肖筱南 编著

经济应用数学释疑

微积分部份

广东教育出版社

经济应用数学释疑

（微积分部分）

肖筱南　编著
葛振三　主审

广东教育出版社
一九八九年·广州

内 容 提 要

本书按照财经专业经济数学教学大纲的要求，针对学生在学习经济数学时容易混淆的基本概念、基本理论与方法以及求解经济应用问题时常易产生的错误，用释疑的方式系统地，深入浅出地对经济应用数学（微积分部分）中的重点、难点、疑点及各类经济应用问题的解题思路、方法、技巧等均作了一一详尽的归纳、总结与解答，此外还对微积分在工程中的应用作了必要的介绍与分析。该书形式新颖、内容翔实、思路清晰、分析深刻。作者充分注意到教学规律，在解惑之后加强了“思考与练习”，从而起到了举一反三，使其阻滞之处活然贯通之目的。

本书不仅可供财经院校、电大、职大、函大等经济类各专业师生以及经济管理人员使用，同时也对理工科大、中专学校的微积分教学具有较大的参考价值。

经济应用数学释疑

（微积分部分）

肖筱南 编著

葛振三 主审

*

广东教育出版社出版发行

（广州市大沙头四马路10号）

广东省新华书店经销 长沙水电师院印刷厂印刷

*

787×1092毫米32开本 12.625印张300千字

1989年9月第1版 1989年9月第1次印刷

印数1—10,000册

ISBN 7-5406-0936-2/G·930

定价：3.95元

代 前 言

马克思曾经指出：一种科学只有在成功地运用数学时，才算达到了真正完善的地步.这是因为数学是研究客观世界中数量关系和空间形式的一门科学.任何一门学科，任何一个研究对象，如果要对其数量关系及其规律性进行研究，就必须利用数学方法。

随着我国社会主义建设的发展，各个领域都离不开数学.财经专业学生也是一样，迫切需要掌握一定量的数学知识.因此，国家教委规定微积分、线性代数、概率论与数理统计、线性规划和运筹学通论，作为经济应用数学的内容，是很正确的.实践证明，掌握微积分是学好经济应用数学的关键.为了帮助财经高校学生及广大自学者学好微积分，本书作者按照财经专业数学教学大纲的要求，系统地、深入浅出地深刻分析、归纳了经济数学中微积分的重点和难点，同时根据其多年丰富的教学经验，针对学生在学习中容易混淆的概念和错误，逐一进行了详尽的纠正、解答与范例分析.因此，本书不但对财经专业学生学好微积分大有帮助，而且对理工科大、专学生也具有较大的指导作用，实为一本很好的教学参考书与自学指导书.

萧伊莘

1989年7月12日

编 者 的 话

如何学好经济数学，应用经济数学中的基本理论与方法学习财经专业各有关课程，解决经济应用问题，已经成为了广大财经专业学生急需解决的一大问题.为此，作者在参阅了国内外大量经济数学资料的基础上，按照财经专业数学教学大纲的要求，紧扣经济应用数学（微积分部分）教材，以质疑与释疑的方式组织内容，编写了此书.若能借助于本书使读者对经济应用数学（微积分部分）基本内容的理解有所加深，解题思路有所启发，解题技巧有所提高，编者将会感到无限兴慰.

本书共分九部分，内容安排与现行教材同步，可作为经济应用数学（微积分部分）课程的配套辅导书使用.在编写过程中，编者力求内容全面翔实，重点难点突出，阐述深入浅出.限于编者水平，时间仓促，书中错误在所难免，恳请读者批评指出.

在本书编写过程中，曾得到许多同志的热情支持与帮助.首先要特别感谢原湖南省数学学会理事长，著名数学家肖伊莘教授.肖老不顾酷暑，亲自审阅书稿，并为本书撰写了前言.此外承蒙葛振三副教授仔细审阅了书稿，并提出了不少宝贵的修改意见，至使本书不断完善.

借此机会，还要对长沙水利电力师范学院数学系的老师与领导给予编者在整个编书过程中的热情支持、鼓励与指导，以及谢中科老师在校稿中所做的工作，致以诚挚的谢意.

1989年7月

目　录

一、函　数

1. 如何正确理解函数的定义？ …………………………………… (1)
2. 如何求函数的定义域？怎样避免求函数定义域时产生错误？ …………………………………… (4)
3. 怎样判别相同函数？ …………………………………… (7)
4. 怎样求抽象函数的复合函数？ …………………………………… (10)
5. 怎样判别函数的奇偶性？举例说明 …………………………………… (11)
6. 如何判定函数的单调增减性？举例说明 …………………………………… (13)
7. 如何判定函数的有界性？举例说明 …………………………………… (15)
8. 如何理解并求出函数 $y=f(x)$ 的反函数？ …………………………………… (17)
9. 怎样求分段函数的反函数？ …………………………………… (19)
10. 任何两个函数都能复合成复合函数吗？构成复合函数有什么条件？ …………………………………… (21)
11. 初等函数与非初等函数的区别何在？ …………………………………… (24)
12. 什么是收益函数？怎样确定生产与销售中的收益函数表达式？ …………………………………… (26)
13. 什么是利润函数？怎样求损益分岐点？ …………………………………… (27)
14. 什么是商品库存函数，怎样理解商品库存函数？ …………………………………… (30)
15. 怎样建立实际应用问题的函数关系式？ …………………………………… (32)
16. 函数作图有哪些基本的初等方法？ …………………………………… (35)

二、　极限与连续

1. 怎样正确理解数列极限的分析定义？ …………………………………… (40)
2. 如何从极限的定义出发证明数列的极限？ …………………………………… (43)
3. 如何理解函数极限的“ε—δ”定义？举例说明 …………………………………… (46)
4. 函数极限与数列极限有何联系？ …………………………………… (50)

5. 怎样讨论分段函数的极限？ …………………………… (53)
6. 怎样正确理解无穷小量与无穷大量的概念？它们的关系如何？ …………………………… (54)
7. 无穷个无穷小量的和一定是无穷小量吗？ …………………………… (57)
8. 两个非无穷小量的和或积一定不是无穷小量吗？ …………………………… (58)
9. 两个无穷大量的和仍是无穷大量吗？ …………………………… (59)
10. 两个非无穷大量的积一定不是无穷大量吗？ …………………………… (60)
11. 任何两个无穷小量都能比较吗？ …………………………… (60)
12. 怎样利用函数的连续性求极限？ …………………………… (62)
13. 怎样利用极限四则运算法则求极限？ …………………………… (63)
14. 怎样约简分式求极限？ …………………………… (66)
15. 怎样求无理式分式的极限？ …………………………… (68)
16. 怎样运用无穷小量的性质求极限？ …………………………… (71)
17. 怎样运用无穷小量分出法求分式的极限？ …………………………… (72)
18. 怎样利用两个重要极限求极限？ …………………………… (73)
19. 怎样利用变量代换法求极限？ …………………………… (76)
20. 怎样利用等价无穷小代换法求极限？ …………………………… (78)
21. 怎样利用“两边夹法”求极限？ …………………………… (80)
22. 怎样运用定理“单调有界数列必有极限”求极限？ …………………………… (83)
23. 怎样利用自然数求和公式求极限？ …………………………… (84)
24. 怎样判断函数在给定点处是否连续？ …………………………… (85)
25. 怎样判别两个函数的和或积的连续性？ …………………………… (87)
26. 函数在一点有定义、有极限与函数在该点连续之间有何关系？ …………………………… (88)
27. 怎样求函数的间断点？间断点如何分类？ …………………………… (90)
28. 开区间内的连续函数在该开区间内一定有最大值和最小值吗？ …………………………… (94)
29. 怎样判别复合函数的连续性？ …………………………… (95)
30. 如何根据介值定理讨论方程的根？ …………………………… (96)

31. 怎样求解连续复利问题？…………………………………… (98)

三、 导数与微分

1. 如何正确理解导数的概念？……………………………… (102)
2. 如何理解经济学中"边际"与"平均"两个概念？……… (104)
3. 导数与导函数有何区别和联系？………………………… (106)
4. 函数在点x_0连续，它在该点一定可导吗？…………… (107)
5. 连续函数的导函数一定连续吗？………………………… (108)
6. 怎样判别两个函数之和的可导性？……………………… (109)
7. 不等式两边分别求导后不等号仍然保持不变吗？……… (110)
8. 函数在某点是否具有导数与函数的导数在该点的极限是否存在有无关系？…………………………………………… (111)
9. 可导的偶函数的导函数为奇函数吗？可导的奇函数的导函数为偶函数吗？…………………………………………… (114)
10. 函数有极限与函数的导数有极限之间有无必然联系？ (114)
11. 怎样根据函数特性求导数？……………………………… (116)
12. 怎样运用四则求导法则求导数？………………………… (118)
13. 怎样运用复合函数求导法则求导数？…………………… (119)
14. 怎样利用变量代换求导数？……………………………… (122)
15. 怎样求反函数的导数？…………………………………… (124)
16. 怎样运用隐函数求导法则求导数？……………………… (126)
17. 怎样利用取对数求导数？………………………………… (127)
18. 怎样运用参数方程求导法则求导数？…………………… (129)
19. 怎样从导数定义出发计算非初等函数的导数？………… (131)
20. 什么是高阶导数？怎样求高阶导数？…………………… (135)
21. 如何利用导数求解几何问题？…………………………… (140)
22. 如何利用导数求解经济问题？…………………………… (142)
23. 何谓函数的微分？函数的微分有哪些特点？…………… (145)
24. 自变量的微分与函数的微分有何不同？什么函数的改变

量Δy恒等于函数的微分dy？……………………………（147）
25. 函数$f(x)$的微分dy与导数$f'(x)$的联系和区别是什么？怎样求函数的微分？……………………………（148）
26. 利用微分可以解决哪些近似计算问题？……………（150）
27. 怎样利用微分估计误差？……………………………（153）

四、 中值定理及导数应用

1. 罗尔定理的条件是什么？缺少一个条件结论成立吗？…（155）
2. 拉格朗日中值定理的条件与结论是什么？它有哪些形式？……………………………（157）
3. 三个中值定理的关系如何？在几何上这些定理有何意义？……………………………（159）
4. 怎样利用罗尔定理判断方程的根？……………………（161）
5. 为什么导数为常数的函数必为线性函数？……………（162）
6. 怎样利用中值定理证明函数不等式？…………………（163）
7. 柯西定理的结论能由拉格朗日定理得到吗？…………（165）
8. 洛必达法则的条件和结论是什么？应用洛必达法则求未定式的极限应注意哪些问题？……………………（166）
9. 怎样运用洛必达法则求各种未定式的极限？…………（169）
10. 为什么不能用洛必达法则判断一个函数的极限不存在？…（173）
11. 如何避免在使用洛必达法则求极限时出现错误？……（177）
12. 如何理解函数增减性的判定法则？怎样求函数的单调区间？……………………………（179）
13. 函数$f(x)$在区间（a, b）上单调增加，能否就说函数$f(x)$是单调增函数？……………………………（180）
14. 单调函数的导函数一定单调吗？……………………（181）
15. 极值点和驻点有何关系？什么条件下驻点一定是极值点？……………………………（182）
16. 函数的极值与最大、最小值有何区别与联系？………（183）

17. 如何运用极值判别法求函数极值？ …………………… (184)
18. 何谓拐点？如何确定曲线的拐点？ …………………… (186)
19. 何谓曲线的渐近线？如何求曲线的渐近线？ ………… (187)
20. 用微分法描绘函数图形的方法步骤如何？ …………… (188)
21. 怎样求解经济函数的极值问题？举例说明 …………… (189)

五、不定积分

1. 什么是函数$f(x)$的原函数？什么样的函数有原函数？原函数唯一吗？ …………………………………………… (191)
2. 一切初等函数都具有原函数吗？初等函数的不定积分都可以表成有限形式吗？ ……………………………… (192)
3. 同一被积函数的不定积分可以有不同的表达式吗？…… (193)
4. 怎样理解微分运算与积分运算互为逆运算？ ………… (195)
5. 怎样掌握直接积分法？ ……………………………… (196)
6. 用直接积分法常将被积函数拆成两项代数和或将被积函数积化为和差形式，为什么？ ……………………… (198)
7. 怎样掌握与使用第一换元法？ ……………………… (200)
8. 怎样求$\int f(ax+b)dx$型、$\int f(ax^n+b)x^{n-1}dx$型不定积分，$(a, n\neq 0)$？ …………………………… (207)
9. 怎样求$\int \sin mx\cdot\sin nx dx$，$\int \sin mx\cdot\cos nx dx$，$\int \cos mx\cdot\cos nx dx (m\neq n)$型的不定积分？ ……… (209)
10. 怎样求$\int \sin^n x dx$或$\int \cos^n x dx$型（n为正整数）的不定积分？ ……………………………………… (211)
11. 怎样求$\int \sin^m x\cdot\cos^n x dx$型（m，n为正整数或零）的

不定积分？ ………………………………………………… (213)
12. 怎样掌握与使用第二换元法？ ……………………………… (214)
13. 第一换元法与第二换元法有何异同？举例说明……… (217)
14. 第二换元法中有哪些常用的变量代换？ ………………… (220)
15. 怎样掌握与使用分部积分法？ …………………………… (226)
16. 怎样把有理真分式分解为最简分式的代数和？ ……… (230)
17. 怎样求有理函数的不定积分？ …………………………… (234)
18. 不定积分有哪些经济应用？ ……………………………… (237)

六、 定积分

1. 怎样正确理解定积分的定义？ …………………………… (239)
2. 若函数f(x), g(x)在〔a, b〕上可积，则函数f(x)±g(x)在〔a, b〕上是否可积？反之如何？为什么？… (242)
3. 怎样正确使用牛顿——莱布尼茨公式？ ………………… (243)
4. 如何掌握好定积分的换元积分公式？ …………………… (246)
5. 在什么情况下适宜于使用换元积分法求定积分？怎样选择适当代换简化定积分计算？ ………………………… (250)
6. 怎样正确使用定积分的分部积分法？ …………………… (255)
7. 如何利用奇偶函数在对称区间上的积分性质求定积分？ (257)
8. 广义积分与定积分有何区别与联系？ …………………… (259)
9. 怎样求解无穷区间上的积分？举例说明………………… (262)
10. 怎样求解无界函数的积分？举例说明…………………… (264)
11. 如何正确理解与使用定积分的微元分析法？举例说明 ………………………………………………………… (266)
12. 如何应用定积分求几何问题？ …………………………… (269)
13. 如何利用定积分求物理问题？ …………………………… (274)
14. 如何求解定积分的经济应用问题？ ……………………… (275)

七、 级 数

1. 级数的敛散性与数列的敛数性有何联系？怎样利用其联

系判别级数的敛散性？……………………………… (280)
2．一般项趋于零的级数一定收敛吗？怎样利用级数收敛的必要条件判断一个级数是否发散？…………………… (286)
3．什么时候正项级数的比值判别法可能失效？………… (288)
4．怎样将正项级数的审敛法应用于任意项级数？……… (291)
5．判别数项级数敛散性的基本方法与步骤怎样？……… (294)
6．幂级数的收敛域有何特点？如何求幂级数的收敛域？……………………………………………………… (296)
7．若两个幂级数的收敛半径相等，则它们的收敛区间一定相同吗？………………………………………… (299)
8．将幂级数逐项微分或逐项积分后，所得幂级数的收敛区间会发生变化吗？……………………………… (300)
9．在点$x=0$的邻域内具有各阶导数的任何函数都可以展开为x的幂级数吗？……………………………… (302)
10．怎样将一个函数展开成幂级数？…………………… (304)
11．怎样利用幂级数进行数值计算？…………………… (308)

八、 多元函数

1．已知空间曲面，如何建立该曲面对应的方程？……… (311)
2．已知空间曲面方程，如何画出其图形？……………… (313)
3．如何描绘空间几组曲面所围成的立体图形？………… (317)
4．怎样正确理解二元函数的概念？……………………… (320)
5．如何正确理解二元函数的极限的概念？……………… (321)
6．偏导数记号（如$\frac{\partial z}{\partial x}$）可以看成商或分数吗？……… (323)
7．二元函数$z=f(x, y)$在点$P_0(x_0, y_0)$处的偏导数存在时，在该点函数一定连续吗？……………………… (325)
8．二元可微函数的两个混合偏导数一定相等吗？……… (327)
9．函数$f(x,y)$在点$P(x, y)$的全微分何时一定存在？如何计算？…………………………………………… (329)

10. 什么时候可用二元函数的全微分近似代替它的全增量？在实际问题中怎样利用二元函数的全微分进行近似计算？……（330）
11. 怎样求多元复合函数的导数？……（331）
12. 怎样求隐函数的导数？……（337）
13. 如何求解二元函数的普通极值问题？……（341）
14. 怎样求解条件极值问题？……（344）
15. 经济领域中有哪些二元函数的极值问题？如何求解经济函数的极值？……（348）
16. 如何理解一元函数微分法与多元函数微分法的联系与区别？……（352）
17. 怎样正确理解二重积分的定义？它与一元函数的定积分有何异同？……（353）
18. 如何在直角坐标系下计算二重积分？……（355）
19. 在什么情况下用极坐标计算二重积分比较方便？怎样将二重积分$\iint\limits_D f(x,y)dxdy$表为极坐标系下的累次积分？……（359）
20. 怎样利用二重积分计算空间立体V的体积？……（364）

九、微分方程

1. 什么是微分方程？怎样确定微分方程的阶？……（367）
2. 什么是微分方程的解、通解和特解？通解与特解有何关系？微分方程的解与代数方程的解有何不同？……（369）
3. 什么是可分离变量的微分方程，怎样求解？……（371）
4. 如何求解一阶线性微分方程？……（374）
5. 如何求解二阶常系数齐次线性微分方程？……（378）
6. 怎样求解二阶常系数非齐次线性微分方程？……（380）
7. 如何列微分方程解应用题？举例说明……（384）
8. 微分方程有何经济应用？……（387）

一、函　数

1．如何正确理解函数的定义？

通常函数的定义是：

设在某个过程中，有两个变量x和y，若对于x的变化范围内的每一个值，y按一定的规则总有唯一确定的数值与之对应（在此只讨论单值函数），则称变量y为变量x的函数，一般记作

$$y=f(x)$$

其中x称为自变量，y称为因变量。

显然，在上述函数的定义中，两变量之间的对应关系是函数概念的实质，它反映了物质世界中变量与变量之间的依赖关系．因此，说"在某过程中有两个变量，一个变，另一个也变，两个变量就成为函数关系"是不确切的。如气温的高低与衣服的增减并不构成函数关系，因为它们没有确定的对应关系。

又如$y=x^2$中的y是x的函数，而对于式子$y^2=x$，由于$(0,+\infty)$中的每一个x值都有两个y值与之对应，故$y^2=x$中的y不是x的函数。

在讨论函数概念时应着重抓住三个要素：

（1）自变量的变化范围即函数的定义域；

（2）自变量与因变量的对应关系；

（3）因变量的取值范围即函数的值域．

而要想掌握好函数概念，关键又在于抓住自变量与因变量的对应关系和函数定义域这两个要素。因为只要给定了定义域和对应关系，就能够确定一个函数。当然，函数关系的表示法根据不同情形可有公式（用一个或几个分析式子表示）、图象、表格、文字说明等多种形式。

理解函数定义时还应注意：

（1）在函数记号$y=f(x)$中，字母“f”不代表数，而是表示因变量y与自变量x之间的对应关系。当提到函数$y=f(x)$时，常有两层意思，有时指对应关系，有时指因变量y，前者侧重于对应关系，后者侧重于值的对应。

（2）函数与自变量的区分，并不是绝对的，要由问题的具体条件来决定。例如，在实际问题中，需要我们由已知半径求圆面积时，则应将圆面积看成半径的函数，用公式

$$s=\pi r^2$$

来计算；但当问题条件或性质发生变化，要求我们由已知圆面积求半径时，则须将圆面积s当成自变量，而将半径看成是圆面积的函数，此时要用下式

$$Y=\sqrt{\frac{s}{\pi}}$$

来计算。

(3)微积分中所讲的一元函数，若无殊殊申明，均指“实变实值的单值函数”，即对于只取实数的每个自变量x总有唯一确定的取实数值的因变量y与之对应，这里所说的“对于x的每一个值，总有唯一确定的y值与之对应”，并不要求对于不同的x值，y取不同的值，因此$y=C$(常数）也不违背函数的定义，即$y=C$是一个函数，其图象是平行于x轴的一条直

线．而多值函数通常都拆成若干个单值枝分别研究．

（4）要注意$f(x)$与$f(a)$不同，前者是函数记号，表示一个变量，后者是函数值记号(表示函数在$x=a$时的值)，是一个数．

（5）函数$y=f(x)$在平面直角坐标系中表示与有序数对(x,y)所对应的一条平面曲线．

【思考与练习】

（1）$y=2$与$x=2$都表示x的函数吗？

（2）下列A、B、C、D、E、F、G中哪些是x的函数？

A　$y=\sqrt{-x}$；　　B　$y=\dfrac{1}{\sqrt{-x^2}}$；

C　$y=\begin{cases} x^2, & x\geqslant 0 \\ 1-x, & x<0 \end{cases}$；　　D　$y=\begin{cases} 1, & x\text{是有理数} \\ 0, & x\text{是无理数} \end{cases}$；

E　$y=\sqrt{1-x}+\sqrt{x-2}$；　F　$y=\ln(-x^2)$．

G　$y=[x]$　（$[x]$表示x的最大整数部分）．

〔**答案**：（1）不都是．$y=2$是；$x=2$不是，因为x与y的值不是唯一对应．（2）A、C、D与G是；B、E与F不是〕

2．如何求函数的定义域？怎样避免求函数定义域时产生错误？

我们知道，使函数有意义的自变量的变化范围称为函数的定义域，一个函数主要是由对应规律及函数定义域来确定的（此时函数值域也随之确定），因此，仅仅写出解析式，只能反映函数的对应关系，还不能说它就是函数。

那么，怎样求函数的定义域呢？

一般地，函数的定义域是由所讨论问题的实际意义或函数的解析式来确定的：

若函数是由解析式给出，则其定义域是使解析式有意义的自变量的一切取值范围．定义域可按如下原则确定：

（1）无理函数的偶次根式，被开方数的值必须大于0或等于0．

（2）分式函数中，应除去分母为0的x值．

（3）对数函数式中，应除去使真数部分小于0或等于0的x值．

（4）正切函数或余切函数中，要除去使正切或余切不存在的x值．如$\mathrm{tg}x$（$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$，k是整数），$\mathrm{ctg}x$（$x\neq k\pi$，k是整数）．

（5）反正弦函数或反余弦函数中，自变量的绝对值不能大于1．

其次，所给函数如为基本初等函数经四则运算而得到，则定义域为各个基本初等函数定义域的交集．