一般空間的微分幾何學

蘇 步 青

科 学 出 版 社

內容提要

芬斯拉空間和嘉當空間是繼黎曼空間之後發展起來的．另一方面，道路空間也是黎曼空間的另外推廣，它和仿射聯絡空間有密切的關係．以上兩方面的發展更引起一般空間幾何學的研究，尤其是K展空間及面積空間．蘇步青教授和他所領導的學者都作出了許多卓越的工作．作者除參閱芬斯拉、嘉當、柏爾瓦、道格拉斯、瓦格涅、河口商次等人的工作外，還結合了他多年領導這一方面的經驗與成就．全書有四章，其中第一章敘述芬斯拉空間，第二章介紹正則的嘉當空間並用作者的極值離差論充實它的內容．第三章是本書的主要部分，在這裏作出K展幾何學的全面介紹．作者所解決的基林問題和平面公理有關的問題都有詳盡的敘述．最後一章論面積空間幾何學，它是芬斯拉空間和嘉當空間的推廣．在這裏包括瓦格涅、杜伯威、河口、且代和作者的最近幾年來的研究工作．

一般空間的微分幾何學

著者　蘇步青

出版者　科學出版社
北京朝陽門大街 117 號
北京市書刊出版業營業許可証出字第 061 號

印刷者　中國科學院印刷廠

總經售　新華書店

1958 年 8 月第一版　書號：1340　字數：213,000
1962 年 4 月第三次印刷　開本：787×1092 1/18
(京) 3,375—4,774　印張：9 5/9

定價：1.50 元

前　　言

一般空間的名稱最初見於 P. Finsler 的著作[1]，而現在稱它爲芬斯拉空間．T. Y. Thomas 在他的著書[2]裏，也曾經用過這個名稱，但它的涵義又不相同，就是所指的空間大部分是仿射聯絡、射影聯絡、共形聯絡等空間．本書中，將從芬斯拉空間開始，介紹它的微分幾何學而且主要的敍述 E. Cartan 的研究[3]，作爲後文的預備知識，這是第一章的內容．在第二章將討論芬斯拉空間的類似情況，即通稱爲嘉當空間的幾何學．這裏，基本上介紹 L. Berwald 的著作[4]和作者的極值離差論．第三章裏所述的 K 展空間的幾何學是本書的主要部分，內容包括 K 展空間的仿射變換、射影變換和關於平面公理的定理．最後第四章敍述具有面積測度的空間的幾何學，在這裏闡明了黎曼空間、芬斯拉空間和嘉當空間的特徵。

---

[1] P. Finsler, Über Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen. Diss., Göttingen (1918). 新版(1951)中附載直到 1949 年爲止的重要文獻.

[2] T. Y. Thomas, Differential Invariants of Generalized Spaces. Cambridge (1934).

[3] E. Cartan, Les espaces de Finsler. Actualités scientifiques et industrielles 79 (1934).

[4] L. Berwald, Über die n-dimensionalen Cartanschen Räume und eine Normalform der zweiten Variation eines $(n-1)$-fachen Oberflächenintegrals. Acta math. 71 (1939), 191—248.

目　　錄

第 一 章

芬 斯 拉 空 間

1. Berwald 的平行移動

假設 M 是參考於一系坐標 $x^i (i=1,\cdots,n)$ 的 n 維集合並且它的曲綫 $x^i = = x^i(t)$ 的弧長是按積分

$$s = \int_{t_0}^{t} F(x^1(t),\cdots,x^n(t);\dot{x}^1(t),\cdots,\dot{x}^n(t))dt = = \int_{t_0}^{t} F(x,\dot{x})\,dt = \int_{t_0}^{t} F(x,dx) \tag{1.1}$$

定義起來的．這時，稱 M 爲一般的度量空間．

特別當 $F(x,dx)=\sqrt{g_{ij}(x)\,dx^i dx^j}$ 時，我們得到黎曼空間．這裏及以後，凡一式中有相同的指標時，都表示關於它的總和 $(i,j=1,\cdots,n)$．實際上，B. Riemann 在他的 1864 年著名的演講[1]裏，早已提到弧長採取(1.1)的可能性，不過到 1918 年 P. Finsler 才做出詳盡的工作，所以現在稱這樣的空間爲芬斯拉空間．

關於函數 $F(x,\dot{x})$ 有如下的假定：對 M 的所有值 $x^i (i=1,\cdots,n)$ 和 $(0,\cdots,0)$ 除外的所有值 $\dot{x}^i (i=1,\cdots,n)$，它是正則的，並且關於 $\dot{x}^i$ 是正齊一次的，換句話說：設 $\rho>0$，$F(x,\rho\dot{x})=\rho F(x,\dot{x})$．在(1.1)中，$x^i=x^i(t)$ 表示 M 的一條解析曲綫，它的方向决定於 t 的增加方向而且 $\dot{x}^i=\dfrac{dx^i(t)}{dt}$．

以後常常採用弧長 s 作爲獨立變數而以一撇表示關於 s 的導數，例如 $x'^i = = \dfrac{dx^i(s)}{ds}$．從(1.1)得出 s 的恆等式

$$F(x,x')=1. \tag{1.2}$$

因爲 $F(x;x')$ 關於 x' 是正齊一次函數，所以成立下列恆等式：

$$x'^i F_{x'^i}=1, \tag{1.3}$$

$$x'^i F_{x'^i x'^j}=0 \qquad (j=1,\cdots,n). \tag{1.4}$$

從(1.4)解出

$$x'^1 : x'^2 : \cdots : x'^n = A^{j1} : A^{j2} : \cdots : A^{jn} \tag{1.5}$$

$$(j=1,2,\cdots,n),$$

式中 A^{ij} 表示行列式 $\det|F_{x'^i x'^j}|$ 中 $F_{x'^i x'^j}$ 的餘因式．因而，一定有一函數 $F_1(x;x')$，使得

[1] B. Riemann, Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen, *Habilitationsschrift*, Göttingen (1864); *Abh. Göttingen* 13 (1864); *Ges. Werke* (Berlin, 1929, 3. Aufl. 1923).

$$x'^i x'^j F_1 = A^{ij} \quad (i, j = 1, \cdots, n). \tag{1.6}$$

這函數 F_1 還具有如下的表示：

$$F_1(x, x') = -\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}(x'^i)^2 \sum_{j=1}^{n} x'^j z'^j} \begin{vmatrix} F_{x'^1 x'^1} & F_{x'^1 x'^2} & \cdots & F_{x'^1 x'^n} & x'^1 \\ F_{x'^2 x'^1} & F_{x'^2 x'^2} & \cdots & F_{x'^2 x'^n} & x'^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ F_{x'^n x'^1} & F_{x'^n x'^2} & \cdots & F_{x'^n x'^n} & x'^n \\ z^1 & z^2 & \cdots & z^n & 0 \end{vmatrix}, \tag{1.7}$$

其中 $z^1, \cdots, z^n$ 表示不全等於零的任何實數. 很顯然，F_1 關於 x' 是正齊 $-(n+1)$ 次的函數.

我們還假定 $F_1(x, x')$ 對 M 的所有值 $x^i (i = 1, \cdots, n)$ 和所有的 x'^i (但 $0, \cdots, 0$ 除外)不取零值. 這時，稱所論的變分問題 $\delta s = 0$ 在集合 M 是正則的.

變分問題 $\delta s = 0$ 的極值曲線必須滿足 n 個 Euler 的微分方程

$$\frac{d}{ds} F_{x'^i} - F_{x^i} = 0 \qquad (i = 1, \cdots, n),$$

即

$$x'^j F_{x'^i x^j} + x''^j F_{x'^i x'^j} - F_{x^i} = 0 \quad (i = 1, \cdots, n). \tag{1.8}$$

容易證明恆等式

$$(x'^j F_{x'^i x^j} + x''^j F_{x'^i x'^j} - F_{x^i})\, x'^i = 0.$$

按假設，一定有一個不等於 0 的 x'，比方說 x'^k. 從上列方程中取 $n-1$ 個：

$$x'^j F_{x'^i x^j} + x''^j F_{x'^i x'^j} - F_{x^i} = 0 \quad (i = 1, \cdots, k-1, k+1, \cdots, n),$$

並且關於 s 導微(1.2)，

$$x'^j F_{x^j} + x''^j F_{x'^j} = 0. \tag{1.9}$$

因為上列的 n 個方程關於 x'' 是聯立一次方程而且在適當的排列下，係數行列式 D 等於

$$D = A^{kj} F_{x'^j} = F_1 \cdot x'^k x'^j F_{x'^j} = x'^k F_1, \tag{1.10}$$

且從而不等於 0，所以解出 x''：

$$x''^i = -\varphi^i(x, x') \quad (i = 1, \cdots, n). \tag{1.11}$$

這樣得出來的函數 φ^i 關於 x' 是正齊二次的. 這事實可從 $s \to as\ (a > 0)$, $x'^i \to a x'^i$, $x''^i \to a^2 x''^i$ 得到證明. 因而，

$$\frac{\partial \varphi^i}{\partial x'^j} x'^j = \frac{\partial^2 \varphi^i}{\partial x'^j \partial x'^k} x'^j x'^k = 2\varphi^i, \tag{1.12}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi^i}{\partial x'^j \partial x'^k} x'^j = \frac{\partial \varphi^i}{\partial x'^k}. \tag{1.13}$$

這些函數 φ^i 是一般空間的平行移動概念中所不可少的函數. 以下假定所論的空間不是黎曼流的.

為了作出平行移動，我們必須在空間的各點預先引好一條微小向量 (dx)，使和這點對應. 稱這向量為點 (x) 的特選綫素或支持元素. 我們要假定特選綫素的支量

dx^i 都是 x 的微小的解析函數，除這而外，一切都可任意選定．對於其他綫素則用 δx^i，$\delta_1 x^i$ 等記號，以示區別．

當在點(x)定義起來的一條反變向量(ξ)從這點(x)移到鄰近點$(x+\delta x)$時，設點(x)的向量(ξ)被移到點$(x+\delta x)$而變爲另一條向量$(\xi+\delta\xi)$．如果$(\delta\xi)$的支量是

$$\delta\xi^i = -\Gamma_k{}^i{}_l(x, dx)\xi^k\delta x^l;\ \Gamma_k{}^i{}_l(x, dx) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi^i(x, dx)}{\partial dx^k\partial dx^l} \tag{1.14}$$

$$(i = 1, \cdots, n),$$

那末稱這對應爲向量(ξ)的 Berwald 的平行移動[1]．方程 (1.14) 中的 $\Gamma_k{}^i{}_l$ 關於 dx 是正齊零次函數而且關於下指數是對稱的．

任何共變向量(η)從點(x)到鄰近點$(x+\delta x)$的平行移動是按照下列條件決定的：同時平行移動這向量(η)和任何反變向量(ξ)的時候，不變量 $\xi^i\eta_i$ 仍然保留它的值．對於任何張量的平行移動也可依此類推．

把點(x)的任何向量(ξ)沿微小平行四邊形平行移動，且同時把(x)的特選綫素和它本身平行移動的結果，就得到一般空間的曲率張量．實際上，得出

$$\delta_1\delta\xi^i - \delta\delta_1\xi^i = -\frac{1}{2}K_k{}^i{}_{lm}(x, dx)\xi^k(\delta x^l\delta_1 x^m - \delta x^m\delta_1 x^l), \tag{1.15}$$

式中

$$K_k{}^i{}_{lm}(x, dx) = \left(\frac{\partial\Gamma_k{}^i{}_l}{\partial x^m} - \frac{\partial\Gamma_k{}^i{}_l}{\partial dx^r}\Gamma_m{}^r{}_p\,dx^p + \Gamma_k{}^r{}_l\Gamma_r{}^i{}_m\right) - (l|m), \tag{1.16}$$

而$(l|m)$表示在前項裏對調 l 和 m 而得來的．

這些支量和 $\Gamma_k{}^i{}_l(x, dx)$ 同爲 dx 的正齊 0 次函數，關於下指標是輪換對稱的$(K_k{}^i{}_{lm} + K_l{}^i{}_{mk} + K_m{}^i{}_{kl} = 0)$並且關於後面二下指標是反稱的$(K_k{}^i{}_{lm} + K_k{}^i{}_{ml} = 0)$．

這種平行移動是使得極値曲綫的微分方程(1.11)變爲

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma_k{}^i{}_l\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^l}{ds} = 0, \tag{1.17}$$

就是說，變成測地綫的方程．這確是優點，但是如下面所述，它並不是歐氏式的．

爲表明這事實，定義空間的二階共變張量 $g_{ik}(x, \dot{x})$，作爲芬斯拉空間的基本張量：

$$g_{ik}(x, \dot{x}) = g_{ki}(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2[F(x, \dot{x})]^2}{\partial\dot{x}^i\partial\dot{x}^k} =$$

$$= F(x;\dot{x})F_{\dot{x}^i\dot{x}^k}(x;\dot{x}) + F_{\dot{x}^i}(x;\dot{x})F_{\dot{x}^k}(x;\dot{x}). \tag{1.18}$$

各函數關於 $\dot{x}$ 是正齊零次的，所以

$$\left.\begin{aligned} &g_{ik}(x, \dot{x}) = g_{ik}(x, x') = g_{ik}(x, dx),\\ &g_{ik}(x, \dot{x})\dot{x}^k = F(x, \dot{x})F_{\dot{x}^i}(x, \dot{x}),\\ &g_{ik}(x, \dot{x})\dot{x}^k\dot{x}^i = [F(x, \dot{x})]^2. \end{aligned}\right\} \tag{1.19}$$

[1] L. Berwald, Untersuchung der Krümmung allgemeiner metrischer Räume auf Grund des in ihnen herrschenden Parallelismus. Math. Zeits. 25 (1926), 40—73.

設 G 是 g_{ik} 的行列式，那末

$$G(x,\dot{x}) = [F(x,\dot{x})]^{n+1}\cdot F_1(x,\dot{x}), \tag{1.20}$$

其中 $F_1(x,\dot{x})$ 是按(1.7)定義的．由於變分問題 $\delta s = 0$ 是正則的，G 不等於零，從而存在 g_{ik} 的逆張量 $g^{ik} = g^{ki}$．各函數 $g^{ik}(x,\dot{x})$ 和 G 都是關於 $\dot{x}$ 的齊零次函數．用 g_{ik} 和 g^{ik}，可以降下或提高指標．

同時，用 $\Gamma_k{}^i{}_l$ 可以定義一張量的共變導數．例如，

$$g_{ik\,|\,l} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial \dot{x}^r}\Gamma_l{}^r{}_h\dot{x}^h - \Gamma_i{}^r{}_l g_{rk} - \Gamma_k{}^r{}_l g_{ir},$$

或者按(1.14)化約它，

$$g_{ik\,|\,l} = \frac{1}{2}\,g_{pq}(x,x')\,x'^q\,\frac{\partial^3\varphi^p(x;x')}{\partial x'^i\partial x'^k\partial x'^l}. \tag{1.21}$$

這個 Ricci 定理的類似表明了，Berwald 的聯絡並不是歐氏式的．所導入的平行移動不但不能保存向量的長度，而且還含有基本函數 F 的第四階爲止的偏導數在內．我們需要長度保持的平行移動，而且要使所含的偏導數的階數降到第三階，那就比較自然些．

2. 歐氏聯絡的空間

首先敍述具有歐氏聯絡的綫素空間的概念．一個綫素是按照一點 $(x^1,\cdots,x^n)$ 和從它所發出的一個方向所構成的，我們用 n 個齊次參數 $x'^1, x'^2,\cdots,x'^n$ 表示這方向，其中只有比值是主要的；稱 (x) 爲元素的中心．當下列的二條件成立時，我們說：綫素空間是具有歐氏聯絡的．

1° 在綫素 (x,x') 的近傍，取測度

$$g_{ij}(x,x')\,dx^i\,dx^j \tag{2.1}$$

來做綫素 (x,x') 的中心 (x) 到鄰近綫素 $(x+dx,\ x'+dx')$ 的中心的距離平方．如果把微分 dx^i 看作在原點 (x) 的一條向量的支量 X^i，那末按照(2.1)得出這向量的長度平方：

$$g_{ij}(x,x')\,X^iX^j;$$

但是，這個長度不能單靠原點 (x) 來定義，而且還需要向量的支持元素 (x,x')．局部地，這個向量長度平方的表示式和在歐氏空間裏的相同．

2° 當一條向量的支持元素和支量受到微小的變動時，我們要給它一個分析的表示，以表這條動向量所必須受到的幾何的變分．稱這變分爲向量的絕對微分 $D\vec{X}$；它的支量 DX^i 將採取形式

$$\begin{aligned} DX^i &= dX^k + C_k{}^i{}_h X^k dx'^h + \Gamma_k{}^i{}_h X^k\,dx^h \\ &= dX^k + X^k\omega_k{}^i, \end{aligned} \tag{2.2}$$

式中

$$\omega_i{}^j = C_i{}^j{}_h dx'^h + \Gamma_i{}^j{}_h dx^h. \tag{2.3}$$

當然，這些 $C_i{}^j{}_h$ 和 $\Gamma_i{}^j{}_h$ 都是 x^i 和 x'^i 的函數，但它們不是絕對任意的．實際上，我們估計到一個主要的條件：當向量的絕對微分等於零時，它的長度不改變．從這條

件導出一些關係

$$dg_{ij} = g_{ik}\omega_j{}^k + g_{jk}\omega_i{}^k = \omega_{ji} + \omega_{ij}, \tag{2.4}$$

就是

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x'^h} &= g_{ik}C_j{}^k{}_h + g_{jk}C_i{}^k{}_h = C_{jih} + C_{ijh}, \\ \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^h} &= g_{ik}\Gamma_j{}^k{}_h + g_{jk}\Gamma_i{}^k{}_h = \Gamma_{jih} + \Gamma_{ijh}. \end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

這裏有必要指出，在綫素(x, x')和一條向量的長度的分析式的定義裏，僅有這些x'^i的比值，而在它的絕對微分的定義裏，就有這些比值和它們的微分。

我們要表明如何從上列的條件作出一個具有歐氏聯絡的空間；詳細地說：當在各綫素的中心添上一條任意向量時，如何把這樣的綫素的一個綫性連續序列看作爲同一的歐氏空間裏的堆積．設想序列的一個元素的坐標(x^i, x'^i)，把各個表成爲單參數t的函數，而t從0變到1．在普通歐氏空間裏，考察這樣的點P和笛氏標形$(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n)$的一個序列，使這些都和參數$t$有關而且滿足微分方程

$$\left.\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= \frac{dx^i}{dt}\vec{e}_i, \\ \frac{d\vec{e}_i}{dt} &= \left(C_i{}^j{}_h\frac{dx'^h}{dt} + \Gamma_i{}^j{}_h\frac{dx^h}{dt}\right)\vec{e}_j. \end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

任意規定標形在$t = 0$時的位置$(P^0, \vec{e}_i^{\,0})$，其中這些向量$\vec{e}_i^{\,0}$必須滿足條件

$$\vec{e}_i^{\,0}\cdot\vec{e}_j^{\,0} = g_{ij}^0.$$

這樣，固定了初始條件之後，每個t值就有對應的一定標形(R)．我們說，在歐氏空間裏有了已知的綫素序列的圖表，就是說，在序列中，對應於t值的元素(x, x')被表示爲點$P(t)$和向量$x'^i\vec{e}_i$的方向．設一條向量(X^i)以這元素爲支持元素，我們作出關於標形(R)以已知的X^i爲支量的向量$X^i\vec{e}_i$來表這向量(X^i)而且要證：在這個圖表裏，序列中的二綫素的中心間的距離保持不變，向量保持着預先給定的長度並且一條動向量的絕對微分$D\vec{X}$恰等於代表的動向量在圖表裏所受到的幾何的變分．

爲作出這證明，首先來證：尺量積$\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j$等於同一t值的係數g_{ij}．實際上，從(2.6)得到

$$\frac{d(\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j)}{dt} = \left(C_i{}^k{}_h\frac{dx'^h}{dt} + \Gamma_i{}^k{}_h\frac{dx^h}{dt}\right)\vec{e}_j\cdot\vec{e}_k + \left(C_j{}^k{}_h\frac{dx'^h}{dt} + \Gamma_j{}^k{}_h\frac{dx^h}{dt}\right)\vec{e}_i\cdot\vec{e}_k.$$

可是，按照(2.5)得知，g_{ij}也滿足這綫性微分方程組而且根據假設，g_{ij}和$\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j$在$t = 0$時有相同的數值，所以它們一定相等．

其次，二鄰近綫素的中心間的距離平方按(2.6)等於向量$\vec{dP}$的長度平方，就是$g_{ij}\,dx^i\,dx^j$．另一方面，向量$X^i\vec{e}_i$同它所代表的向量有同一長度$\sqrt{g_{ij}X^iX^j}$．最後，按照(2.6)，向量$\vec{X}$的絕對微分$d(X^i\vec{e}_i)$在圖表上，等於

$$[dX^i + X^k(C_k{}^i{}_h dx'^h + \Gamma_k{}^i{}_h dx^h)]\,\vec{e_i} = DX^i\vec{e_i}.$$

很明顯,從支量 x'^i 的向量和支持元素(x, x')着想,便可定義一條向量(X^i)與它的支持元素的方向間的角度 θ:

$$\cos\theta = \frac{g_{ij}\,x'^i\,X^j}{\sqrt{g_{ij}\,X^i\,X^j}\cdot\sqrt{g_{hk}\,x'^h\,x'^k}};$$

二鄰近綫素間的角度如在歐氏幾何學中一樣,可按照在這元素的方向上所置的單位長度向量的絕對微分的想法給它定義,等等.

現在回到芬斯拉空間來. 我們將要解決的問題是這樣:設 F 是已知函數且合於內在性的規定,即和變數的選擇無關,應該如何確定我們剛才定義的一個歐氏聯絡,使它與 F 相聯系. 我們將在後文中看到,這常是可能的,只要成立一個條件,即函數 F 能導致到變分學的一個正則問題,而我們假定這個條件. 一度獲得了這結果以後,我們已經具備一切充要的因素,如在黎曼幾何中進行一般,來應用歐氏微分幾何的方法. 唯一的差別是:這方法僅能適用於綫素軌跡的一個圖形. 但是,這並非本質上的限制,因爲常常可能用內在的方式把這樣的綫素軌跡聯系到任何一個圖形,比方說,可以把一條曲綫看作它的切綫素的軌跡.

以後,假定函數 F 具有最初四階的連續偏導數.

3. Cartan 的仿射聯絡和它的確定

我們要唯一地找尋歐氏聯絡的綫素空間,使它和函數 F 相聯系. 爲了這個目的,首先按 Cartan 提出內在性的一些公理.

A. 具有支量 x'^i 而且和支持綫素 (x, x') 有同一方向的任何向量必有長度 $F(x, x')$.

B. 設一向量(X^i) 是從支持綫素(x, x')的中心(x)發出並且它的方向滿足

$$\omega \equiv \frac{\partial F}{\partial x'^i}\,X^i = 0, \tag{3.1}$$

則稱它爲這元素的橫斷方向. 凡橫斷支持元素的任何向量必和這元素正交.

C. 設 $\vec{X}$ 和 $\vec{Y}$ 是有同一支持元素的二向量. 當這二向量保持固定的反變支量 X^i 和 Y^i 而且公共的支持元素環繞它的中心而受到同一的微小旋轉時,它們的絕對微分 $D\vec{X}$ 和 $D\vec{Y}$ 滿足對稱律

$$\vec{X}\cdot D\vec{Y} = \vec{Y}\cdot D\vec{X}.$$

D. 設一條向量 $\vec{X}$ 和它的支持元素有同一方向. 當它的反變支量保持定值而支持元素在中心的周圍微小旋轉時,它的絕對微分 $D\vec{X}$ 等於零.

E. 當支持元素平行於它本身而移動時,一條向量的絕對微分中的聯絡支量 $\Gamma_i^{*k}{}_j$ 關於下指標 i, j 是對稱的. 如果用前節的圖表來表達,那末就是這樣:在一條微小環路的各點引綫素,使互相平行着;把這圖形映像到圖表上去,那末從環路原點出發而一周以後,圖表一定是關閉的.

公理A的解析表示式是

$$g_{ij}(x,\, x')\, x'^i x'^j = F^2(x, x') = 2\,\mathscr{F}(x,\, x'), \tag{I}$$

其中

$$\mathscr{F} = \frac{1}{2} F^2. \tag{3.2}$$

按照公理 B 得知 $\dfrac{\partial F}{\partial x'^i}$ 是這樣向量的共變支量，它的方向重合於支持元素 $(x,\, x')$．如果取這方向的單位向量，那末它的反變支量是 $\dfrac{x'^i}{F}$．實際上，按照公理A計算向量 x'^i 的長度，得到 F．另一方面，尺量積

$$\frac{\partial F}{\partial x'^i} \cdot \frac{x'^i}{F}$$

等於 1，所以 $\dfrac{\partial F}{\partial x'^i}$ 是支持元素方向的單位共變向量，因而

$$\frac{\partial F}{\partial x'^i} = g_{ik}\frac{x'^k}{F} \quad 即 \quad \frac{\partial \mathscr{F}}{\partial x'^i} = g_{ik}\, x'^k. \tag{II}$$

現在，置

$$l^i = \frac{x'^i}{F}, \qquad l_i = \frac{\partial F}{\partial x'^i}. \tag{III}$$

讓我們轉到公理 C．根據 $D\vec{X}$ 的定義獲得

$$DX^i = X^k\, C_k{}^i{}_h\, dx'^h$$

和

$$\vec{Y}\, D\vec{X} = Y_i X^k C_k{}^i{}_h dx'^h = Y^i X^k C_{kih} dx'^h.$$

所以在公理中所提的對稱性條件是

$$C_{ijh} = C_{jih}. \tag{IV}$$

從此結合(2.5)的第一方程，便可導出

$$C_{ijh} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial g_{ij}}{\partial x'^h}. \tag{V}$$

應用公理 D 到向量 x'^i，立刻知道

$$x'^k\, C_{kih} = 0 \quad 即 \quad x'^k\, \frac{\partial g_{ik}}{\partial x'^h} = 0. \tag{3.3}$$

關於 x'^j 導微(II)，容易求出

$$g_{ij} = \frac{\partial^2 \mathscr{F}}{\partial x'^i \partial x'^j}. \tag{VI}$$

我們可證公理 A—D 的相容性．實際上，由於函數 $\mathscr{F}$ 關於 x'^i 是正齊二次的，關係式(VI)顯然包括(II)，從而也包括了關係式(I)． (1.18)和(VI)相同；g_{ij} 的判別式 $G(x,\, x')$不等於零這個條件簡單地表明了，從函數 $F(x,\, dx)$可以導出變分學的一個正則問題．

在轉入最後的公理E之前，先指出一個普遍的方法，按照它從一個已知張量導出一個特殊的導來張量．

到現在為止，我們所獲得的最簡單空間張量只有單位向量 l_i 和基本張量 g_{ij}．考

察任何反變、共變或混合張量，例如具有二指標的共變張量 T_{ij}，它的支量(正像 l_i 和 g_{ij} 的情況一樣)關於 x'^i 必須是齊零次的．這些支量 T_{ij} 都參考於一個支持元素 (x, x')．設想把這元素的中心固定起來而把它的方向略加微小變動．因爲這些 T_{ij} 僅同 x'^i 的比值有關，即同 $l^i = \dfrac{x'^i}{F}$ 的比值有關，我們可以寫出

$$dT_{ij} = T_{ij\|k}dl^k;$$

但是，由於這 n 個微分 dl^i 不是獨立而是由關係 $l_i\,dl^i = 0$ 聯系着的，這樣的關係式有無限多可能．因而，可以調整其中一種而且只一種、使得

$$l^k T_{ij\|k} = 0.$$

我們容易得到

$$T_{ij\|k} = F\frac{\partial T_{ij}}{\partial x'^k}. \tag{VII}$$

這個公式定義了原張量的一個新導來張量．特別是：

$$l_{i\|k} = F\frac{\partial^2 F}{\partial x'^i \partial x'^k} = g_{ik} - l_i\,l_k. \tag{3.4}$$

置

$$A_{ijk} = \frac{1}{2}\,g_{ij\|k} = FC_{ijk}; \tag{3.5}$$

因爲

$$A_{ijk} = \frac{\mathscr{F}}{2}\,\frac{\partial^3 \mathscr{F}}{\partial x'^i \partial x'^j \partial x'^k}, \tag{VIII}$$

張量 A_{ijk} 是對稱的，而且

$$l^i A_{ijk} = l^j A_{ijk} = l^k A_{ijk} = 0. \tag{3.6}$$

縮短了的張量 $A_{ik}{}^k = A_i$ 決定於

$$A_i = A_{ik}{}^k = \frac{1}{2}\,Fg^{kh}\frac{\partial g_{kh}}{\partial x'^i} = \frac{1}{2}\,F\,\frac{\partial \log g}{\partial x'^i}, \tag{3.7}$$

式中 g 表示 $\det|g_{kh}|$．

我們又導入與任何張量和向量 l_i 的合併積有關的記號．

置

$$l^k T_{kj} = T_{0j}, \quad l^k\,T_{ik} = T_{i0}, \tag{3.8}$$

指標 0 在上或在下都沒有關係．特別是，

$$l_0 = l^k\,l_k = 1, \quad g_{i0} = g_{ik}\,l^k = l_i, \quad T_{ij\|0} = 0. \tag{3.9}$$

利用單位向量的絕對微分，如在歐氏幾何學中一樣，還可定義同心的二鄰近綫素間的角度，作爲放在這綫素上的單位向量絕對微分的長度．這絕對微分的反變支量是

$$dl^i + l^k C_k{}^i{}_h dx'^h = dl^i,$$

而它的共變支量是

$$dl_i - l_h C_i{}^h{}_k dx'^k = dl_i.$$

因而，同心的二鄰近綫素間的角度平方 $d\varphi^2$ 是

$$d\varphi^2 = dl_i\,dl^i = \frac{\partial^2 F}{\partial x'^i \partial x'^k}\left(\frac{dx'^i}{F} - \frac{x'^i}{F^2}\,\frac{\partial F}{\partial x'^h}dx'^h\right)dx'^k,$$

018-81C,

或者化約之後，

$$d\varphi^2 = \frac{1}{F}\frac{\partial^2 F}{\partial x'^i \partial x'^k} dx'^i dx'^k. \tag{IX}$$

很明顯，右側僅同這些 x'^i 的比值和它們的微分有關．當 $n=2$ 時，這是 G. Landsberg 所指出的角度[1]．

4. 歐氏聯絡的確定

如果暫時假定歐氏聯絡的支量 $\Gamma_i{}^j{}_h$ 是已知的，那末，當支持元素受着任何微小變動時，單位向量 l_i 的絕對微分應該以

$$\varpi^i = dl^i + l^k\Gamma_k{}^i{}_h dx^h \tag{4.1}$$

爲反變支量，而且以

$$\varpi_i = dl_i - l_k\Gamma_i{}^k{}_h dx^h \tag{4.2}$$

爲共變支量．所以把綫素(x, x')平行移動使和它本身平行的時候，這些形式 ϖ^i（和 ϖ_i）都等於零．特別地得到

$$d\frac{x'^i}{F} + \frac{x'^k}{F}\Gamma_k{}^i{}_h dx^h = 0,$$

即

$$dx'^i = \frac{dF}{F}x'^i - x'^k\Gamma_k{}^i{}_h dx^h. \tag{4.3}$$

在上述的條件之下，可以寫出[2]

$$\omega_i{}^j = C_i{}^j{}_h dx'^h + \Gamma_i{}^j{}_h dx^h = (\Gamma_i{}^j{}_h - x'^k\Gamma_k{}^r{}_h C_i{}^j{}_r)dx^h. \tag{4.4}$$

這時，在支持元素的絕對微分等於零這個條件之下，所取的絕對微分公式裏出現一些係數 $\Gamma^*{}_i{}^j{}_h$：

$$\Gamma^*{}_i{}^j{}_h = \Gamma_i{}^j{}_h - x'^k\Gamma_k{}^r{}_h C_i{}^j{}_r. \tag{4.5}$$

應用公理 E 和方程(2.5)到這裏，就足够確定起未知函數 Γ_{ijh}，就是按照關係式

$$\left.\begin{aligned} &\Gamma_{ijh} - \Gamma_{hji} = C_{ijr}x'^k\Gamma_k{}^r{}_h - C_{hjr}x'^k\Gamma_k{}^r{}_i,\\ &\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^h} = \Gamma_{ijh} + \Gamma_{jih}.\end{aligned}\right\} \tag{4.6}$$

這組有 n^3 個方程，恰等於未知函數的個數．

爲解出這組方程，導入第一類克氏記號 γ_{ijh}，就是滿足下列方程的解：

$$\gamma_{ijh} - \gamma_{hji} = 0, \quad \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^h} = \gamma_{ijh} + \gamma_{jih}. \tag{4.7}$$

如所周知，

$$\gamma_{ijh} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^h} + \frac{\partial g_{jh}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ih}}{\partial x^j}\right). \tag{4.8}$$

置

[1] G. Landsberg, Krümmungstheorie und Variationsrechnung, Jahresb. D. M. V., 16 (1907), 547—557.

[2] 一般地，成立

$$\omega_i{}^j = \Gamma^*{}_i{}^j{}_h dx^h + A_i{}^j{}_h \varpi^h. \tag{4.4$'$}$$

$$\Gamma_{ijh} = S_{ijh} + \gamma_{ijh}, \tag{4.9}$$

從(4.6)和(4.7)的第二方程看到，S_{ijh} 關於最初二指標 i, j 是反稱的、 又在(4.6)的第一方程兩邊輪換指標 i, j, h 而且利用 S_{ijh} 的反稱性，即得關係式

$$S_{ijh} + S_{jhi} + S_{hij} = 0,$$

從而改寫方程(4.6)，

$$S_{ihj} = C_{ijr}\, x'^k\,(S_k{}^r{}_h + \gamma_k{}^r{}_h) - C_{hjr}\, x'^k\,(S_k{}^r{}_i + \gamma_k{}^r{}_i). \tag{4.10}$$

各邊與 x'^j 合併的結果，$x'^j S_{ihj} = 0$；又與 x'^i 合併，

$$x'^i S_{ihj} = -C_{hjr}\, x'^k x'^i \gamma_k{}^r{}_i, \tag{4.11}$$

因而

$$x'^i \Gamma_{ihj} = x'^i \gamma_{ihj} - C_{hjr}\, x'^i x'^k \gamma_k{}^r{}_i. \tag{4.12}$$

把最後的式子代進(4.10)，便得到 S_{ihj}. 具體的形式將在後文寫出.

現在，要來計算(4.12)的右邊.

$$x'^k \gamma_{kmi} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial(g_{km}x'^k)}{\partial x^i} - \frac{\partial(g_{ki}x'^k)}{\partial x^m} + \frac{\partial g_{im}}{\partial x^k}x'^k\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \mathscr{F}}{\partial x'^m \partial x^i} - \frac{\partial^2 \mathscr{F}}{\partial x'^i\, \partial x^m} + \frac{\partial g_{im}}{\partial x^k}x'^k\right),$$

$$x'^k x'^i \gamma_{kmi} = \frac{\partial^2 \mathscr{F}}{\partial x'^m \partial x^k}x'^k - \frac{\partial \mathscr{F}}{\partial x^m}.$$

為了方便，置

$$2G_m = \frac{\partial^2 \mathscr{F}}{\partial x'^m \partial x^k}x'^k - \frac{\partial \mathscr{F}}{\partial x^m}, \tag{4.13}$$

那末

$$G_m x'^m = \frac{1}{2}\frac{\partial \mathscr{F}}{\partial x^m}x'^m, \tag{4.14}$$

並且

$$x'^i \Gamma_{ihj} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \mathscr{F}}{\partial x'^h \partial x^j} - \frac{\partial^2 \mathscr{F}}{\partial x'^j\, \partial x^h} + \frac{\partial g_{jh}}{\partial x^i}x'^i\right) - 2C_{hjr}G^r. \tag{4.15}$$

可是

$$g_{hr}G^r = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \mathscr{F}}{\partial x'^h \partial x^k}x'^k - \frac{\partial \mathscr{F}}{\partial x^h}\right)$$

而且關於 x'^j 導微之後，

$$g_{hr}\frac{\partial G^r}{\partial x'^j} + 2C_{hrj}G^r = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \mathscr{F}}{\partial x'^h \partial x^j} - \frac{\partial^2 \mathscr{F}}{\partial x'^j \partial x^h} + \frac{\partial g_{jh}}{\partial x^k}x'^k\right), \tag{4.16}$$

所以把它代進(4.14)的結果是：

$$x'^i \Gamma_i{}^h{}_j = \frac{\partial G^h}{\partial x'^j}. \tag{X}$$

最後，代進(4.10)：

$$S_{ihj} = C_{ijr}\frac{\partial G^r}{\partial x'^h} - C_{hjr}\frac{\partial G^r}{\partial x'^i},$$

從而

$$\Gamma_{ihj} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ih}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jh}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^h}\right) + C_{ijr}\frac{\partial G^r}{\partial x'^h} - C_{hjr}\frac{\partial G^r}{\partial x'^i}. \tag{XI}$$

從(4.5)和(X)終於獲得

$$\Gamma^*_{ihj} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ih}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jh}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^h}\right) + C_{ijr}\frac{\partial G^r}{\partial x'^h} - C_{ihr}\frac{\partial G^r}{\partial x'^j} - C_{jhr}\frac{\partial G^r}{\partial x'^i}. \quad \text{(XII)}$$

至於形式 ϖ^i，那末從(4.1)和(X)看到

$$\varpi^i = dl^i + \frac{1}{F}\frac{\partial G^i}{\partial x'^h}dx^h. \quad \text{(XIII)}$$

我們看到，這些支量 Γ^*_{ihj} 關於兩端指標 i 和 j 是對稱的，但是那些 Γ_{ihj} 就不相同．這兩組支量都僅含有函數 $F(x, x')$的第三階偏導數，其中關於變數 x^i 的導微至多只取一次．

容易看出，如果沿一條極值曲綫變位的話，那末在採用極值曲綫的切綫素作爲支持元素的假設下，切綫單位向量 l^i 的絕對微分是零． 實際上，以 s 表示極值曲綫的動點的曲綫橫標時，我們有 $l^i = \dfrac{dx^i}{ds}$, $dx^h = l^h ds$ 且從而

$$\frac{\varpi^i}{ds} = \frac{d^2x^i}{ds^2} + \frac{2}{F^2}G^i(x, x') = \frac{d^2x^i}{ds^2} + 2G^i(x, l).$$

另一方面，極值曲綫的微分方程是

$$\frac{d}{ds}\frac{\partial F}{\partial x'^i} - \frac{\partial F}{\partial x^i} = 0,$$

即

$$g_{ij}\,x''^j + x'^j\frac{\partial^2 \mathscr{F}}{\partial x'^i\,\partial x^j} - \frac{\partial \mathscr{F}}{\partial x^i} - \frac{\partial F}{\partial x'^i}\left(x'^j\frac{\partial F}{\partial x^j} + x''^j\frac{\partial F}{\partial x'^j}\right) = 0.$$

按(1.9)和(4.13)改寫，

$$g_{ij}\,x''^j + 2\,G_i(x, x') = 0,$$

即

$$x''^i + 2\,G^i(x, x') = 0.$$

所以，在歐氏空間作出的極值曲綫圖表，一定是直綫．

預先取定極值曲綫作爲互相平行的切綫方向的曲綫． 並按這定義平行移動，將是非常自然的．但是，僅僅這樣，還不足够決定歐氏聯絡．

5. 共變微分

設想一個動張量，例如 T_{ij}，它的絕對微分應當是這樣：

$$DT_{ij} = dT_{ij} - (C_i{}^k{}_h T_{kj} + C_j{}^k{}_h T_{ik})dx'^h - (\Gamma_i{}^k{}_h T_{kj} + \Gamma_j{}^k{}_h T_{ik})\,dx^h.$$

可是從(4.1)得到

$$dx'^h = F\varpi^h + \frac{dF}{F}x'^h - x'^r\Gamma_r{}^h{}_k dx^k,$$

所以

$$DT_{ij} = dT_{ij} - T_{kj}A_i{}^k{}_h\varpi^h - T_{ik}A_j{}^k{}_h\varpi^h - (T_{kj}\Gamma^{*k}_{i\ h} + T_{ik}\Gamma^{*k}_{j\ h})\,dx^h. \quad (5.1)$$

置

$$dT_{ij} - (T_{kj}\Gamma^{*k}_{i\ h} + T_{ik}\Gamma^{*k}_{j\ h})\,dx^h = T_{ij\|k}\varpi^k + T_{ij|h}dx^h, \quad (5.2)$$

那末

$$DT_{ij}=(T_{ij\|h}-T_{kj}A_i{}^k{}_h-T_{ik}A_j{}^k{}_h)\,\varpi^h+T_{ij|h}\,dx^h.$$

很明顯，ϖ^h 和 dx^h 的係數都是 T_{ij} 的導來張量. 從 (5.2) 算出 $dT_{ij}=\dfrac{\partial T_{ij}}{\partial x^h}dx^h+$ $+\dfrac{\partial T_{ij}}{\partial x'^k}(F\varpi^k-x'^r\Gamma_r{}^k{}_h\,dx^h)$並且代進之後，易知 ϖ^k 的係數 $T_{ij\|k}$ 恰等於在(VII)所定義的量. 在 DT_{ij} 的表示中，ϖ^h 的係數除這張量 $T_{ij\|h}$ 而外，還含有由張量 T_{ij} 和 A_{ijh} 相乘而合併成的另一張量. 至於 dx^h 的係數，它定義一個新張量. 由 $T_{ij|h}$ 所表達的運算是關於 x^h 的共變微分. 從幾何學上看來，當一個張量 T_{ij} 的支持元素從點(x)平行移動到點$(x+dx)$時，和式 $T_{ij|h}\,dx^h$ 表達這張量所受着的絕對微分的支量.

把(5.2)的二邊中的 dx^h 的係數相等起來，不難算出 $T_{ij|h}$. 這樣，按照(XIII)得到

$$T_{ij|h}=\frac{\partial T_{ij}}{\partial x^h}-\frac{\partial T_{ij}}{\partial x'^k}\frac{\partial G^k}{\partial x'^h}-T_{kj}\Gamma^{*}_{i}{}^{k}{}_{h}-T_{ik}\Gamma^{*}_{j}{}^{k}{}_{h}. \qquad \text{(XIV)}$$

對於任何張量，同樣可求它的共變導數公式. 特別，

$$l^i{}_{|h}=0, \qquad (5.3)$$

因爲 $Dl^i=dl^i+l^k\Gamma_k{}^i{}_h dx^h=\varpi^i$ 之故. 同樣，

$$g_{ij|h}=0. \qquad (5.4)$$

從幾何學上，這結果是很明顯的. 它是 Ricci 引理的拓廣.

從導來張量 $T_{ij|h}$ 同時可求下列張量:

$$T_{ij|0}=l^kT_{ij|k}=\frac{x'^h}{F}\frac{\partial T_{ij}}{\partial x^h}-\frac{2}{F}\frac{\partial T_{ij}}{\partial x'^k}G^k-\frac{T_{kj}}{F}\frac{\partial G^k}{\partial x'^i}-\frac{T_{ik}}{F}\frac{\partial G^k}{\partial x'^j},$$

這就是張量 T_{ij} 沿支持元素方向的共變導數. 同樣，對於反變張量，例如向量 X^i，我們有

$$X^i{}_{|0}=\frac{x'^h}{F}\frac{\partial X^i}{\partial x^h}-\frac{2}{F}\frac{\partial X^i}{\partial x'^k}G^k+\frac{X^k}{F}\frac{\partial G^i}{\partial x'^k}.$$

利用這樣的導來張量，便可明顯地表達 Cartan 的聯絡 $\Gamma^{*}_{i}{}^{k}{}_{j}$ 與 Berwald 的聯絡 $G_i{}^k{}_j\left(=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2\varphi^k}{\partial x'^i\partial x'^j}, 見(1.14)\right)$之間的關係. 實際上，$\varphi^k=2G^k$.

我們將證 $G_i{}^k{}_j-\Gamma^{*}_{i}{}^{k}{}_{j}$ 是一個張量. 從(4.16)得到

$$g_{hr}\frac{\partial G^r}{\partial x'^j}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\mathscr{F}}{\partial x'^h\partial x^j}-\frac{\partial^2\mathscr{F}}{\partial x'^j\partial x^h}+\frac{\partial g_{jh}}{\partial x^k}x'^k\right)-2C_{hrj}G^r.$$

關於 x'^i 導微兩邊，

$$G_{ihj}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ih}}{\partial x^j}+\frac{\partial g_{jh}}{\partial x^i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^h}\right)-2C_{ihr}\frac{\partial G^r}{\partial x'^j}-2C_{jhr}\frac{\partial G^r}{\partial x'^i}+$$
$$+\frac{\partial C_{ijh}}{\partial x^k}x'^k-2C_{ijhr}G^r,$$

式中 $C_{ijhr}=\dfrac{\partial C_{ijh}}{\partial x'^r}$. 從這減去(XII)的兩邊，