中学生数学竞赛丛书　　　　常庚哲 主编

国际数学奥林匹克（IMO）三十年

GUOJISHUXUEAOLINPIKE SANSHINIAN

1959—1988 试题集解

胡炳生　王忠汉　胡礼祥
杨翠莲　童品苗　徐克绍

中国展望出版社

国际数学奥林匹克三十年

（1959——1988）

试题集解

胡炳生　王忠汉　胡礼祥
杨翠莲　童品苗　徐克绍

中国展望出版社

国际数学奥林匹克三十年（1959—1988）
试 题 集 解
胡炳生 王忠汉 胡礼祥
杨翠莲 童品苗 徐克绍
*
中国广播电视出版社 出版
（北京西城区太平桥大街4号）
安徽省芜湖市新华印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行

开本：787×1092毫米 1/32 印张：9.75 字数：226,000
1989年8月北京第1版 1989年8月第1次印刷
印数：1—16,000

ISBN7—5050—0396—8/G·57 定价：3.40元

序　言

1988年7月，我与复旦大学舒五昌副教授，率领6名中学生，参加了在澳大利亚首都——堪培拉举行的29届国际数学奥林匹克（IMO）。我国同学为国争光，在参赛的49个国家和地区中，总分名列第二，仅次于苏联队，其中何宏宇、陈晞两位同学以优异成绩争得金牌，其余4位同学获得银牌。回忆起在堪培拉的日日夜夜里，既有紧张的竞争，智力的角逐；在各国的领队之间，在选手之间，又充满着友谊、诚实、公正的气氛。这一切使我深信，数学竞赛，作为发现人才，培育人才的一种特殊方式，一定会持续地进行下去，越来越兴旺发达。

在我国，早在五十年代，在老一辈数学家华罗庚教授等人的发起和领导下，数学竞赛在我国的一些主要城市进行过多次，收到了可喜的成效。经过十多年的沉寂之后，1978年开始，数学竞赛又在我国重新举行，并且规模越来越大，逐渐形成全国性的“联赛”，至今已有十年了。现在，每年数以十万计的中学生参加的初、高中全国数学联赛，不仅成了广大中学生学习活动中的一个重大事件，而且也牵动着众多的教师和家长的心。

1986年，我国第一次派出“满队”参加第27届“IMO”以来，连续三年，我国中学生队都名列前茅，取得了令人瞩目的好成绩。究其原因，我想大致有以下两点：1.我国中学生有较

为扎实的基础知识和较熟练的运算技能，这是我国广大中学数学教师辛勤劳动的结果；2.从1986年初开始，在前一年全国高中联赛基础上，举办数学冬令营，选拔国家集训队，再经过短期培训和严格考试，组成国家代表队。严格的选拔和训练，是我国选手取胜的关键。这一点，已越来越被人们所接受了。

1990年，将在我国举行第31届IMO。这极大地鼓舞着我国广大中学数学教师和中学生。数学奥林匹克学校正在各地兴起，各省市已经着手准备，以便为国家输送本地区的优秀选手，为祖国争取更大的荣誉。可以预见，在近几年内，数学竞赛的培训热潮，将会一浪高过一浪。

数学竞赛所涉及的内容，虽不包括高等数学，但是其中已有高等数学中某些常见的思想方法；它又不全同于中学数学教材中的内容，而包含着更广泛的专门知识，需要更为灵活的思维和技巧。近年来，国外有人提出“竞赛数学”这一名词，正是强调着它的特殊性。

为了学好数学，为了在数学竞赛中一显身手，我们的中学生迫切需要丰富的课外读物，中学数学教师在数学竞赛的组织和辅导工作中，也需要有详尽的参考资料。由中国展望出版社出版的《中学生数学竞赛丛书》，就是为了适应上述需要而编写的。丛书由下列四本书组成：1.国际数学奥林匹克三十年（1959——1988）试题集解；2.初中数学竞赛十年（1978——1988）试题集解；3.高中数学竞赛十年（1978——1988）试题集解；4.数学解题研究和发现。

这些书籍复盖着不同层次的数学竞赛，即从初中到高中，再到被公认为最高水平的国际数学奥林匹克，能够满足各种不同程度和水准的学生的要求，前三本书搜集到了直至最近一年的资料，体现了直到目前为止最好的完备性。第四本书则着重

研究数学竞赛解题方法的特性和共性，是一本居高临下来谈解题方法和技巧的书籍。我相信，这些书籍对广大中学生和数学教师将有很大的帮助。

这套丛书的主要组织者和撰稿人，安徽师范大学胡炳生、胡礼祥副教授，多年来在从事高等数学教育的同时，一直担任中学数学杂志编辑，热心于数学竞赛的组织和辅导工作，是数学竞赛和数学普及工作方面的活动分子和知名人士，这就保证了这套丛书的质量。借此机会向读者推荐这一套丛书，是我十分乐于承担的义务。

中国科技大学　常庚哲

1988年11月

目　录

第一届（1959. 罗马尼亚）

1. 证明：对任何自然数 n，分式 $\frac{21n+4}{14n+3}$ 不可约简，

（波兰）

【证一】 我们将指出，如果 $g>0$ 是所给分式的分子和分母的公因式，则 $g=1$。置

$$21n+4=gA,\ 14n+3=gB.$$

则 $$g(3B-2A)=3gB-2gA=(42n+9)-(42n+8)=1$$

第一个表达式可被 g 整除，则 g 是 1 的除数。因此 $g=1$，因而分式不可约简。

【证二】 $\because 3(14n+3)-2(21n+4)=1$

$\therefore 14n+3$ 与 $21n+4$ 的最大公约数为 1。故分式不可约。

2. x 取什么实数值时，有等式

$$\sqrt{(x+\sqrt{2x-1})}+\sqrt{(x-\sqrt{2x-1})}=A \quad ?$$

已知，$(a) A=\sqrt{2}$，$(b) A=1$，$(c) A=2$。其中平方根仅取非负实数。（罗马尼亚）

【解一】. 因 $\sqrt{2x-1}$ 假定是实的，我们必须有 $x\geqslant 1/2$。

$$\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}|\sqrt{2x-1}+1|$$

$$\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left|\sqrt{2x-1}-1\right|$$

这通常是从两边平方相等和所有根式都为非负实数推得。

现我们考虑函数

$$y=\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}(\left|\sqrt{2x-1}+1\right|+\left|\sqrt{2x-1}-1\right|,\quad x\geqslant\frac{1}{2}$$

由于 $\left|\sqrt{2x-1}-1\right|=1-\sqrt{2x-1}$，$1/2\leqslant x\leqslant 1$，

$\left|\sqrt{2x-1}-1\right|=\sqrt{2x-1}-1$。 $1\leqslant x\leqslant+\infty$

我们分别考虑：

对于$1/2\leqslant x\leqslant 1$，有

$$y=\frac{1}{\sqrt{2}}[(\sqrt{2x-1}+1)+(1-\sqrt{2x-1})]=$$

$$\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

对于$1\leqslant x<+\infty$，有

$$y=\frac{1}{\sqrt{2}}[(\sqrt{2x-1}+1)+(\sqrt{2x-1}-1)]$$

$$=\sqrt{2}\sqrt{2x-1}$$

综合上述结果，我们得到

$$y=\begin{cases}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1\\ \sqrt{2}\sqrt{2x-1}, & 1\leqslant x<+\infty\end{cases}$$

因此，对本题的结果是

(a)。 $A=\sqrt{2}$，对$\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$等式成立；

(b)。 $A=1$，无x使等式成立，因函数y的最小值是$\sqrt{2}$；

(c). $A=2$，得$\sqrt{2}\sqrt{2x-1}=2$，$1\leqslant x<+\infty$。即$x=3/2$时等式成立。

【解二】. 我们对

$$\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}=A, \quad x\geqslant 1/2$$

两边平方，得 $2x+2\sqrt{x^2-(2x-1)}=A^2$，　$x\geqslant 1/2$　(1)

因$x^2-(2x-1)=(x-1)^2$，我们可把(1)写成等价形式

$$x+|x-1|=A^2/2, \quad x\geqslant 1/2 \tag{1'}$$

(a). 假设$A=\sqrt{2}$，则$A^2/2=1$，得

$$x+|x-1|=1, \quad x\geqslant 1/2. \tag{2}$$

对$1/2\leqslant x\leqslant 1$，$x-1\leqslant 0$，得$|x-1|=1-x$，方程(2)变成恒等式

$$x+1-x=1, \quad 1/2\leqslant x\leqslant 1.$$

对$x>1$，则$x-1>0$，得$|x-1|=x-1$，方程(2)变成

$$x+x-1=1，即2x-1=1，x>1,$$

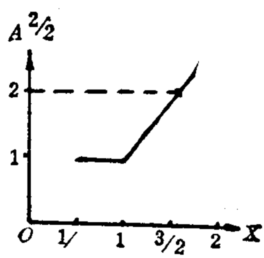
这方程无解。因此，我们得到$A=\sqrt{2}$当且仅当$1/2\leqslant x\leqslant 1$时。

当$x>1$时，有$x+|x-1|=2x-1$。

(b)如果$A=1$，则$2x-1=A^2/2=1/2$及$x>1$，因此无解。

(c)如果$A=2$，则$2x-1=A^2/2=2$及$x>1$，得$x=3/2$。

若将(1′)看作函数x和$|x-1|$之和，注意到对$1/2\leqslant x\leqslant 1$这和为常值1，对$x>1$，它是线性函数$2x-1$(图1—1)。情况(a)，(b)和(c)对应于函数值1，1/2和2的解，这可从图中看出。



(图 1-1)

3. 设实数x是一个角，a、b、c是任意实数。实数$\cos x$满足二次方程$a\cdot\cos^2x+b\cdot\cos x+c=0$。

求作一个使cos2x能够满足的二次方程。在$a=4$、$b=2$和$c=-1$时，比较一下这两个方程。（匈牙利）

【解一】．我们把二次方程$a\cdot\cos^2x+b\cdot\cos x+c=0$写成

$$a\cdot\cos^2x+c=-b\cdot\cos x。$$

两边平方乘以4，整理后得

$$a^2\cdot4\cos^4x+(4ac-2b^2)\cdot2\cos^2x+4c^2=0$$

由三角恒等式　$2\cos^2x=\cos2x+1$，代入得

$$a^2(\cos2x+1)^2+(4ac-2b^2)(\cos2x+1)+4c^2=0$$

整理后，得　$a^2\cos^22x+(2a^2+4ac-2b^2)\cos2x+$

$$+(a^2+4ac-2b^2+4c^2)=0 \tag{1}$$

显然，这是一个关于cos2x的二次方程，正是我们所要求的。

在$a=4$、$b=2$和$c=-1$时，有

$$a^2=16,\qquad 2a^2+4ac-2b^2=8,$$

$$a^2+4ac-2b^2+4c^2=-4。$$

因此，关于cos2x的方程是

$$4\cos^22x+2\cos2x-1=0, \tag{2}$$

关于cosx的方程是　$4\cos^2x+2\cos x-1=0$。　（3）

这两个方程具有相同的系数。

【解二】在已知方程$a\cos^2x+b\cos x+c=0$中，我们代入

$$\cos x=\pm\sqrt{\frac{1+\cos2x}{2}},$$

得　$$a\left(\frac{1+\cos2x}{2}\right)\pm b\sqrt{\frac{1+\cos2x}{2}}+c=0。$$

化简，即得（1）。以下同解法一。

这时，已知方程的解为$\cos x=(-1\pm\sqrt{5})/4$，即有

$x_1 = k \cdot 360° \pm 72°$， $x_2 = k \cdot 360° \pm 144°$（$k$ 为整数）。

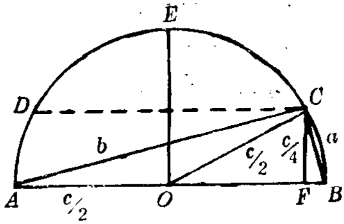
$2x_1 = 2k \cdot 360° \pm 144°$， $2x_2 = 2k \cdot 360° \pm 288°$，

$\cos 2x_1 = (-\sqrt{5}-1)/4$， $\cos 2x_2 = (\sqrt{5}-1)/4$

显然满足作出的新方程。

4. 求作一个直角三角形，已知斜边长为 c，其斜边上的中线长是两条直角边长的几何中项。（匈牙利）

【解一】 分析（图1-2）：设半圆的直径 AB 已知，凡内接于此半圆的三角形 ACB 中 C 是直角，中线 CO 长是 $c/2$。我们的任务是作出点 C 使 CO 是 $a=CB$ 和 $b=AC$ 的几何平均值，即



（图 1-2）

$$\frac{a}{c/2} = \frac{c/2}{b} \quad 或 \quad 4ab = c^2.$$

我们通过确定从要求的三角形的顶点 C 的高 h 来完成。从 $\triangle ACB$ 的面积是 $ab/2$ 和 $ch/2$，得 $ab=ch$。于是

$ch = ab = c^2/4$，得 $h = c/4$。

作法：

Ⅰ. 以点 O 为圆心，$r = \dfrac{c}{2}$ 为半径画圆；

Ⅱ. 任作一直径，交圆于点 A 和 B；

Ⅲ. 距线段 AB 为 $c/4$ 处作一平行于线段 AB 的直线，交圆于 D 和 C；

Ⅳ. 连接 A 和 C、B 和 C，则 $\triangle ACB$ 就是所求的三角形。

证明：

过C作线段AB是垂线CF，连接O和C。由作法知$\angle ACB=90°$，得$\triangle ACB$是一直角三角形。因$AB=c$，$OC=c/2$，$CF=c/4$，得

$$AC\cdot CB=AB\cdot CF=c\cdot\frac{c}{4}=\frac{c}{2}\cdot\frac{c}{2}=OC^2.$$

【解二】 从解法一的分析知，确定顶点C的高h与确定$\angle COB=\theta$等价。因此，利用边角关系，几何问题可用三角与代数方法来解决。

设$\angle COB=\theta$，$AC=b$，$BC=a$，$AB=c$。（图1—2）我们在$\triangle COB$和$\triangle AOC$应用余弦定理，得

$$a^2=\frac{c^2}{4}+\frac{c^2}{4}-2\cdot\frac{c^2}{4}\cos\theta=c^2\left(\frac{1-\cos\theta}{2}\right)$$

$$b^2=\frac{c^2}{4}+\frac{c^2}{4}-2\cdot\frac{c^2}{4}\cos(\pi-\theta)=c^2\left(\frac{1+\cos\theta}{2}\right)$$

因此 $a^2b^2=c^4\dfrac{1-\cos^2\theta}{4}=\dfrac{c^4}{4}\sin^2\theta$，得 $ab=\dfrac{c^2}{2}\sin\theta$。

但问题的条件是$ab=c^2/4$。所以$\sin\theta=1/2$，$\theta=\pi/6$或$\theta=5\pi/6$。

5. 设在线段AB上有一点M，并在线段AB的同一侧以线段AM，MB为一边分别作正方形$AMCD$和$MBEF$。这两个正方形的外接圆（分别以P、Q为圆心）除点M外还交于点N。

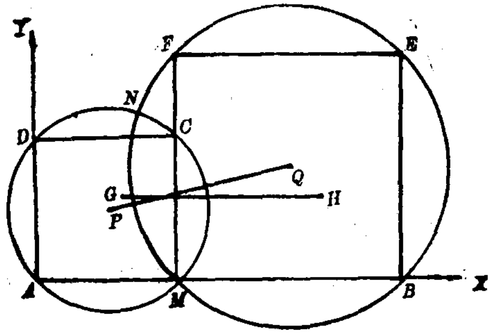
(a)求证：AF、BC通过N点；

(b)证明：直线MN总是通过一个与点M的位置无关的定点；

(c)当M在A，B之间变动时，求线段PQ中点的轨迹。

（罗马尼亚）

【解一】. 用解析几何方法。取坐标系如（图1-3）所示，使点A，B和M各有坐标$A(0,0)$，$B(a,0)$和$M(m,0)$。



（图 1-3）

则点P、Q的坐标分别为$P\left(\frac{m}{2}, \frac{m}{2}\right)$和 $Q\left(\frac{a+m}{2}, \frac{a-m}{2}\right)$.

(a)**证明**：正方形 $AMCD$ 和 $MBEF$ 的外接圆方程分别是

$$\left(x-\frac{m}{2}\right)^2+\left(y-\frac{m}{2}\right)^2=\frac{m^2}{2},$$

$$\left(x-\frac{a+m}{2}\right)^2+\left(y-\frac{a-m}{2}\right)^2=\frac{1}{2}(a-m)^2,$$

即 $$x^2+y^2-mx-my=0, \quad (1)$$

$$x^2+y^2-(a+m)x-(a-m)y+am=0. \quad (2)$$

将(1)-(2)，得 $$ax+(a-2m)y-am=0. \quad (3)$$

由(3)得$x=m-\left(1-\frac{2m}{a}\right)y$，代入(1)，并乘以$a^2$整理后得

$$(2a^2-4am+4m^2)y^2-2am(a-m)y=0,$$

解之，得 $$y_1=0, \quad (4)$$

$$y_2=\frac{am(a-m)}{a^2-2am+2m^2}, \quad (5)$$

将(4)代入(3)，得 $x_1=m$.

将(5)代入(3)，得 $$x_2=\frac{am^2}{a^2-2am+2m^2}.$$

因此，点 M 的坐标为 $(x_1,\ y_1)$。点 N 的坐标为 $(x_2,\ y_2)$。显然，点 N 的坐标满足过点 $A(0,\ 0)$，$F(m,\ (a-m))$ 的直线方程

$$(a-m)x-my=0.$$

过点 $B(a,\ o)$，$C(m,\ m)$ 的直线方程是

$$mx+(a-m)y-am=0.$$

点 N 的坐标也满足此直线方程。因此直线 AF 与直线 BC 均通过点 N。

(b)**证明** 因为直线方程(3)被点 M 和 N 满足，所以它描述了过点 M 和 N 的直线。现我们把它改写成

$$a(x+y)=m(2y+a).$$

显然，当 $(x+y)=(2y+a)=0$ 时，得满足(3)的点 $(x,\ y)=\left(\frac{a}{2},\ -\frac{a}{2}\right)$ 与 m 无关，因此这个点 $S\left(\frac{a}{2},\ -\frac{a}{2}\right)$ 是所有直线 MN 共有的。

(c)**解**。因点 $P\left(\frac{m}{2},\ \frac{m}{2}\right)$，点 $Q\left(\frac{a+m}{2},\ \frac{a-m}{2}\right)$，则线段 PQ 中点的坐标 $(x,\ y)$ 为

$$x=\frac{1}{2}\left(\frac{m}{2}+\frac{a+m}{2}\right)=\frac{a+2m}{4},$$

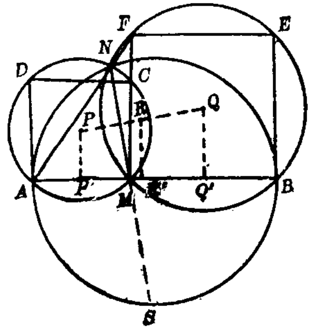
$$y=\frac{1}{2}\left(\frac{m}{2}+\frac{a-m}{2}\right)=\frac{a}{4}.$$

因此，当点 M 在点 A 和 B 之间变动时，即 m 遍历区间 $0<m<a$，线段 PQ 的中点遍历线段 GH，其中

$G\left(\frac{a}{4},\ \frac{a}{4}\right)$，$H\left(\frac{3}{4}a,\ \frac{a}{4}\right)$，线段 GH 平行于线段 AB，距线段 AB 为 $\frac{a}{4}$，长为 $\frac{a}{2}$。

【解二】 考虑（图1-4）

(*a*)**证明** 连线段AN，NF，BC和CN，则$\angle ANM=45°$和$\angle MNF=135°$。所以$\angle ANF=\angle ANM+\angle MNF=45°+135°=180°$，得$N$位于线段$AF$。因线段$AC$是直径，$\angle ANC=90°$；$\angle ANB=\angle ANM+\angle MNB=45°+45°=90°$。因此$C$位于线段$BN$上，即线段$AF$和$BC$交于$N$。



（图 1-4）

(*b*)**证明** 因$\angle ANM=\angle MNB=45°$，直线$NM$平分$\angle ANB$。所以，线段$NM$延长时，平分直径为$AB$的下半圆周。用$S$表示这半圆周的中点。因对线段$AB$上每一点$M$有$AN\perp BN$，当$M$从$A$变动到$B$时$N$画出直径为$AB$的上半圆周，而$S$总是下半圆周的中点。这就指出$S$不依赖于$M$的选择。

(*c*)**解** 设PP'，QQ'和RR'分别是P，Q和线段PQ的中点R到AB的垂线。因RR'是梯形$P'Q'QP$的中线，

$$RR'=\frac{1}{2}(PP'+QQ')=\frac{1}{2}\frac{AM+MB}{2}=\frac{AB}{4}.$$

这就指出从R到AB的距离是常值。当$M=A$时，我们有$P'=A$和$AQ'=AB/2$，得$AR'=AB/4$。当$M=B$时，我们有$Q'=B$和$P'B=AB/2$，得$R'B=AB/4$。于是R的轨迹是长为$AB/2$的直线段，平行于线段AB且在其之上距离为$AB/4$处。

6. 已知两个平面P，Q相交于直线g，在平面P上有一点A，在平面Q上有一点C，点A，C都不在g上。求作一个能有内切圆的等腰梯形$ABCD$（其中$AB\,/\!/\,CD$），使得B在平面P上而D在平面Q上。 （捷克斯洛伐克）