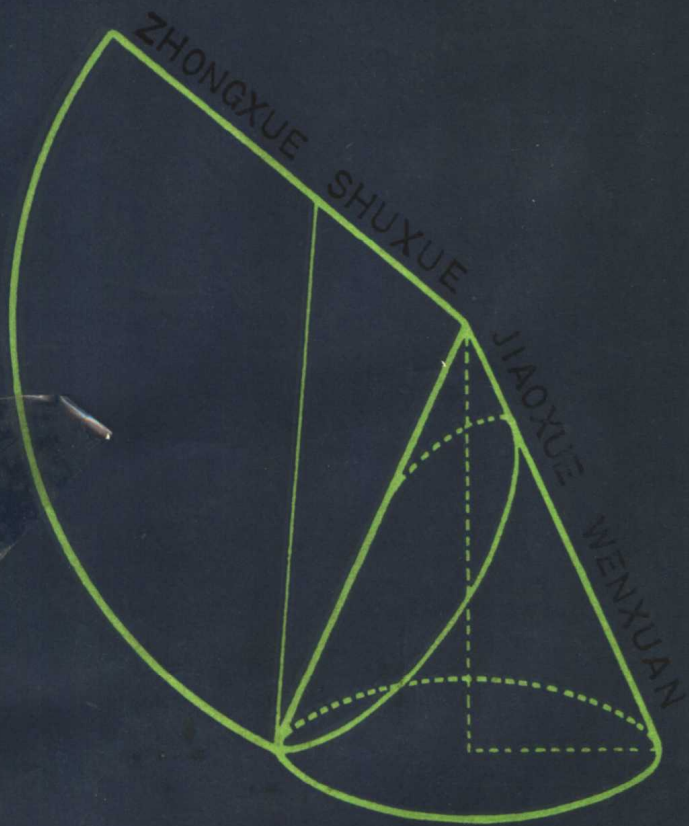


(立体几何)



中学数学

教学文选

中学数学教学文选

(立体几何)

吴启贵 陈 尧 刘瘦侠 选编

上海教育出版社

中学数学教学文选

(立体几何)

吴启贵 陈 尧 刘瘦侠 选编

上海教育出版社出版发行

(上海永福路 123 号)

各地新华书店经销 祝桥新华印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 13.75 字数 301,000

1989 年 3 月第 1 版 1989 年 3 月第 1 次印刷

印数 1-1,400 本

ISBN 7-5320-0206-3/G·178 定价: 3.80 元

前 言

近年来,中学数学的教学和研究,取得了很大的成果。有关这方面的论文,散见于各种中等数学及各省市的教育期刊上,不下数万篇。中学数学教师和数学教研人员,普遍感到,要在浩繁的卷帙中,找到自己急需的参考文章,决非易事。为了满足这些同志的需要,我们遴选了具有代表性的文章,按照中学数学的内容分科编集。本书是立体几何专集。

所谓代表性,有两层意思:一是文章的内容比较全面、深入、具体;二是介绍的经验别人能学到手,在日常教学中用得上。所选文章,在本书中的编排顺序是:入门教学和各章教学;能力培养;有关史料。这一切,都是为了提高本书的实用价值。

在选编过程中,基本上保持了各篇文章的原貌,仅纠正了一些明显的差错,和作了若干文字的润色。极少数的,因为篇幅较大,某些内容离教学实际较远,删去又不太影响全文的主题,我们便忍痛割爱了。相信作者和读者,都是能谅解的。有的文章,摘引教材中的例题与习题时,只引页码与题号,由于教材变化,读者难以对照,因此,我们都换上该题的全文。

因为是文选,反映的自然各家之说,读者应该结合自己的实际情况,择善而从。可以参考借鉴,不要生搬硬套。

编者水平有限,加上成书时间仓促,会有一些疏漏、差错,祈盼专家、读者,不吝指正。

编 者

一九八七年一月

目 录

立体几何入门教学初探	1
谈谈“平面”的教学	12
浅谈“直线和平面”一章的教学	21
直线、平面位置关系证明题的教学	35
从“三垂线定理”的教学谈能力的培养	41
三垂线定理及其应用	47
用正方体来复习直线与平面知识	53
“多面体和旋转体”教材教法漫谈	60
谈谈“多面体和旋转体”的教学体会	72
关于三棱锥顶点在底面上射影的位置	82
谈台体体积公式的教学	87
球面距离的教学探讨	93
球面上两点间的距离及其计算公式	99
对球体体积公式证明的探讨	105
浅谈立体几何教学中的习题课	109
讨论式在立体几何教学中的启发作用	115
立体几何总复习的几点做法	122
“直线和平面”一章复习中的几个问题	134
立体几何复习	149
用四面体组织立体几何的复习	165
通过正方体编选一组立体几何复习题	174
浅谈立体几何教学中怎样培养学生的能力	185

培养画空间图形能力的教学体会	196
立体几何中思维能力的培养	205
立体几何解题技巧	218
解立体几何题要合理画图	230
浅谈添设辅助面	236
用衬托法解一类立体几何问题	243
立体几何中的转换与类比	247
异面直线所成的角和距离	256
求异面直线距离的一种方法——射影法	266
解异面直线的两种方法	271
利用三棱锥的体积求距离	280
二面角大小的求法	285
一个立体几何问题的推广及其应用	289
棱柱与棱锥的截面作图	298
多面体的截面	304
圆锥的轴截面是过顶点的最大截面吗?	319
台体中平行于底面的截面面积计算	322
谈谈立体几何中极值问题的解法	323
关于多面体的截面极值问题	332
几何图形的折合与展开	344
立体几何中的折迭问题	353
折面、截面、展开面	
——学生空间想象能力的培养	361
多面体体积计算的割与补	386
立体几何习题的简化解法	392
分析几个易于混淆的立几概念和图形	401
立体几何练习中的常见错误	407
刘徽对体积理论的研究	416
关于多面角和多面体概念的几个问题	424

立体几何入门教学初探

刘瘦侠 薄幼培

近几年,我们在教学中发现,学生解立几题的能力较差,无论是空间想象能力,还是逻辑推理能力,都存在着一定的缺陷.学生在学习“直线和平面”这一章时特别感到困难,因此立体几何入门教学就成为当前迫切需要研究解决的课题之一.

入门教学难,其主要原因是:

心理上:从二维空间进入三维空间,由于知识的更新,需要用新的观点和方法来研究它,但是学生原有的平凡知识结构观念往往先入为主,产生定势影响,构成学习上的心理障碍.

教材上:立几起始章概念较密集,定义、公理、定理较多,学生不易理出头绪.学生初中所具有的知识和能力与学习立几应具备的知识和能力存在一定的差距.

教法上:由于难点过于集中,没有采取减小坡度的措施,学生不易接受消化.教法上又未充分利用学生的心理因素加以改进,使教学与心理活动始终保持协调.

本文就立体几何入门教学方面谈些粗浅的体会,供同行们参考、指正.

一、关于培养学生学习立几的兴趣

兴趣是学习动机的重要心理成分,是入门的先导.培养

兴趣是激发学习动机的重要手段之一。兴趣——乐趣——志趣，这是心理活动的必然。

1. 上好引言课

(1) 把学生的思维从平面引向空间，阐明空间图形与平面图形的区别与联系。

(2) 引进空间四边形、正方体、正四面体等模型，并观察直线与平面的平行、垂直等关系，阐明立几研究的对象、内容。

(3) 安排立体图片欣赏与写生，制作一些日常生活中见过的立体模型。

(4) 用实例说明学习立几应注意什么？

总之，引言课要设计得生动、有趣。

2. 充分挖掘教材的实践性和趣味性

例如，可以组织学生汇集一些实例来验证平面的三个基本性质，让学生看到在生产或生活中，找不到一个实例能否定这三个基本性质，从而加深对平面基本性质的理解。又如，在黑板上寥寥数笔，勾画出菜刀、斧头等图形，引进二面角概念，学生跃跃欲试，兴趣油然而生。

3. 加强教学的直观性

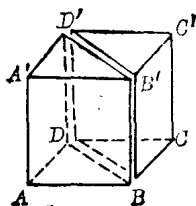
例如，正方体和四面体这两个模型在几何结构上具有典型性，通过肢解、组合，可以深化概念、观察联想、选编题组、训练画图，逐步发展学生的空间想象能力。

4. 注意教学的启发性

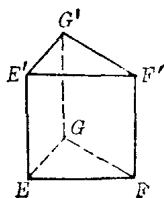
教师引导学生揭示和解决学习动机、兴趣与理解教材上的矛盾，调动学生主动积极地思维。学生力所能及的事，要引导学生自己去做。

例如，空间等角定理是学习立几接触到的第一个定理，论

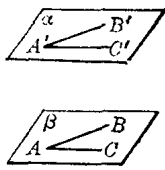
证它确是一个难点。采取下列步骤，启发学生寻求论证思路。



(1)



(2)



(3)

(1) 观察：借助正方体的一个对角面，将正方体分成两部分，观察其中一部分。很明显， $\triangle ABD \cong \triangle A'B'D'$ ，且四边形 $ABB'A'$ 、 $DAA'D'$ 、 $BDD'B'$ 都是正方形或矩形。如上图(1)。

(2) 分析：如上图(2)的三棱柱模型中， $\angle GEF$ 与 $\angle G'E'F'$ 是否相等，这取决于 $\triangle EFG$ 与 $\triangle E'F'G'$ 是否全等，要证 $\triangle EFG \cong \triangle E'F'G'$ ，关键又取决于四边形 $EFF'E'$ 、 $FGG'F'$ 、 $GEE'G'$ 是否是平行四边形。

(3) 联想：如上图(3)中，空间两个角 $\angle BAC$ 和 $\angle B'A'C'$ 的两边分别平行，且方向相同，这两个角大小怎样？学生由平几类比可得命题，而证明过程由上图(2)得到启发，关键是作出几个辅助平面，转化为平几问题解决。这样，学生不难叙述证明过程，然后阅读课本进行对照，这一难点便比较容易突破，学生也会获得较深的印象，产生较浓的兴趣。

5. 依据学生心理特点，合理安排教材

教学要求应适当，困难处要分段要求，铺设阶梯，防止学生因畏难情绪而丧失学习兴趣。

例如，学生对反证法证题感到困难，宜把反证法教学分成三个阶段进行，逐步深入。

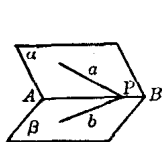
第一阶段：运用反证法证明两条直线是异面直线。要求学生了解什么是反证法，会用反证法证明两条直线是异面直线的问题。

第二阶段：用反证法证明线面平行判定定理。这一阶段使学生掌握反证法的证题思路和证题方法，即反设——推理——矛盾——得证；归纳总结导出结论与什么矛盾（与题设条件矛盾；与某公理、定义、定理矛盾；论证自身矛盾等）。

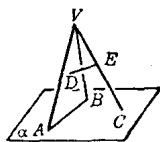
第三阶段：用反证法证明面面平行判定定理。这一阶段要求学生熟练掌握反证法，归纳总结哪些命题宜用反证法（如求证结论所涉及的对象是无限个，而其反面却是有限个；唯一性问题；否定形式的命题；必然性的命题等）。

又如公理 2 的应用，课本较少接触，因此学生对公理 2 的应用比较生疏，为此教学中要安排一些说理与推理相结合的例题与练习：

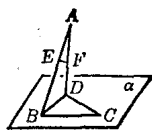
1. 如图(1)，若 $\alpha \cap \beta = AB$, $a \subset \alpha$, $b \subset \beta$, 且 $a \cap b = P$, 则 $P \in AB$.
2. 如图(2)，怎样确定两相交直线 VC 与 DE 所确定的平面与过 A, B, C 的平面 α 的交线位置（其中 $D \in$ 平面 VAB , $E \in VC$ ）？



(1)



(2)



(3)

3. 如图(3)，已知空间四边形 $ABCD$, $E \in AB$, $F \in AD$, 且 EF 不平行于 BD , 为什么过 EF 的任意平面必和平面 BCD 相交？

6. 注意练习的多样性和解题方法的多样化

要尽量使练习具有新型性，交替使用各种题型，避免简单的重复练习（如使用判断题、选择题、画图题、说理题、填空题、

计算题、证明题等题型)。同时,讲授范例要经常采用一图多用,一图多变,一题多解的方法,以开拓学生的思路。

此外,入门阶段的教学中,还要让学生在及时的知识反馈中得到成功的体验,从而增强学习信心和乐趣,产生“自我激励”,成为进一步学习的“有效诱因”,形成乐学——学懂——更乐学的良性循环。

二、关于培养和发展学生的 空间想象能力

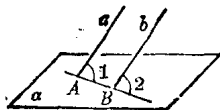
学生空间想象能力的培养是立几入门教学中至为重要的一环。因为想象力关系到空间观念的正确建立,直接影响到对空间图形的识别与绘画,而且也是学生逻辑思维的基础。空间想象能力的强弱往往是学生学习立几产生差异的重要原因之一。

培养空间想象力,要充分发挥实物、模型的直观作用,重视看图、画图能力的训练,不断总结画空间图形的一些规律与技巧。教学中要防止概念模糊——图形错误——推理混乱这种链锁反应的出现。下面着重谈谈运用迁移规律及变式图形,培养和发展学生空间想象能力的尝试。

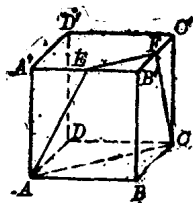
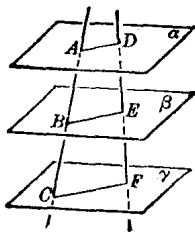
1. 运用迁移规律

立几是由平几发展而来的,学好平几是学好立几的基础,平面图形的概念和画法,对学习空间图形起着积极的正迁移作用。但是从平面到空间,由于研究对象的改变,研究方法和思维习惯也要有相应的变动。可是,因为学生思维定势的影响,使新旧知识互相干扰,产生负迁移作用。这种负迁移作用主要表现在下列几个方面:

(1) 概念方面. 例如: “求证两条平行线和同一个平面所成的角相等.” 有的学生在证明中连结斜足, 得 $\angle 1 = \angle 2$, 从而错误地得出结论 (如右图).



(2) 性质方面. 例如: “直线 AO 、 DF 被三个平行平面 α 、 β 、 γ 所截, 求证 $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$.” 学生在证明中, 连结 AD 、 BE 、 CF , 直接用平凡定理 “三条平行线截两条直线所得的四条线段对应成比例” 得证 (下左图).



(3) 图形直觉方面. 观察空间图形时, 受平面图形直觉性的束缚. 如上右图正方体中, E 、 F 分别是 $A'B'$ 、 $B'C'$ 的中点, 求截面 $ACFE$ 的面积. 有些学生计算时把棱长误作梯形 $ACFE$ 的高.

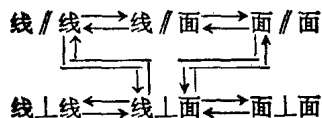
立几入门教学中, 如何改进教法, 防止负迁移的消极影响, 促使正迁移不断出现, 从而培养和发展空间想象能力, 顺理成章地引导学生完成从平面到空间的过渡, 下列措施是行之有效的:

(1) 加强对比教学. 立几教学中, 经常联系相应的平几知识, 用 “运动” 的观点化平面图形为立体图形, 将两种图形的性质进行对比. 以旧导新, 由浅入深, 可以帮助学生区别异同, 建立清晰的空间观念.

(2) 培养转化技能。培养转化技能,探索转化规律,掌握转化方法,帮助学生理解立几知识的内在联系,认识各种解题方法的本质,对培养空间想象能力会有所裨益。

“直线和平面”一章主要研究空间点、线、面的位置关系和两类数量:“角”和“距离”,其转化规律:

(1) 平行、垂直关系的互相转化:



(11) 空间问题向平面问题转化:

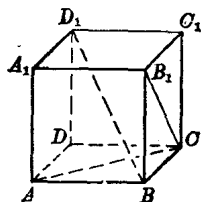
通过分解与集中的途径,采用平移法、射影法、辅助平面法等实现转化。

(3) 提高判断能力。学生学习立几中的某些知识易与平几中的有关知识发生混淆。针对这一情况,可选编判断题、改错题、选择题等基本练习,以丰富学生的空间想象,提高运用性质对空间图形作出正确判断的能力。

2. 采用变式图形

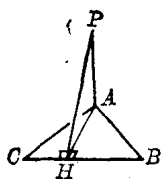
学生初学立体几何常会出现以下情形:

在下图的正方体中,求证 $D_1B \perp AC$, 学生很易解决,但要证明 $D_1B \perp B_1O$, 却有些迟疑。造成上述情况的原因,是学生对立几概念本质特征没有很好理解,只习惯于课本上的标准图形,缺少变式图形的训练,以致造成学生对空间图形的一种刻板观念。

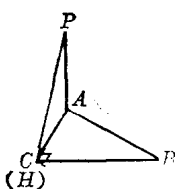


立几入门教学中,采用变式图形,提供给学生不断变换形状和位置的图形,保持图形的本质特征,变异其非本质性状,用以丰富学生的感知,从不同的角度与方

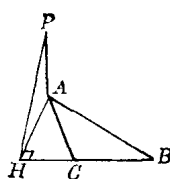
面加深对空间图形的理解,它是克服学习上形式主义和使思维不断深化的重要手段,可以改善教学效果。



(1)



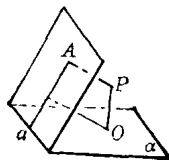
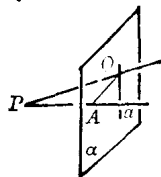
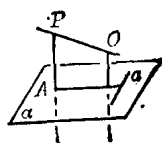
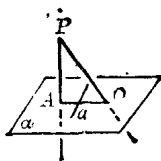
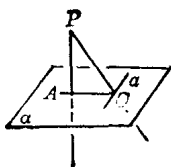
(2)



(3)

(1) 调节图形中的强弱成分,不断完善对图形的感知.例如:上图中, PA 垂直于 $\triangle ABC$ 所在的平面,求点 P 到 BC 的距离. 学生往往不考虑 $\triangle ABC$ 的形状,一律把 $PH \perp BC$ 的垂足 H ,画在上图 (1) 中的位置上. 通过变式图[上图 (2)、(3)],就能使学生消除这一偏见,使“垂足位置”这一弱成分得到强化.

(2) 揭示概念实质,有利于拓宽思路.例如“三垂线定理”在立几中有着广泛的应用,教学时运用下图的变式,使学生理解定理的实质,明确它是空间两条直线垂直的判定定理,为扩展应用,拓宽思路打好基础.



此外,还可设计变式题,揭示解题规律,寻求一题多解,这里就不赘述了。

三、关于培养逻辑推理能力

入门阶段,学生最感困难的是说理表达能力差,逻辑推理混乱。这里着重谈三点做法:

1. 抓好入门阶段表达、推理训练

(1) 掌握用集合符号表达点、线、面之间的从属关系,并学会公理表达符号化。

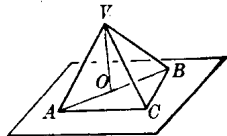
(2) 运用问答题、判断题进行说理训练。

(3) 通过例题归纳证题方法。例如,课本上的例题:“两两相交且不过同一个点的三条直线必在同一平面内”。这是“平面的基本性质”的例题。通过例题要使学生学会用文字、语言、集合符号表达命题的证明格式,要求先画图、标字母,再写已知、求证、证明,通过一题多解,归纳出:证直线在平面内,证点在平面内,证诸线共面等方法。

2. 识图、绘图教学要与推理相结合

空间图形的识别与绘画,不象平面图那样,元素位置关系和长短大小,如实反映在图上,而往往产生变形。因而在识图、绘图教学中,要同逻辑推理相结合,让学生明确概念是识图、画图的依据。

例如:按题意“ $\triangle ABC$ 是直角三角形, AB 是斜边, $VO \perp$ 平面 ABC , O 为垂足,且 $VA=VB=VC$ ”,画图关键是确定垂足 O 的位置。如右图,

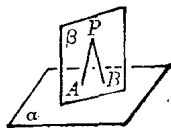
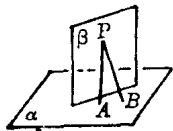


$\therefore VO \perp$ 平面 ABC , $VA=VB=VC$,

$\therefore AO=BO=CO$, $\therefore O$ 是 $\triangle ABC$ 的外心.

又因为 $\triangle ABC$ 是直角三角形, 所以点 O 在斜边 AB 的中点上.

又如课本上一习题“用反证法证明: 过一点和一个平面的垂直的直线只有一条.”学生证明时, 在“假设过点 P 和平面 α 垂直的直线有两条 PA 、 PB , A 、 B 为与 α 的交点”后, 过 PA 、 PB 作平面 β , 画出下图那样的错误图形, 原因在于概念不清, 不能用公理 2 来指导画图. 这类例子是屡见不鲜的. 教学中应予以评讲, 使得画图能力和推理能力同时得到提高.

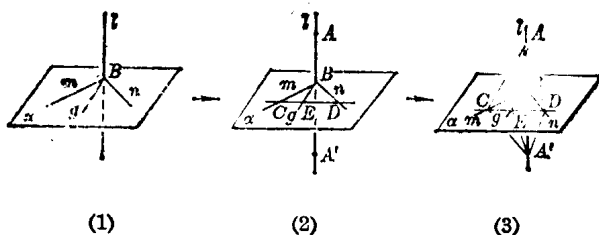


3. 定理教学要从分析入手

立几“直线和平面”一章安排了四个公理, 四个推论, 十九个定理(包括例题、练习用黑体字表出的), 教学中要从分析思路入手, 让学生不仅知道怎样证, 而且知道为什么这样证. 例如, 直线和平面垂直的判定定理, 其证明过程中的线面关系比较复杂, 涉及的旧知识多, 教学中首先应让学生观察教具, 画出图形, 边分析, 边添设辅助线、面, 完成图形的过程也是完成推理的过程. 步骤如下:

(1) 如下图(1), 要证 $l \perp \alpha$, 根据定义, 只要证 l 和 α 内的任一直线 g 垂直. 怎样证 $l \perp g$ 呢? (先证 l 、 m 、 n 过同一点的情况).

(2) 利用平几知识, 若取 $AB=A'B$, 由 $l \perp m$, $l \perp n$, 可知 m 、 n 是 AA' 的垂直平分线. 若能证得 g 也是 AA' 的垂直平



分线, 则问题即可解决.

(3) 要证 g 是 AA' 的垂直平分线, 必须证 g 上任一点到 A 、 A' 的距离相等, 故在 α 内作直线 OD , 与 m 、 n 、 g 分别交于 O 、 D 、 E , 如上图(2); 连结 AO 、 $A'O$ 、 AD 、 $A'D$ 、 AE 、 $A'E$, 如上图(3).

(4) 要证 $g \perp l$, 只须证 $AE = A'E$; 要证 $AE = A'E$, 只须证 $\triangle AOE \cong \triangle A'OE$; 要证 $\triangle AOE \cong \triangle A'OE$, 只须证 $\angle AOE = \angle A'OE$; 因此只要证 $\triangle AOD \cong \triangle A'OD$. 这是易证的.

搞好立体几何入门教学, 当好学生“入门”的引路人, 需从多方面入手. 以上仅是一些粗浅的想法. 深信, 随着教育科研的深入开展, 立体几何的教学质量会得到不断提高.

选自《中学数学教学研究动态》1986年第三期