平面三角复习总表

金 江 编

上海科学技术出版社

平面三角复习总表

金 江 编

上海科学技术出版社出版

（上海瑞金二路450号）

新华书店上海发行所发行　上海市印刷十二厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 1 字数 22,000

1985年9月第1版 1985年9月第1次印刷

印数 1—387,000

统一书号：13119·1286　定价：0.21元

出 版 说 明

供中学生高中毕业总复习时参考的一套“中学数理化生复习一览图（对开）”出版后受到中学师生欢迎。为了便于读者个人携带和阅读，我们在“一览图”出版的基础上重新组织编写了这套“中学数理化生复习总表（32 开本）”，共九册（每册 32 页），书名如下。我们希望这套“复习总表”能在读者复习迎考中起穿针引线，提纲挈领的作用。

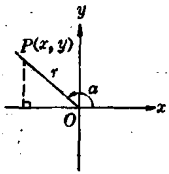
代数复习总表
平面几何复习总表
平面三角复习总表
立体几何复习总表
平面解析几何复习总表
物理复习总表
化学复习总表
生物复习总表
生理卫生复习总表

平面三角

- 任意三角函数值的符号(2)
- 同角三角函数的基本关系式(3)
- 三角形各元素之间的关系(9)
- 诱导公式(4)
- 两角和与差的三角函数公式(6)
  - 和角公式(6)
  - 倍角公式(6)
  - 半角公式(7)
  - 和差化积公式(7)
  - 积化和差公式(8)
  - 万能公式(8)
- 应用举例(13)
  - 三角函数式的化简(13)
  - 三角函数式的求值(15)
  - 三角函数式的证明(17)
  - 解三角形(22)
  - 三角方程(26)
  - 三角函数的综合应用(31)

一 锐角三角函数

任意角的三角函数

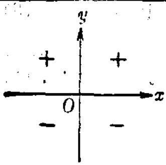


设α为任意一个角。在角α的终边上一点P的坐标是(x, y)，它和原点的距离是$r(r>0)$。那末角α的正弦、余弦、正切、余切分别是

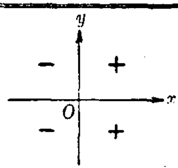
$$\sin\alpha=\frac{y}{r},\quad \cos\alpha=\frac{x}{r},\quad \operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x}$$

$$\csc\alpha=\frac{r}{y},\quad \sec\alpha=\frac{r}{x},\quad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{x}{y}$$

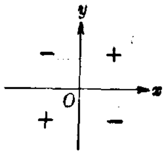
2. 任意角三角函数值的符号



$\sin\alpha$ 和 $\csc\alpha$



$\cos\alpha$ 和 $\sec\alpha$



$\operatorname{tg}\alpha$ 和 $\operatorname{ctg}\alpha$

3. 特殊角的三角函数值

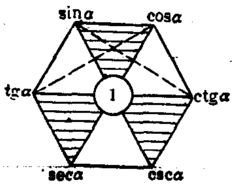
角 α / 函数	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	−1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	−1	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	不存在	0	不存在
$\operatorname{ctg}\alpha$	不存在	$\sqrt{}$[illegible]	1	[illegible]	0	不存在	0

4. 度数与弧度数的换算

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ 弧度} \approx 0.01745 \text{ 弧度}$$

$$1 \text{ 弧度} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx 57.30^\circ = 57^\circ 18'$$

5. 同角三角函数的基本关系式

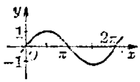
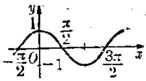
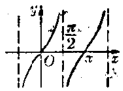
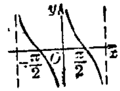
<table>
<tr><td rowspan="3">基本关系式</td><td>(1) 倒数关系</td><td>$\sin\alpha \cdot \csc\alpha = 1$
$\cos\alpha \cdot \sec\alpha = 1$
$tg\,\alpha \cdot ctg\,\alpha = 1$</td></tr>
<tr><td>(2) 商数关系</td><td>$tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$
$ctg\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$</td></tr>
<tr><td>(3) 平方关系</td><td>$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
$1 + tg^2\alpha = \sec^2\alpha$
$1 + ctg^2\alpha = \csc^2\alpha$</td></tr>
<tr><td>记忆方法</td><td colspan="2">

(1) 在对角线上的两个三角函数值的乘积等于1，如 $tg\,\alpha \cdot ctg\,\alpha = 1$
(2) 在带阴影的三角形中，上面两个顶点上的三角函数的平方和等于下面顶点上的三角函数的平方，如 $1 + tg^2\alpha = \sec^2\alpha$
(3) 任意一顶点上的三角函数等于相邻两个顶点的三角函数的乘积，如
$\sin\alpha = \cos\alpha \cdot tg\,\alpha$</td></tr>
<tr><td>说明</td><td colspan="2">上述八个基本关系式是指恒等式，即当 α 取使关系式的两边都有意义的任意值时，关系式两边的值都相等
利用这些关系式，可以根据一个角的某一个三角函数值，求出这个角的其他三角函数值，还可以化简三角函数式，等等</td></tr>
</table>

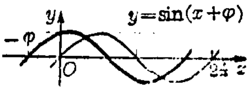
6. 诱导公式

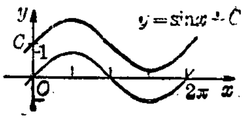
已知角		函数			
		sin( )	cos( )	tg( )	ctg( )
1	$k\cdot360^\circ+\alpha(k\in Z)$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
2	$180^\circ-\alpha$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$
3	$180^\circ+\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
4	$360^\circ-\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$
5	$-\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$
6	$90^\circ-\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$
7	$90^\circ+\alpha$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
8	$270^\circ-\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$
9	$270^\circ+\alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
记忆方法	规律：奇变偶不变，符号看象限 注意：表中的α可以是任意角				
求任意角三角函数值的步骤	(1) 当已知角为负角时，可用上表中公式5将该角的三角函数值化为相应的正角的三角函数值 (2) 当已知角大于360°时，可用公式1将该角的三角函数值化为0°～360°间角的三角函数值 (3) 当已知角为90°～360°间的角时，可用公式2, 3, 4或公式6, 7, 8, 9中的一个，把这个角的三角函数值化为锐角的三角函数值				

7. 三角函数的图象和性质

三角函数	$y=\sin x$	$y=\cos x$	$y=\mathrm{tg}\,x$	$y=\mathrm{ctg}\,x$
图　象				
定义域	$(-\infty,\ +\infty)$	$(-\infty,\ +\infty)$	$\left(n\pi-\frac{\pi}{2},\ n\pi+\frac{\pi}{2}\right)$	$(n\pi,\ n\pi+\pi)$
值　域	$[-1,\ 1]$	$[-1,\ 1]$	$(-\infty,\ +\infty)$	$(-\infty,\ +\infty)$
最大(小)值 $(k\in Z)$	当 $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$ 时，$y_{max}=1$；当 $x=2k\pi-\frac{\pi}{2}$ 时，$y_{min}=-1$	当 $x=2k\pi$ 时，$y_{max}=1$；当 $x=2k\pi+\pi$ 时，$y_{min}=-1$	无	无
奇偶性	奇函数	偶函数	奇函数	奇函数
周期性	$T=2\pi$	$T=2\pi$	$T=\pi$	$T=\pi$
有界性	有　界	有　界	无　界	无　界
单调性 $(k\in Z)$	在 $\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},\ 2k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$ 上都是增函数，在 $\left[2k\pi+\frac{\pi}{2},\ 2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right]$ 上都是减函数	在 $[(2k-1)\pi,\ 2k\pi]$ 上都是增函数，在 $[2k\pi,\ (2k+1)\pi]$ 上都是减函数	在 $\left(k\pi-\frac{\pi}{2},\ k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ 内都是增函数	在 $(k\pi,\ k\pi+\pi)$ 内都是减函数

平移变换 —— 正弦函数图象的变换 —— 放缩变换



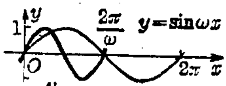


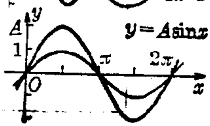
$y=A\sin(\omega x+\varphi)$

$(A>0,\ \omega>0)$

相位 $\omega x+\varphi$，初相 φ，振幅 A，

周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}$，频率 $f=\frac{\omega}{2\pi}$





8. 两角和与差的三角函数公式

(1) 和角公式

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$
$$\mathrm{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha \pm \mathrm{tg}\,\beta}{1 \mp \mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{tg}\,\beta}$$

(2) 倍角公式

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\mathrm{tg}\,2\alpha = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\alpha}$$

利用 $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$，上面第二个公式可变为

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ 或 $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$。

经过变形可得下面两个很有用的公式：

$$\sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$
$$\cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

类似地可得三倍角公式

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$
$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$
$$\mathrm{tg}\,3\alpha = \frac{3\,\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}^3\alpha}{1 - 3\,\mathrm{tg}^2\alpha}$$

(3) 半角公式

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

注：根号前的符号由半角 $\frac{\alpha}{2}$ 所在的象限来确定。如 α 在第一象限，即 $2k\pi<\alpha<2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in Z)$ 则有 $k\pi<\frac{\alpha}{2}<k\pi+\frac{\pi}{4}(k\in Z)$，即当 k 为奇数时，$\frac{\alpha}{2}$ 在第三象限；当 k 为偶数时，$\frac{\alpha}{2}$ 在第一象限。

(4) 和差化积公式

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

注：和差化积的特殊类型。

$$a\sin\alpha\pm b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi)$$

$\left(a>0,\ b>0,\ \text{辅助角 } \varphi \text{ 由 } \operatorname{tg}\varphi=\frac{b}{a} \text{ 来确定}\right)$

$$\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha\pm\operatorname{ctg}\beta=\frac{\sin(\beta\pm\alpha)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$$

(5) 积化和差公式

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$$

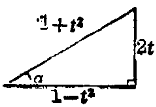
$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$$

(6) 万能公式

$$\sin\alpha=\frac{2\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$$

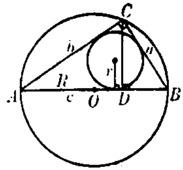
$$\cos\alpha=\frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{2\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$$

记忆方法	令 $t=\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$  $\sin\alpha=\frac{对边}{斜边}=\frac{2t}{1+t^2}$ $\cos\alpha=\frac{邻边}{斜边}=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ $\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{对边}{邻边}=\frac{2t}{1-t^2}$
用　　途	利用万能公式可以将α角的六种三角函数都转化为半角的正切函数，这就是说，将三角函数的有理式置换为关于 $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$ 的有理式，从而把三角问题转化为代数问题，然后借助于代数的知识和方法解决三角问题

二、三角形各元素之间的关系

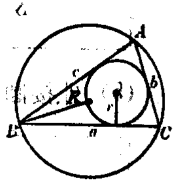
1. 直角三角形的边角关系



设 $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，三边分别为 a、b、c，面积为 S，内切圆半径为 r，外接圆半径为 R，则直角三角形有如下边角关系：

角与角关系	$\angle A+\angle B=90°$	$\angle ACD=\angle B$ $\angle BCD=\angle A$
边与边关系	$BC^2=BD\cdot AB$ $AC^2=AD\cdot AB$ $CD^2=AD\cdot DB$	$a^2+b^2=c^2$
边与角关系	$\sin A=\cos B=\frac{a}{c}$, $\cos A=\sin B=\frac{b}{c}$,	$\mathrm{tg}\,A=\mathrm{ctg}\,B=\frac{a}{b}$ $\mathrm{ctg}\,A=\mathrm{tg}\,B=\frac{b}{a}$
其　　他	$S=\frac{1}{2}ab$,　　$r=\frac{a+b-c}{2}$,	$R=\frac{c}{2}$

2. 斜三角形的边角关系



设 $\triangle ABC$ 中，三边分别为 a、b、c，内切圆半径为 r，外接圆半径为 R，面积为 S，半周长 $p=\dfrac{a+b+c}{2}$，则斜三角形的边角之间有如下关系：

(1) 正弦定理

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

其中 R 为三角形外接圆半径

(2) 余弦定理

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$

(3) 射影定理

$$a=b\cos C+c\cos B$$

$$b=a\cos C+c\cos A$$

$$c=a\cos B+b\cos A$$

(4) 面积公式

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B$$

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$S=r\cdot p$$

$$S=\frac{abc}{4R}$$

(5) 外接圆半径

$$R=\frac{a}{2\sin A}=\frac{b}{2\sin B}=\frac{c}{2\sin C}$$

(6) 内切圆半径

$$r=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

三、反三角函数

1. 反三角函数的定义

反正弦函数	正弦函数 $y=\sin x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的反函数叫做反正弦函数，记作 $y=\arcsin x$，它的定义域是 $[-1, 1]$，值域是 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
反余弦函数	余弦函数 $y=\cos x$ 在 $[0, \pi]$ 上的反函数叫做反余弦函数，记作 $y=\arccos x$，它的定义域是 $[-1, 1]$，值域是 $[0, \pi]$
反正切函数	正切函数 $y=\operatorname{tg} x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上的反函数叫做反正切函数，记作 $y=\operatorname{arctg} x$，它的定义域是 $(-\infty, +\infty)$，值域是 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
反余切函数	余切函数 $y=\operatorname{ctg} x$ 在 $(0, \pi)$ 上的反函数叫做反余切函数，记作 $y=\operatorname{arcctg} x$，它的定义域是 $(-\infty, +\infty)$，值域是 $(0, \pi)$

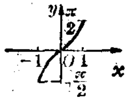
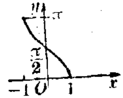
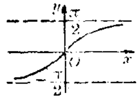
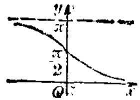
2. 反三角函数的三角恒等式

$\sin(\arcsin x)=x,\ x\in[-1, 1]$	$\arcsin(\sin y)=y,\ y\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
$\cos(\arccos x)=x,\ x\in[-1, 1]$	$\arccos(\cos y)=y,\ y\in[0, \pi]$
$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)=x,\ x\in R$	$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} y)=y,\ y\in\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x)=x,\ x\in R$	$\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} y)=y,\ y\in(0, \pi)$

$$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{arctg} x+\operatorname{arcctg} x=\frac{\pi}{2}$$

3. 反三角函数的图象和性质

反三角函数	$y=\arcsin x$	$y=\arccos x$	$y=\mathrm{arc\,tg}\,x$	$y=\mathrm{arc\,ctg}\,x$
图象				
定义域	$[-1, 1]$	$[-1, 1]$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$
值域	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	$[0, \pi]$	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$	$(0, \pi)$
最大(小)值	当 $x=1$ 时，$y_{max}=\frac{\pi}{2}$；当 $x=-1$ 时，$y_{min}=-\frac{\pi}{2}$	当 $x=-1$ 时，$y_{max}=\pi$；当 $x=1$ 时，$y_{min}=0$	无	无
奇偶性	奇函数 $\arcsin(-x)=-\arcsin x$	非奇非偶 $\arccos(-x)=\pi-\arccos x$	奇函数 $\mathrm{arc\,tg}(-x)=-\mathrm{arc\,tg}\,x$	非奇非偶 $\mathrm{arc\,ctg}(-x)=\pi-\mathrm{arc\,ctg}\,x$
单调性	增函数	减函数	增函数	减函数
多值表达式	$n\pi+(-1)^n\arcsin x$	$2n\pi\pm\arccos x$	$n\pi+\mathrm{arc\,tg}\,x$	$n\pi+\mathrm{arc\,ctg}\,x$

四、应用举例

1. 三角函数式的化简

三角函数式的化简就是将一个复杂的三角函数式变换为简单的三角函数式。

化简方法	公式法是最常用的方法。在进行三角恒等变换过程中，常用到化"切"、"割"为"弦"法，"1"的代换法、降次法等
化简三角函数式的注意事项	1. 化简后的三角函数式应当是：项数最少；所含的三角函数的种类最少，三角函数的幂次最低，尽量使分母不含三角函数；解求值的式子，要算出值来 2. 当化简的式子中含有根号时，在脱掉根号前要特别注意符号的变化 3. 利用诱导公式化简三角函数式时，一般化负角为正角，化一般角的三角函数为锐角三角函数，涉及字母，要注意讨论角所在的象限

[例 1] 化简：$\cos^4\alpha-\sin^4\alpha+2\sin^2\alpha$。

解： 原式 $=(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)+2\sin^2\alpha$

$$=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha+2\sin^2\alpha$$

$$=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1。$$

[例 2] 化简：$\cos^2 A+\cos^2(120°+A)+\cos^2(240°+A)$。

解： $\cos^2 A+\cos^2(120°+A)+\cos^2(240°+A)$

$$=\frac{1+\cos 2A}{2}+\frac{1+\cos(240°+2A)}{2}+\frac{1+\cos(480°+2A)}{2}$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}[\cos 2A+\cos(240°+2A)+\cos(480°+2A)]$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}[\cos 2A+2\cos(360°+2A)\cdot\cos 120°]$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}(\cos 2A-\cos 2A)=\frac{3}{2}。$$

［例3］ 化简：$\operatorname{tg}\alpha(\cos\alpha-\sin\alpha)+\dfrac{\sin\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha+\csc\alpha}$。

解：原式$=\dfrac{\sin\alpha(\cos\alpha-\sin\alpha)}{\cos\alpha}+\dfrac{\sin\alpha+\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\dfrac{1}{\sin\alpha}}$

$$=\frac{\sin\alpha(\cos\alpha-\sin\alpha)}{\cos\alpha}+\frac{\dfrac{\sin\alpha(\cos\alpha+1)}{\cos\alpha}}{\dfrac{\cos\alpha+1}{\sin\alpha}}$$

$$=\frac{\sin\alpha\cos\alpha-\sin^2\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}$$

$$=\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha}=\sin\alpha。$$

［例4］ 化简：$\sqrt{1+\sin\theta}-\sqrt{1-\sin\theta}$，$\theta\in(0,\pi)$。

解：原式$=\sqrt{\sin^2\dfrac{\theta}{2}+\cos^2\dfrac{\theta}{2}+2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}}$

$$-\sqrt{\sin^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}-2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}$$

$$=\sqrt{\left(\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right)^2}-\sqrt{\left(\sin\frac{\theta}{2}-\cos\frac{\theta}{2}\right)^2}$$

$$=\left|\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right|-\left|\sin\frac{\theta}{2}-\cos\frac{\theta}{2}\right|$$

$\because$ $\theta\in(0,\pi)$，$\dfrac{\theta}{2}\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$。

$$\therefore 原式=\begin{cases}\sin\dfrac{\theta}{2}+\cos\dfrac{\theta}{2}-\cos\dfrac{\theta}{2}+\sin\dfrac{\theta}{2}，当\dfrac{\theta}{2}\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right]，\\ \sin\dfrac{\theta}{2}+\cos\dfrac{\theta}{2}-\sin\dfrac{\theta}{2}+\cos\dfrac{\theta}{2}，当\dfrac{\theta}{2}\in\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)，\end{cases}$$

$$=\begin{cases}2\sin\dfrac{\theta}{2}，& 当\ \dfrac{\theta}{2}\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right]，\\ 2\cos\dfrac{\theta}{2}，& 当\ \dfrac{\theta}{2}\in\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)。\end{cases}$$