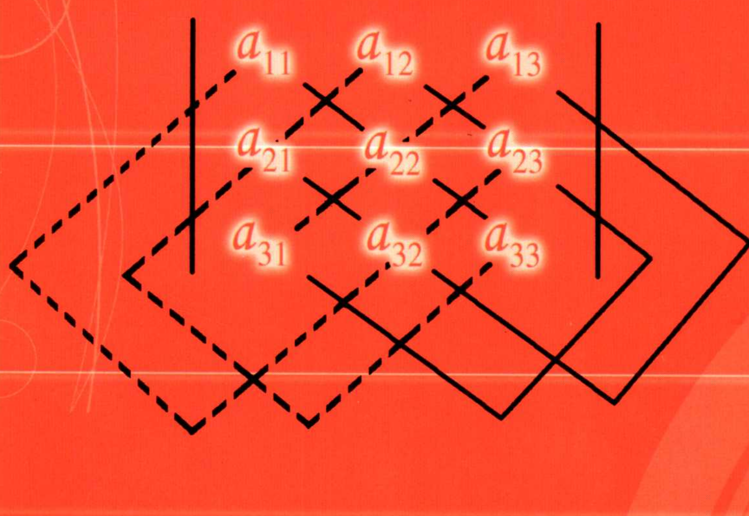
普通高校基础数学教材系列

线性代数

Xianxing Daishu

主编　刘剑平　施劲松　曹宵临



华东理工大学出版社

普通高校基础数学教材系列

线 性 代 数

主编 刘剑平 施劲松 曹宵临

华东理工大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/刘剑平等主编. 一上海:华东理工大学出版社,2003.8

ISBN 7-5628-1425-2

Ⅰ.线... Ⅱ.刘... Ⅲ.线性代数—成人教育:高等教育—教材 Ⅳ.0151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第057596号

普通高校基础数学教材系列

线 性 代 数

主编 刘剑平 施劲松 曹宵临

出版	华东理工大学出版社	**开本**	787×960 1/16
社址	上海市梅陇路130号	**印张**	15.75
邮编	200237 **电话**(021)64250306	**字数**	288千字
网址	www.hdlgpress.com.cn	**版次**	2003年9月第1版
发行	新华书店上海发行所	**印次**	2003年9月第1次
印刷	江苏句容市排印厂	**印数**	1-4050册

ISBN 7-5628-1425-2/O·87 **定价**:21.00元

内容提要

本书是根据教育部 1998 年颁布的全国成人高等教育线性代数课程教育基本要求，结合作者多年的教学经验编写而成的。内容包括矩阵、行列式、线性方程组、向量空间、特征值问题与二次型共 5 章。每章后除配有习题外，还配有自测题（附答案或提示）以测试学生对重点内容、基本方法的掌握程度。另外书后还配有各章习题的解答供学生参考和配有三套模拟考试卷（附答案或提示）用于帮助学生应试复习使用。

本书可作为成人教育本科、专升本、专科学生的线性代数教材，也可作为网络教育、函授教育、自学考试学生的线性代数教材。

前　言

线性代数是高等院校理、工科和经济学科等专业的一门主要基础课程，也是研究生入学考试的必考内容。随着计算机的日益普及，线性代数的知识作为计算技术的基础也日益受到重视，尤其是用代数方法解决实际问题已渗透到各个领域，显示出其重要性和实用性。

本书是根据教育部1998年颁布的全国成人高等教育线性代数课程教育基本要求，结合作者多年的教学经验编写而成的，可作为成人教育工科线性代数课程的教材，也可作为网络教育、函授教育、自学考试学生的线性代数教材。

工科及理科非数学专业的学生学习本课程的目的，主要在于加强基础及实际应用。考虑到成人教育的特点，我们着重讲清基本概念、原理和计算方法，避免烦琐的理论推导、证明，力求简明、准确；在内容安排上注重系统性、逻辑性，由浅入深、循序渐进。通过配以较多的例子，开阔学生思路，理解所学概念。每章后作一个小结，其中包括内容框图、基本要求、内容概要，以帮助学生认识本章的重点、难点。每章还配有自测题（附答案或提示）以测试学生重点内容、基本方法的掌握程度。另外书后还配有各章习题的解答供学生参考和配有三套模拟考试卷（附答案或提示）用于帮助学生应试复习使用。

本书由华东理工大学成人教育学院组织编写。由刘剑平、施劲松、曹宵临主编。在编写过程中，得到了华东理工大学成人教育学院领导焦家骏、张德振老师以及华东理工大学出版社的领导朱广忠、荣国斌、姚璎、张辉老师的大力支持，得到了学院领导王宗尧教授、鲁习文教授的支持和关心，在此表示衷心的感谢。同时我们还要感谢教学组的张建初教授、方民、倪中新、张新发、李红英、苏纯洁、薛以锋、曹宇烨、孙军、林爱红等老师，他们在本书的编写过程中提出过宝贵的建议。

限于编者的水平，疏漏差错仍恐难免，敬请读者多提意见，不吝赐教，以便改正并诚恳邀请您加盟修订本书。

作者的电子信箱是：liujianping60@163.com

刘剑平　施劲松　曹宵临

2003.5

目　录

1　矩阵 …………………………………………………………… (1)
　1.1　矩阵的概念 ……………………………………………… (1)
　1.2　矩阵的运算 ……………………………………………… (4)
　1.3　逆矩阵…………………………………………………… (10)
　1.4　矩阵的分块……………………………………………… (13)
　1.5　初等变换与初等矩阵…………………………………… (18)
　1.6　本章小结………………………………………………… (26)
　习题一 ……………………………………………………… (32)
　自测题一 …………………………………………………… (35)
　自测题一答案 ……………………………………………… (38)

2　行列式…………………………………………………………… (41)
　2.1　二、三阶行列式 ………………………………………… (41)
　2.2　n 阶行列式 …………………………………………… (44)
　2.3　行列式的性质…………………………………………… (46)
　2.4　行列式的计算举例……………………………………… (54)
　2.5　行列式的应用…………………………………………… (58)
　2.6　本章小结………………………………………………… (63)
　习题二 ……………………………………………………… (68)
　自测题二 …………………………………………………… (72)
　自测题二答案 ……………………………………………… (76)

3　矩阵的秩与线性方程组………………………………………… (80)
　3.1　矩阵的秩………………………………………………… (80)
　3.2　齐次线性方程组………………………………………… (84)
　3.3　非齐次线性方程组……………………………………… (87)
　3.4　本章小结………………………………………………… (93)
　习题三 ……………………………………………………… (96)
　自测题三 …………………………………………………… (99)
　自测题三答案……………………………………………… (103)

4 向量空间 ………… (107)
4.1 向量组的线性相关与线性无关 ………… (107)
4.2 向量组的秩 ………… (116)
4.3 向量空间 ………… (121)
4.4 线性方程组解的结构 ………… (124)
4.5 向量的内积 ………… (129)
4.6 本章小结 ………… (135)
习题四 ………… (138)
自测题四 ………… (142)
自测题四答案 ………… (145)

5 特征值问题与二次型 ………… (148)
5.1 方阵的特征值与特征向量 ………… (148)
5.2 相似矩阵 ………… (153)
5.3 实对称矩阵的对角化 ………… (157)
5.4 二次型及其标准形 ………… (161)
5.5 正定二次型与正定矩阵 ………… (168)
5.6 本章小结 ………… (172)
习题五 ………… (176)
自测题五 ………… (179)
自测题五答案 ………… (182)

附录 1 习题解答与提示 ………… (184)
附录 2 模拟试题 ………… (228)
附录 3 模拟试题答案 ………… (238)
参考文献 ………… (243)

1 矩 阵

矩阵是一个重要的数学工具,也是线性代数研究的主要内容之一.本章将介绍矩阵的概念及其运算,进而讨论用途极广的矩阵初等变换和初等矩阵.

1.1 矩阵的概念

1.1.1 矩阵的定义

定义 1 由 $m\times n$ 个元素排成 m 行 n 列的矩形元素表

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为 $m\times n$ **维(阶)矩阵**.常用英文大写字母 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\cdots\cdots$ 记.即

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{A}$ 中第 i 行第 j 列元素 a_{ij} 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 (i,j) 元. a_{ij} 中的 i 称作**行标**, j 称作**列标**,矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可简记作 $[a_{ij}]_{m\times n}$ 或 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$, $m\times n$ 维矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有时也记作 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$.

元素是实数的矩阵称为**实矩阵**,元素是复数的矩阵称为**复矩阵**.本书中的矩阵,除特别说明外,都指实矩阵.

1.1.2 若干特殊矩阵

行数与列数都等于 n 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为 n **阶矩阵**或 n **阶方阵**

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

我们称 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ 为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的**主对角元**，它们所在的对角线称为**主对角线**.

称主对角线以上全为零的方阵 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ 为**下三角矩阵**. 称主对角线以下全为零的方阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ 为**上三角矩阵**.

既是上三角阵又是下三角阵的方阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$ 称为**对角矩阵**. 对角矩阵也记作 $\boldsymbol{A}=\mathrm{diag}[\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n]$.

称主对角元相同的对角阵 $\begin{bmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{bmatrix}$ 为**数量阵**（或**标量阵**）. 特别地，当 $a=1$ 时，称 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$ 为**单位矩阵**，用 $\boldsymbol{I}$ 或 $\boldsymbol{E}$ 记.

只有一行的矩阵 $\boldsymbol{A}=[a_1\ a_2 \cdots\ a_n]$ 称为**行矩阵**，又称为 n **维行向量**. 为避免元素间的混淆，行矩阵也记作 $\boldsymbol{A}=[a_1,a_2,\cdots,a_n]$.

只有一列的矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ 称为**列矩阵**，又称为 m **维列向量**.

元素都是零的矩阵称为**零矩阵**，记作 $\boldsymbol{O}$. 注意不同维的零矩阵是不相等的.

1.1.3 矩阵的应用举例

例 1 某 IT 集团公司向两个代理商发送三种电脑的数量(单位:套)如下表所示:

代理商 \ 商品名	WorkPad	Tablet PC	NC
甲	a_{11}	a_{12}	a_{13}
乙	a_{21}	a_{22}	a_{23}

表格中的数据可列成矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

其中 a_{ij} 为该公司向第 i 个代理商发送第 j 种电脑的数量.

这三种电脑的单价及单件重量也可以列成矩阵

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$$

其中 b_{i1} 为第 i 种电脑的单价,b_{i2} 为第 i 种电脑的单件重量($i=1,2,3$).

例 2 线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \quad\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

的系数可以表示成一个 $m\times n$ 维矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为线性方程组的**系数矩阵**.

线性方程组的系数与常数项合并在一起,可以表示成一个 $m\times(n+1)$ 维矩阵

$$\overline{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

称为线性方程组的**增广矩阵**. 方程组中未知量及常数项,可以表示成 $n\times1$ 维和 $m\times1$ 维矩阵

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{和 } \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

1.2 矩阵的运算

在研究矩阵的运算之前,我们先给出矩阵相等的定义.

定义 1 给定两个同维 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$和 $\boldsymbol{B}=[b_{ij}]$,当

$$a_{ij}=b_{ij} \quad (i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n)$$

时,称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ **相等**,记作 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

1.2.1 矩阵的线性运算

数与矩阵相乘

定义 2 **数 λ 与矩阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times n}$ 的乘积**记作 $\lambda\boldsymbol{A}$ 或 $\boldsymbol{A}\lambda$,规定为

$$\lambda\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\lambda=[\lambda a_{ij}]_{m\times n}$$

即数 λ 乘以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中的每一个元素所得到的矩阵. 显然有

$$0\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O};\quad 1\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$$

数乘矩阵满足下列运算规律(设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵,λ、μ 为数):

(1) $(\lambda\mu)\boldsymbol{A}=\lambda(\mu\boldsymbol{A})$;

(2) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{A}+\mu\boldsymbol{A}$.

矩阵的加法

定义 3 设有两个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$,$\boldsymbol{B}=[b_{ij}]$,那么矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和记作 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$,规定为

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=[a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n}$$

即对应元素相加而成的同维矩阵.

矩阵加法满足下列运算规律(设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 都是 $m\times n$ 矩阵,λ 为数):

(1) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$;

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$;

(3) $\lambda(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\lambda\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B}$.

由加法和数乘运算,可以定义**矩阵的减法**为

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-1)\boldsymbol{B}=[a_{ij}-b_{ij}]_{m\times n}$$

即对应元素相减而成的同维矩阵.

矩阵的加法与数乘运算结合起来,统称为矩阵的线性运算.

例 1　设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{bmatrix}$,矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2 & 0 & -1\\ 3 & 1 & 2\end{bmatrix}$,试求 $2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{B}$.

解
$$2\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2\times1 & 2\times2 & 2\times3\\ 2\times4 & 2\times5 & 2\times6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 4 & 6\\ 8 & 10 & 12\end{bmatrix}$$

$$3\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}3\times2 & 3\times0 & 3\times(-1)\\ 3\times3 & 3\times1 & 3\times2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 0 & -3\\ 9 & 3 & 6\end{bmatrix}$$

$$2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2-6 & 4-0 & 6-(-3)\\ 8-9 & 10-3 & 12-6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & 4 & 9\\ -1 & 7 & 6\end{bmatrix}$$

例 2　求解矩阵方程 $2\boldsymbol{X}-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$,其中 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -2 & 4\\ 0 & 3\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 5 & -4\\ 6 & 5\end{bmatrix}$.

解　由 $2\boldsymbol{X}-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$,移项得

$$\boldsymbol{X}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1+1 & 0+(-2)\\ -2+5 & 4+(-4)\\ 0+6 & 3+5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ \frac{3}{2} & 0\\ 3 & 4\end{bmatrix}$$

1.2.2　矩阵的乘法运算

在上一节的例 1 中,容易看出,$a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32}$ 即为集团公司向代理商乙所发送三种电脑的总重量,而 $a_{i1}b_{11}+a_{i2}b_{21}+a_{i3}b_{31}$ 即为集团公司向第 i 个代理商($i=1,2$)所发送电脑的总价值. 于是,可以得到向两个代理商所发送电脑的总价值与总重量矩阵:

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32}\\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32}\end{bmatrix}$$

考察完这个例子后,我们可以给出两矩阵相乘的定义.

定义 4 设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$ 是一个 $m\times s$ 矩阵，$\boldsymbol{B}=[b_{ij}]$ 是一个 $s\times n$ 矩阵，那么规定矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的乘积是一个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{C}=[c_{ij}]$，记为 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$. 其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}$$
$$(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$$

由定义可知，一个 $1\times s$ 行矩阵与一个 $s\times 1$ 列矩阵的乘积是一个 1 阶方阵，也就是一个数，即

$$[a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{is}]\begin{bmatrix}b_{1j}\\b_{2j}\\\vdots\\b_{sj}\end{bmatrix}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}=c_{ij}$$

由此表明乘积矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的 (i,j) 元 c_{ij} 就是 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行与 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列的乘积（即对应位置元素乘积的和）.

必须注意矩阵可以相乘的条件为第一个矩阵的列数等于第二个矩阵的行数.

例 3 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}4&0&-3\\-1&-2&3\end{bmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2\\-1\\3\end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$.

解 因为 $\boldsymbol{A}$ 是 2×3 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 3×1 矩阵，所以 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可以相乘，其乘积 $\boldsymbol{AB}$ 是一个 2×1 矩阵，即

$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}4&0&-3\\-1&-2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\-1\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\times 2+0\times(-1)+(-3)\times 3\\(-1)\times 2+(-2)\times(-1)+3\times 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\9\end{bmatrix}$$

因为 $\boldsymbol{B}$ 的列数不等于 $\boldsymbol{A}$ 的行数，故而 $\boldsymbol{BA}$ 没有意义.

例 4 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&0\\1&0\\0&1\end{bmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$.

解 由乘法定义可知

$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}2&0\\1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&2&0\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{BA}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0\\1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\2&0\end{bmatrix}$$

例 5 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1\\-1 & -1\end{bmatrix}$与 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix}$的乘积 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$.

解 由乘法定义可知

$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}1 & 1\\-1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{BA}=\begin{bmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\-1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 2\\-2 & -2\end{bmatrix}$$

由例 3 知道,$\boldsymbol{AB}$ 有意义而 $\boldsymbol{BA}$ 没意义;由例 4 知道,$\boldsymbol{AB}$、$\boldsymbol{BA}$ 都有意义而不同阶;由例 5 知道,$\boldsymbol{AB}$、$\boldsymbol{BA}$ 都有意义且同阶,但不相等. 总之,矩阵乘法不满足交换律,即在一般情况下,$\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$. 所以我们称 $\boldsymbol{AB}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 左乘 $\boldsymbol{B}$,而称 $\boldsymbol{BA}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 右乘 $\boldsymbol{B}$. 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$,则称**矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 可交换**.

例 5 还表明,矩阵 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O},\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$,但却有 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$,它说明矩阵乘法不满足消去律,即在一般情况下,由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 不能得出 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$ 的结论;同理,若 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$ 而 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$,也不能得出 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$ 的结论.

例 6 试求所有与矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\1 & 0 & 0\end{bmatrix}$可交换的矩阵.

解 设 $\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}c_{11} & c_{12} & c_{13}\\c_{21} & c_{22} & c_{23}\\c_{31} & c_{32} & c_{33}\end{bmatrix}$,由 $\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{CA}$,即

$$\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_{11} & c_{12} & c_{13}\\c_{21} & c_{22} & c_{23}\\c_{31} & c_{32} & c_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_{11} & c_{12} & c_{13}\\c_{21} & c_{22} & c_{23}\\c_{31} & c_{32} & c_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

得

$$\begin{bmatrix}c_{21} & c_{22} & c_{23}\\c_{31} & c_{32} & c_{33}\\c_{11} & c_{12} & c_{13}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_{13} & c_{11} & c_{12}\\c_{23} & c_{21} & c_{22}\\c_{33} & c_{31} & c_{32}\end{bmatrix}$$

由矩阵相等的定义,即有 $c_{21}=c_{13}=c_{32}$,$c_{11}=c_{22}=c_{33}$,$c_{23}=c_{12}=c_{31}$,故与 $\boldsymbol{A}$ 可交换的全体矩阵为

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}a & b & c\\c & a & b\\b & c & a\end{bmatrix},(a,b,c\text{ 是任意常数})$$

矩阵乘法满足下列的运算规律(假设运算都是可行的):

(1) $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$;

(2) $\lambda(\boldsymbol{AB})=(\lambda\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{B})$,(其中 λ 为常数);

(3) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$, $(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{CA}$;

(4) $\boldsymbol{I}_m\boldsymbol{A}_{m\times n}=\boldsymbol{A}_{m\times n}=\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{I}_n$.

这里仅对 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$ 给出证明.

证 设 $\boldsymbol{A}_{m\times s}=[a_{ij}]$,$\boldsymbol{B}_{s\times n}=[b_{ij}]$,$\boldsymbol{C}_{s\times n}=[c_{ij}]$,则可设 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{M}=[m_{ij}]_{m\times n}$,以及 $\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{N}=[n_{ij}]_{m\times n}$.则按矩阵乘法的定义,恰有

$$m_{ij}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}(b_{kj}+c_{kj})=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}+\sum_{k=1}^{s}a_{ik}c_{kj}=n_{ij}$$

故 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$.

例 7 试证两个下三角矩阵的乘积仍为下三角矩阵.

证 设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$,$\boldsymbol{B}=[b_{ij}]$是两个 n 阶下三角矩阵,即满足 $i<j$ 时 $a_{ij}=b_{ij}=0$.设 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}=[c_{ij}]$,则

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}=\sum_{k=1}^{j-1}a_{ik}b_{kj}+\sum_{k=j}^{n}a_{ik}b_{kj}$$

在 $i<j$ 时,右端第一个和式中的 $b_{kj}=0$,第二个和式中的 $a_{ik}=0$,从而 $c_{ij}=0$,由此得证 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$ 为下三角矩阵.

有了矩阵的乘法,就可以定义矩阵的幂.设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵,k 为正整数,定义 $\boldsymbol{A}^k$ 为 k 个 $\boldsymbol{A}$ 连乘,即

$$\boldsymbol{A}^k=\underbrace{\boldsymbol{AA}\cdots\boldsymbol{A}}_{k\text{个}}$$

矩阵的幂运算满足以下运算规律($\boldsymbol{A}$ 为方阵,k、l 为正整数):

(1) $\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{A}^l=\boldsymbol{A}^{k+l}$; (2) $(\boldsymbol{A}^k)^l=\boldsymbol{A}^{kl}$.

注 由于矩阵乘法不满足交换律,故对于两个 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$,一般而言,不成立$(\boldsymbol{AB})^k=\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}^k$.

例 8 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1&0\\-3&-2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$,$n$ 是正整数,求 $\boldsymbol{A}^n$.

解 $\boldsymbol{A}^2=\begin{bmatrix}2&1&0\\-3&-2&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1&0\\-3&-2&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\boldsymbol{I}$,所以,有

$$\boldsymbol{A}^n=\begin{cases}(\boldsymbol{A}^2)^{\frac{n}{2}}=\boldsymbol{I}^{\frac{n}{2}}=\boldsymbol{I} & n\text{ 为偶数}\\ \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^2)^{\frac{n-1}{2}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{I}^{\frac{n-1}{2}}=\boldsymbol{AI}=\boldsymbol{A} & n\text{ 为奇数}\end{cases}$$

例 9 计算$(\boldsymbol{AB})^2,\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}^2$，其中$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&2\\-3&4\end{bmatrix}$.

解 由$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\-3&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\-2&6\end{bmatrix}$，得

$$(\boldsymbol{AB})^2=\begin{bmatrix}1&2\\-2&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\-2&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3&14\\-14&32\end{bmatrix}$$

而由$\boldsymbol{A}^2=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}$，及$\boldsymbol{B}^2=\begin{bmatrix}1&2\\-3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\-3&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5&10\\-15&10\end{bmatrix}$，知

$$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}^2=\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-5&10\\-15&10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5&10\\-25&30\end{bmatrix}$$

显然，$(\boldsymbol{AB})^2\neq\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}^2$.

1.2.3 矩阵的转置

定义 5 将矩阵$\boldsymbol{A}$的行换成同序数的列而得到的一个新矩阵，称为$\boldsymbol{A}$的转置矩阵，记作$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$或$\boldsymbol{A}'$. 即若

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}，\text{则 }\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{21}&\cdots&a_{m1}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{m2}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{1n}&a_{2n}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}$$

矩阵的转置满足下述运算规律（假设运算都是可行的）：

(1) $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$；

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$；

(3) $(\lambda\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=\lambda\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，$\lambda$是一个实数；

(4) $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

我们仅对(4)给出证明.

证 设$\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times s},\boldsymbol{B}=[b_{ij}]_{s\times n}$，于是$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}$的$(i,j)$元素为$\boldsymbol{AB}$的$(j,i)$元素，等于$\boldsymbol{A}$的第$j$行乘$\boldsymbol{B}$的第$i$列，等于$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$的第$i$行乘$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$的第$j$列，即$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$的$(i,j)$元素，故

$$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$$

例 10 设$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0\\-1&2\\2&3\end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&-1\\4&7\end{bmatrix}$，求$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}$.

解法 1 因为 $\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}1&0\\-1&2\\2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\\4&7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1\\7&15\\14&19\end{bmatrix}$，所以

$$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1&7&14\\-1&15&19\end{bmatrix}$$

解法 2

$$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1&4\\-1&7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&2\\0&2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&7&14\\-1&15&19\end{bmatrix}$$

由矩阵转置的概念可以得到以下两个特殊矩阵：

如果 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，即 $a_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 时，称 $\boldsymbol{A}$ 为**对称矩阵**.

如果 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$，即 $a_{ij}=-a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 时，称 $\boldsymbol{A}$ 为**反对称矩阵**. 显然反对称矩阵的主对角元均为零.

例 11 试证明任一方阵均可以表示成一个对称矩阵与一个反对称矩阵的和的形式.

证 显然 $\boldsymbol{A}$ 可表示成两个矩阵之和

$$\boldsymbol{A}=\frac{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}}{2}+\frac{\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}}{2}$$

而 $\left(\dfrac{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}}{2}\right)^{\mathrm{T}}=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$，即 $\dfrac{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}}{2}$ 为对称阵；

$$\left(\frac{\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}}{2}\right)^{\mathrm{T}}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{A})=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$$

即 $\dfrac{\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}}{2}$ 为反对称阵.

1.3 逆矩阵

1.3.1 逆矩阵的概念

设给定一个从 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 到 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 的**线性变换**

$$\begin{cases}y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\\y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\\\cdots\cdots\\y_n=a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n\end{cases}\tag{1.3.1}$$

简写成