x_n$与$x_n - x_{n-1}$同号，再由$x_0 > x_1$（或$x_0 < x_1$）就得$\{x_n\}$单调减（或单调增）．

【例6】 求 $I = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}$．

【分析】 这也是一个求数列极限的题目．解此题的关键是不把$n!$直接投入运算，而是通过比较、转化，从而引出不同的解法．

（一）利用夹逼准则

解法一 因为 $\frac{1}{n^n} \leqslant \frac{n!}{n^n} = \frac{n\cdot(n-1)\cdots3\cdot2\cdot1}{n\cdot n\cdots n\cdot n\cdot n} \leqslant \frac{1}{n}$，

而$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^n}=0$．由夹逼准则，知 $I=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$．

解法二 因为 $0\leqslant\frac{n!}{n^n}\leqslant\frac{1}{n}\cdot\frac{(n-1)^{n-2}}{n^{n-2}}\cdot\frac{n}{n}=\frac{1}{n}(1-\frac{1}{n})^{n-2}$，

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}(1-\frac{1}{n})^{n-2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}(1-\frac{1}{n})^{n}\cdot(1-\frac{1}{n})^{-2}=0$．

由夹逼准则，知 $I=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$．

解法三 由已知不等式 $(\frac{n}{e})^n<n!<e(\frac{n}{2})^n$，

所以 $\frac{(\frac{n}{e})^n}{n^n}\leqslant\frac{n!}{n^n}\leqslant\frac{e(\frac{n}{2})^n}{n^n}$，即 $(\frac{1}{e})^n\leqslant\frac{n!}{n^n}\leqslant e(\frac{1}{2})^n$，

而 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{e})^n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}e(\frac{1}{2})^n=0$．由夹逼准则，知 $I=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$．

（二）利用单调有界准则

解法四 设 $x_n=\frac{n!}{n^n}$，则因 $\frac{x_{n+1}}{x_n}=(\frac{n}{n+1})^n<1$，所以 $0<x_{n+1}<x_n$，即知$\{x_n\}$单调递减，有下界．

由单调有界准则，知 $I=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=a$ 存在．

又 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[(\frac{n}{n+1})^n\cdot x_n\right]$，即 $a=\frac{1}{e}a$，

所以 $a=0$，故 $I=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$．

（三）用定积分定义

解法五 因为 $\frac{n!}{n^n}=e^{\ln\frac{n!}{n^n}}=e^{\sum\limits_{i=1}^{n}\ln\frac{i}{n}}$，而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln\frac{i}{n}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\ln x\mathrm{d}x=-1$，

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln\frac{i}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln\frac{i}{n}=-\infty$，

故 $I=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$．

（四）利用级数收敛的必要条件

可以把 $u_n=\frac{n!}{n^n}$ 看成级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的一般项，若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则必有

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0.$$

解法六 由比较法，因为 $\frac{n!}{n^n}\leqslant\frac{2}{n^2}$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2}$ 收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$ 收敛

故 $I=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$．

解法七 由比值法，因为 $\frac{u_{n+1}}{u_n}=(\frac{n}{n+1})^n\xrightarrow{n\to\infty}\frac{1}{e}<1$，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$ 收敛

故 $I=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$．

解法八 由根值法，因为 $\sqrt[n]{u_n}=\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=e^{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln\frac{i}{n}}\xrightarrow{n\to\infty}e^{-1}<1$．所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$ 收敛

故 $I=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$．

（五）用斯特林公式

解法九　由斯特林公式　$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta_n}{12n}}$　$(0 < \theta_n < 1)$

得　$I = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2\pi n}}{e^n}e^{\frac{\theta_n}{12n}} = 0$.

【例7】　求　$I = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin\frac{n-1}{n}\pi\right)$.

【分析】　从和式　$\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin\frac{n-1}{n}\pi\right)$　（ * ）

看，如要将其化为定积分，那么被积函数当为 $\sin\pi x$，而分点$\frac{1}{n}$和$\frac{n-1}{n}$当 $n\to\infty$ 时分别趋向 0 和 1，所以积分区间为[0,1]，于是将[0,1]作等分，取ξ_i为$\left[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}\right]$的左端点，这样，函数的积分和正是（ * ）式．若以 $\sin x$ 为被积函数，因分点$\frac{\pi}{n}$和$\frac{n-1}{n}\pi$当 $n\to\infty$ 时分别趋于 0 和 π，故积分区间当为$[0,\pi]$．本题也可先求出和，再求极限．

解法一　用定积分（一）

由于 $\sin\pi x$ 在[0,1]上连续，故可积分，从而就有

$$I = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin\frac{n-1}{n}\pi\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\sin\frac{i\pi}{n} = \int_0^1\sin\pi x\,dx = \frac{2}{\pi}$$

解法二　用定积分（二）

将$[0,\pi]$作 n 等分，则有 $\Delta x_i = \frac{\pi}{n}$，从而有

$$I = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin\frac{n-1}{n}\pi\right)$$
$$= \frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n-1}\sin\frac{i}{n}\pi\cdot\frac{\pi}{n} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,dx = \frac{2}{\pi}$$

解法三　先求前 n 项和，再求极限

因为当 $0 < \alpha < 2\pi$ 时，

$$\sin\alpha + \sin2\alpha + \cdots + \sin(n-1)\alpha$$
$$= \sin\frac{\alpha}{2}[\sin\alpha + \sin2\alpha + \cdots + \sin(n-1)\alpha]\cdot\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$
$$= \frac{-\left[\left(\cos\frac{3\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha}{2}\right) + \left(\cos\frac{5\alpha}{2} - \cos\frac{3\alpha}{2}\right) + \cdots + \left(\cos\frac{2n-1}{2}\alpha - \cos\frac{2n-3}{2}\alpha\right)\right]}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$$
$$= -\frac{\cos\frac{2n-1}{2}\alpha - \cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$$

因此　$\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin\frac{n-1}{n}\pi$　$\left(\alpha = \frac{\pi}{n}\right)$

$$= -\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{2n}}\left(\cos\frac{2n-1}{2}\cdot\frac{\pi}{n} - \cos\frac{\pi}{2n}\right)$$
$$= \frac{\sin\frac{\pi}{2}\sin\frac{n-1}{2n}\pi}{\sin\frac{\pi}{2n}} = \frac{\sin\frac{n-1}{2n}\pi}{\sin\frac{\pi}{2n}}$$

于是 $$I=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n-1}{n}\pi\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{n-1}{2n}\pi}{n\sin\frac{\pi}{2n}}=\frac{2}{\pi}\lim_{n\to\infty}\sin\frac{n-1}{2n}\pi\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}=\frac{2}{\pi}\cdot\sin\frac{\pi}{2}\cdot1=\frac{2}{\pi}.$$

【例 8】 设 $0<a<b,x_i=a+\frac{i}{n}(b-a)\quad(i=1,2,\cdots,n)$．试用定积分定义求

$$I=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}.$$

【分析】 当问题表示为乘积的形式时，可以先对数列的各项取对数，然后再化为定积分；根据指数函数 e^x 的连续性，就可以求出 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n$ 来．

解法一 设 $a_n=\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdots x_n}$

取对数 $\ln a_n=\frac{1}{n}[\ln x_1+\ln x_2+\cdots+\ln x_n]=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln[a+\frac{i}{n}(b-a)]$

可知 $\ln a_n$ 是 $f(x)=\ln[a+(b-a)x]$ 在 $[0,1]$ 上的积分和．所以

$$\lim_{n\to\infty}\ln a_n=\int_0^1\ln[a+(b-a)x]dx=\frac{1}{b-a}[b\ln b-a\ln a-(b-a)]$$

$$=\ln\left(\frac{b^b}{a^a}\right)^{\frac{1}{b-a}}-1$$

从而知 $$I=\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}e^{\ln a_n}=\exp\left[\ln\left(\frac{b^b}{a^a}\right)^{\frac{1}{b-a}}-1\right]=\frac{1}{e}\left(\frac{b^b}{a^a}\right)^{\frac{1}{b-a}}.$$

解法二 $$I=\lim_{n\to\infty}\exp\left[\frac{1}{n}\ln(x_1x_2\cdots x_n)\right]=\exp\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n}\ln[a+\frac{i}{n}(b-a)]\frac{b-a}{n}$$

$$=\exp\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b\ln x dx\right]=\exp\left\{\frac{1}{b-a}[b\ln b-a\ln a-(b-a)]\right\}=\exp\left[\ln\left(\frac{b^b}{a^a}\right)^{\frac{1}{b-a}}-1\right]$$

$$=\frac{1}{e}\left(\frac{b^b}{a^a}\right)^{\frac{1}{b-a}}.$$

解法三 $$I=\lim_{n\to\infty}\exp\left[\frac{1}{n}\ln(x_1x_2\cdots x_n)\right]=\exp\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln[a+(b-a)\frac{i}{n}]$$

$$=\exp\left\{\int_0^1\ln[a+(b-a)x]dx\right\}=\exp\left\{\frac{1}{b-a}[b\ln b-a\ln a-(b-a)]\right\}=\frac{1}{e}\left(\frac{b^b}{a^a}\right)^{\frac{1}{b-a}}.$$

【例 9】 求 $I=\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot[(1+\frac{1}{n})^{\frac{q}{p}}-1]\quad(p,q$ 为正整数）．

【分析】 本题是数列极限“$\infty\cdot0$”型的未定式．一般方法是转化为连续变量再化为基本型未定式“$\frac{0}{0}$”或“$\frac{\infty}{\infty}$”解决．现在我们提供以下几种方法．

解法一 用泰勒公式

因为 $$(1+\frac{1}{n})^{\frac{q}{p}}=1+\frac{q}{p}\cdot\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n})$$

所以 $$I=\lim_{n\to\infty}n[1+\frac{q}{p}\cdot\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n})-1]=\lim_{n\to\infty}[\frac{q}{p}+n\cdot o(\frac{1}{n})]=\frac{q}{p}.$$

解法二 用换元法

令 $x=(1+\frac{1}{n})^{\frac{1}{p}}-1$，则 $n=\frac{1}{(1+x)^p-1}$，易见当 $n\to\infty$ 时，有 $x\to0$

所以 $$I=\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^q-1}{(1+x)^p-1}=\lim_{x\to0}\frac{\binom{q}{1}x+\binom{q}{2}x^2+\cdots+\binom{q}{q}x^q}{\binom{p}{1}x+\binom{p}{2}x^2+\cdots+\binom{p}{p}x^p}$$

$$\xlongequal{(\frac{0}{0})}\lim_{x\to 0}\frac{\binom{q}{1}+\binom{q}{2}x+\cdots+\binom{q}{q}x^{q-1}}{\binom{p}{1}+\binom{p}{2}x+\cdots+\binom{p}{p}x^{p-1}}=\frac{q}{p}.$$

解法三 用导数定义

$$I=\lim_{n\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})^{\frac{q}{p}}-1}{\frac{1}{n}}=(x^{\frac{q}{p}})'\Big|_{x=1}=\frac{q}{p}\cdot x^{\frac{q}{p}-1}\Big|_{x=1}=\frac{q}{p}.$$

【例 10】 求 $I=\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{n})$.

解法一 $I=\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{n})=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1+\tan\frac{2}{n}}{1-\tan\frac{2}{n}}\right]^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\frac{2\tan\frac{2}{n}}{1-\tan\frac{2}{n}}\right]^n$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{2\tan\frac{2}{n}}{1-\tan\frac{2}{n}}\right]^{\frac{1-\tan\frac{2}{n}}{2\tan\frac{2}{n}}\cdot\frac{4\tan\frac{2}{n}}{\frac{2}{n}}\cdot\frac{1}{1-\tan\frac{2}{n}}}=e^4.$$

解法二 $I=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1+\tan\frac{2}{n}}{1-\tan\frac{2}{n}}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(1+\tan\frac{2}{n})^{2\cot\frac{2}{n}\cdot\frac{\tan\frac{2}{n}}{\frac{2}{n}}}}{(1-\tan\frac{2}{n})^{-2\cot\frac{2}{n}\cdot\frac{-\tan\frac{2}{n}}{\frac{2}{n}}}}=\frac{e^2}{e^{-2}}=e^4.$

解法三 $I=\lim\limits_{n\to\infty}[1+\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{n})-1]^{\frac{n[\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{n})-1]}{\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{n})-1}}$

其中 $\lim\limits_{n\to\infty}n[\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{n})-1]\xlongequal{令\frac{1}{n}=t}\lim\limits_{t\to 0}\frac{\tan(\frac{\pi}{4}+2t)-1}{t}=\lim\limits_{t\to 0}2\sec^2(\frac{\pi}{4}+2t)=4$

所以 $I=e^4$.

解法四 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\tan^n(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{n})=\lim\limits_{n\to\infty}n\ln\frac{1+\tan\frac{2}{n}}{1-\tan\frac{2}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}n\ln\left[1+\frac{2\tan\frac{2}{n}}{1-\tan\frac{2}{n}}\right]$

$$=\lim_{n\to\infty}n\cdot\frac{2\tan\frac{2}{n}}{1-\tan\frac{2}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{1-\tan\frac{2}{n}}\cdot\frac{\tan\frac{2}{n}}{\frac{2}{n}}=4$$

所以 $I=e^4$.

解法五 $I=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1+\tan\frac{2}{n}}{1-\tan\frac{2}{n}}\right]^n=\exp\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2\tan\frac{2}{n}\cdot n}{1-\tan\frac{2}{n}}=\exp\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2\cdot\frac{2}{n}\cdot n}{1-\tan\frac{2}{n}}=e^4.$

【例 11】 求 $I=\lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}dx\quad(p>0)$.

【分析】 这是一个通项由积分表示的数列极限．积分$\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}dx$ 中的被积函数的原函数不能用初等函数表示,下面用多种方法来求解．

解法一 由积分中值定理,有 $\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\sin\xi_n}{\xi_n}p\quad(n<\xi_n<n+p)$

当 $n\to\infty$ 时,有 $\xi_n\longrightarrow+\infty$,故 $I=\lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}dx=\lim\limits_{\xi_n\to\infty}\frac{\sin\xi_n}{\xi_n}p=0$.

解法二 由第一积分中值定理,知

$$\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}dx = \sin\xi_n\int_n^{n+p}\frac{dx}{x} \quad (n < \xi_n < n+p)$$

$$= \sin\xi_n\ln\frac{n+p}{n}$$

又当 $n\to\infty$ 时,$\xi_n\to+\infty$,$\ln\frac{n+p}{n}\to 0$,而 $|\sin\xi_n|\leqslant 1$

所以 $I = \lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}dx = \lim\limits_{n\to\infty}\sin\xi_n\ln\frac{n+p}{n} = 0$.

解法三 用第二积分中值定理

因为$\frac{1}{x}$在任意区间$[n,n+p]$上单调减少,而 $\sin x$ 在$[n,n+p]$上连续. 故由第二积分中值定理,知

$$\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}dx = \frac{1}{n}\int_n^{\xi_n}\sin x dx = \frac{\cos n - \cos\xi_n}{n} \quad (n < \xi_n < n+p)$$

又 $\left|\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}dx\right| = \left|\frac{\cos n - \cos\xi_n}{n}\right| \leqslant \frac{2}{n}$

所以对任意 n,有 $I = \lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}dx = 0$.

解法四 用夹逼准则(一)

将积分进行估值,得出数列通项满足的不等式,而后用夹逼准则判定数列极限.

因为 $|U_n| = \left|\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}dx\right| \leqslant \int_n^{n+p}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx \leqslant \int_n^{n+p}\frac{1}{|x|}dx = \int_n^{n+p}\frac{dx}{x} = \ln(1+\frac{p}{n})$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln(1+\frac{p}{n}) = 0$,故 $\lim\limits_{n\to\infty}|U_n| = 0$

从而 $I = 0$.

解法五 用夹逼准则(二)

因为 $-\frac{1}{x} < \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{x}$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{n+p}(-\frac{1}{x})dx = 0$,$\lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{n+p}\frac{1}{x}dx = 0$

所以 $I = 0$

解法六 用柯西准则

因为广义积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$ 收敛,由收敛的柯西准则,即得

$$I = \lim_{n\to\infty}\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}dx = 0.$$

【例 12】 设$f(x)$有连续导数,$f(0)=0$,$f'(0)\neq 0$,$F(x) = \int_0^x(x^2-t^2)f(t)dt$,且当 $x\to 0$ 时,$F'(x)$ 与 x^k 是同阶无穷小,求 $k=$?

解法一 $F(x) = x^2\int_0^x f(t)dt - \int_0^x t^2 f(t)dt$

$$F'(x) = 2x\int_0^x f(t)dt + x^2f(x) - x^2f(x) = 2x\int_0^x f(t)dt$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{F'(x)}{x^k} = \lim_{x\to 0}\frac{2x\int_0^x f(t)dt}{x^k} = \lim_{x\to 0}\frac{2\int_0^x f(t)dt}{x^{k-1}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2f(x)}{(k-1)x^{k-2}} = \lim_{x\to 0}\frac{2f'(x)}{(k-1)(k-2)x^{k-3}}$$

由于 $\lim\limits_{x\to 0}f'(x) = f'(0)\neq 0$,而上式右端极限存在且为非零常数,所以 $k=3$.

解法二 由原题知,当 $x\to 0$ 时,$F'(x)$ 与 x^k 为同阶无穷小,换句话说,当 $x\to 0$ 时,$F'(x)$ 是 x 的 k 阶无

穷小，本题要决定 k，即要决定当 $x\to 0$ 时，$F'(x)$ 是 x 的几阶无穷小，如果能决定 $F(x)$ 是 x 的几阶无穷小，降一阶就应是 $F'(x)$ 的阶数．下面来决定 $F(x)$ 是 x 的几阶无穷小．

$$f(t)=f(0)+f'(0)t+o(t)=f'(0)t+o(t)$$

由于上式中第二项 $o(t)$ 是高阶无穷小，略去它不影响 $F(x)$ 的阶数，则 $x\to 0$ 时，$\int_0^x (x^2-t^2)f'(0)t\mathrm{d}t$ 与 $F(x)$ 的阶数相同，而

$$\int_0^x (x^2-t^2)f'(0)t\mathrm{d}t=\left(\frac{x^4}{2}-\frac{x^4}{4}\right)f'(0)=\frac{f'(0)}{4}x^4$$

显然它是 x 的四阶无穷小，则 $x\to 0$ 时 $F(x)$ 是 x 的四阶无穷小，$F'(x)$ 应是 x 的三阶无穷小，故 $k=3$．

解法三　与解法二前面的分析一样，本题只要能确定 $F(x)$ 是 x 的几阶无穷小，问题就得到解决．在 $F(x)=\int_0^x (x^2-t^2)f(t)\mathrm{d}t$ 的表达式中有一个一般函数 $f(t)$，这样一个一般的 $f(t)$ 它都能决定 $F(x)$ 的阶数，那么取一个具体的 $f(t)$，比如取 $f(t)=t$，当然同样也可以决定结果．将 $f(t)=t$ 代入 $\int_0^x (x^2-t^2)f(t)\mathrm{d}t$，得

$$\int_0^x (x^2-t^2)t\mathrm{d}t=\frac{x^4}{2}-\frac{x^4}{4}=\frac{x^4}{4}$$

显然，它是 x 的四阶无穷小，从而 $F'(x)$ 是 x 的三阶无穷小，所以 $k=3$．

【注】　本题主要考查变上限积分求导、罗必塔法则及无穷小阶的比较．

【例 13】　求　$I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}$．

解法一　用有理化分子的初等方法

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{2(\sqrt{1-x^2}-1)}{x^2[\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2]}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2x^2}{x^2(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2)(\sqrt{1-x^2}+1)}=-\frac{1}{4}.$$

解法二　两次用罗必塔法则

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}}}{2x}$$
$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\left[-\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{3}{2}}\right]=-\frac{1}{4}.$$

解法三　用一次罗必塔法则后分子有理化

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}}{2x}=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x\sqrt{1-x^2}}$$
$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x}=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{1-x-(1+x)}{x(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})}=-\frac{1}{4}.$$

解法四　用泰勒公式加无穷小分析

在要求极限的式子中，分母是 x 的二阶无穷小，故只要将 $\sqrt{1+x}$ 与 $\sqrt{1-x}$ 展成 x 的泰勒多项式至 x^2 项：

$$(1+x)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2!}\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)x^2+o(x^2)$$
$$(1-x)^{\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2!}\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)(-x)^2+o(x^2)$$

因此　$\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2=-\dfrac{1}{4}x^2+o(x^2)$

所以　$I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{1}{4}x^2+o(x^2)}{x^2}=-\dfrac{1}{4}$．

【例 14】　求　$I=\lim\limits_{x\to +\infty}x(\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}+x)$．

【分析】 当 $x\to+\infty$ 时,往往作倒数变换 $t=\frac{1}{x}$,显然 $t\to0^+$,于是

$$I=\lim_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}+x)=\lim_{t\to0^+}\frac{\sqrt{1+2t}-2\sqrt{1+t}+1}{t^2}$$

因此,要计算所给的极限,只需计算 $I=\lim\limits_{t\to0^+}\frac{\sqrt{1+2t}-2\sqrt{1+t}+1}{t^2}$.

解法一 用公式 $\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x)^u-1}{x}=u$ 计算

$$I=\lim_{t\to0^+}\frac{(\sqrt{1+2t}-\sqrt{1+t})+(1-\sqrt{1+t})}{t^2}$$

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{\frac{(1+2t)-(1+t)}{\sqrt{1+2t}+\sqrt{1+t}}+\frac{1-(1+t)}{1+\sqrt{1+t}}}{t^2}$$

$$=-\lim_{t\to0^+}\frac{1}{(\sqrt{1+2t}+\sqrt{1+t})(1+\sqrt{1+t})}\cdot\lim_{t\to0^+}\frac{\sqrt{1+2t}-1}{t}$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{t\to0^+}\frac{\sqrt{1+2t}-1}{2t}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}.$$

解法二 用罗必塔法则计算

$$I=\lim_{t\to0^+}\frac{\frac{1}{\sqrt{1+2t}}-\frac{1}{\sqrt{1+t}}}{2t}=\lim_{t\to0^+}\frac{1}{2\sqrt{1+2t}\sqrt{1+t}}\lim_{t\to0^+}\frac{\sqrt{1+t}-\sqrt{1+2t}}{t}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{t\to0^+}\frac{\sqrt{1+t}-\sqrt{1+2t}}{t}=\frac{1}{2}\lim_{t\to0^+}(\frac{1}{2\sqrt{1+t}}-\frac{1}{\sqrt{1+2t}})=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)$$

$$=-\frac{1}{4}.$$

解法三 用泰勒公式展开计算

因为 $t\to0^+$ 时,

$$\sqrt{1+2t}=1+\frac{1}{2}(2t)+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}(2t)^2+o(t^2)=1+t-\frac{1}{2}t^2+o(t^2)$$

$$\sqrt{1+t}=1+\frac{1}{2}t+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}t^2+o(t^2)=1+\frac{1}{2}t-\frac{1}{8}t^2+o(t^2)$$

所以 $$\sqrt{1+2t}-2\sqrt{1+t}+1=[1+t-\frac{1}{2}t^2+o(t^2)]-2[1+\frac{1}{2}t-\frac{1}{8}t^2+o(t^2)]+1$$

$$=(-\frac{1}{2}+\frac{1}{4})t^2+o(t^2)\sim-\frac{1}{4}t^2(t\to0^+\text{ 时}),$$

由此得 $$I=\lim_{t\to0^+}\frac{-\frac{1}{4}t^2}{t^2}=-\frac{1}{4}.$$

【例 15】 求 $I=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}{x}$.

解法一 $$I=\lim_{x\to0}\frac{1+x\sin x-\cos^2x}{x(\sqrt{1+x\sin x}+\cos x)}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{x\sin x+\sin^2x}{x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}(\sin x+\frac{\sin^2x}{x})=0.$$

解法二 $$I=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin x+x\cos x}{2\sqrt{1+x\sin x}}+\sin x}{1}=\lim_{x\to0}(\frac{\sin x+x\cos x}{2\sqrt{1+x\sin x}}+\sin x)=0.$$

解法三 $$I=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{1+x\sin x}-1)+(1-\cos x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{x}+\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{2} x \sin x}{x} + \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{2} x^2}{x} = 0 .$$

【例 16】 求 $I = \lim\limits_{x \to e} \dfrac{\ln x - 1}{x - e}$.

解法一 用罗必塔法则 $I = \lim\limits_{x \to e} \dfrac{\ln x - 1}{x - e} \xlongequal{\left(\frac{0}{0}\right)} \lim\limits_{x \to e} \dfrac{\frac{1}{x} - 0}{1 - 0} = \dfrac{1}{e}$.

解法二 用 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 + x)}{x} = 1$

$$I = \lim_{x \to e} \frac{\ln \frac{x}{e}}{x - e} = \lim_{x - e \to 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{x - e}{e}\right)}{\frac{x - e}{e} \cdot e} = \frac{1}{e} .$$

解法三 用 $\lim\limits_{u \to 0} (1 + u)^{\frac{1}{u}} = e$

$$I = \lim_{x \to e} \frac{\ln \frac{x}{e}}{x - e} = \lim_{x \to e} \ln\left(\frac{x}{e}\right)^{\frac{1}{x - e}} = \lim_{x \to e} \ln\left(1 + \frac{x - e}{e}\right)^{\frac{e}{x - e} \cdot \frac{1}{e}} = \ln e^{\frac{1}{e}} = \frac{1}{e} .$$

解法四 用 $\lim\limits_{u \to 0} \dfrac{e^u - 1}{u} = 1$

$$I = \lim_{u \to 0} \frac{u}{e^{1 + u} - e} \quad （作变换 \ln x - 1 = u）$$

$$= \lim_{u \to 0} \frac{1}{e} \cdot \frac{u}{e^u - 1} = \frac{1}{e} .$$

解法五 用导数定义

注意到 $1 = \ln e$，依导数定义有 $I = \lim\limits_{x \to e} \dfrac{\ln x - \ln e}{x - e} = (\ln x)' \Big|_{x = e} = \dfrac{1}{e}$.

解法六 用拉格朗日中值定理

$$\ln x - \ln e = \frac{1}{\xi}(x - e) ,（\xi 介于 x 与 e 之间）$$

所以 $I = \lim\limits_{x \to e} \dfrac{\ln x - \ln e}{x - e} = \lim\limits_{x \to e} \dfrac{\frac{1}{\xi}(x - e)}{x - e} = \lim\limits_{x \to e} \dfrac{1}{\xi} = \dfrac{1}{e}$.

解法七 用增量公式

$$\ln x - \ln e = \frac{1}{e}(x - e) + o(\overline{x - e})$$

所以 $I = \lim\limits_{x \to e} \dfrac{\frac{1}{e}(x - e) + 0(\overline{x - e})}{x - e} = \dfrac{1}{e} + 0 = \dfrac{1}{e}$.

【注】 在这里拉格朗日中值定理、增量公式都起到析出因子 $x - e$ 的作用，值得注意．

【例 17】 求 $I = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x^2}{x^2 \sin x^2}$.

解法一 $I = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x^2}{x^2 \sin x^2} \xlongequal{\left(\frac{0}{0}\right)} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x \sin x^2}{2x \sin x^2 + 2x \cdot x^2 \cos x^2}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x^2}{\sin x^2 + x^2 \cos x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\sin x^2}{x^2}}{\cos x^2 + \frac{\sin x^2}{x^2}} = \frac{1}{2} .$$

解法二 $I = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2 \sin^2 \frac{x^2}{2}}{2x^2 \sin \frac{x^2}{2} \cos \frac{x^2}{2}} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin \frac{x^2}{2}}{x^2 \cos \frac{x^2}{2}}$