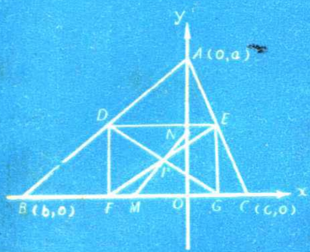
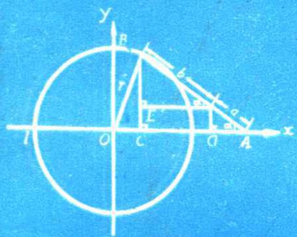
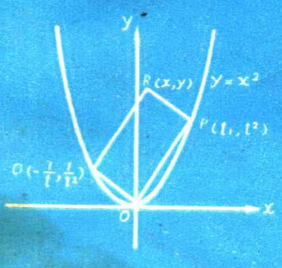
初等数学疑难问题讲解



参数方程及其应用



刘国仁　张　礼



ANSHUFANGCHENGJIQIYINGYONG

内蒙古人民出版社

初等数学疑难问题讲解

参数方程及其应用

CANSHU FANGCHENG JIQI YINGYONG

刘国仁　　张　礼

内蒙古人民出版社

一九八三年·呼和浩特

初等数学疑难问题讲解
参数方程及其应用
刘国仁　张　礼
*
内蒙古人民出版社出版
（呼和浩特市新城西街82号）
内蒙古新华书店发行　内蒙古青山印刷厂印刷
开本：787×1092 1/32 印张：8　字数：168千
1983年7月第一版　1983年7月第1次印刷
印数：1--6,000册
统一书号：7089·309 每册：0.73元

出版说明

《初等数学疑难问题讲解》丛书，是为自学数学的广大社会青年讲解初等数学中的疑难问题而编辑出版的。它是就疑难问题较多的篇章中撰写为：《曲线的切线和切线方程》、《空间直线·平面·多面角》、《参数方程及其应用》、《复数与初等数学》、《三角函数式和差积商的周期》、《排列组合及其应用》、《解题分析与解题技巧》、《容易错的概念·容易错的方法》等书组成。

这套丛书各册的共同特点是：对有关基本知识基本训练方面的疑难问题讲解的比较细致通俗，易读易懂；对所用例题都有分析，通过分析疏通了思路、抓住了解题的关键，对综合题采用了不同知识的多种解法；同时，适当地注意了知识的准确性和语言的趣味性。

因此，这套丛书，可供为广大社会青年自学数学的辅导用书，也可作为在校中学生的课外读物，对于中学数学教师也是较好的数学参考资料。

内蒙古人民出版社

一九八二年九月一日

前　　言

在教学实践中，我们感到要学好《中学数学教学大纲》所规定的参数方程教材内容，对部分学生和自学青年是有一定困难的。这本小册子，根据教学大纲和现行教材的要求，对什么是参数和参数方程，如何建立直线和二次曲线的参数方程，以及选择参数和消去参数的基本方法和技巧，参数方程与普通方程的关系与互化等方面作了系统的介绍，在这个基础上，对直线和二次曲线参数方程的应用，对如何利用参数方程求点的轨迹方程等诸方面的疑难问题也都作了比较详细的探讨，在每章之后安排了适量的习题，并附有提示或答案，可以帮助读者自己解决问题，对于某些综合性应用问题，专有提示性分析，指出了解题思路与解题方法以提高读者解决综合性问题的能力。

本书主要对学习高中数学的在校学生和自学高中数学的校外青年提供解决疑难问题的辅导用书，也可供中学数学教师作为教学参考，其中有些内容，也可作为数学课外活动小组的阅览使用。

编写这本小册子时，曾得到内蒙古大学邱佩璋教授的指导，在此表示感谢。

因时间仓促，水平有限，这本小册子的失误与不足在所难免，敬请广大读者指正。

编　者

一九八二年九月一日

目　　录

第一章　参数方程的基本知识

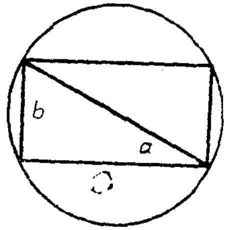
一、参数与参数方程

你知道什么是参数吗？——有些数学问题，直接研究题目给出的已知数和未知数之间的关系时不好入手，这时，如果我们引进一个新的变数（即参数）对问题的解决，起了一个铺路架桥的作用，就可化难为易，顺利地沟通未知数和已知数之间的关系．这种引进参数和参数方程的数学方法，就是我们要向读者在这里介绍的．从这一节开始我们详细讨论参数与参数方程的基本知识，并逐节解决其中的疑难问题．

§1　参数

提出参数这个名词，初学读者可能有些生疏，其实，利用参数来解决问题的作法，在数学中已是一种常见的重要方法。请看几个熟悉的例子．

例1　求证：圆的内接矩形中，正方形的面积最大．



（图1-1）

【分析】要证圆的内接正方形面积最大，应该和所有内接矩形的面积加以比较．怎么比较呢？内接矩形有无数个，它们的面积是一个变量，通常我们只要求出这个面积 S 的最大值，证明此时矩形正好为正方形即可．

解　设矩形的长为 a，宽为 b，圆的半径为 R，则矩形面积

$$S = ab \tag{1}$$

但两个自变量的函数的极值是不好求的，如果利用关系式

$$a^2 + b^2 = 4R^2,$$

虽然可以化为一个自变量的函数关系：

$$S = a\sqrt{4R^2 - a^2},$$

但用初等方法求这个函数的极值仍比较困难。

如果我们引进一个参数 α（如图1—1），则

$$a = 2R\cos\alpha;$$
$$b = 2R\sin\alpha.$$

代入(1)得　$S = 4R^2\sin\alpha\cos\alpha = 2R^2\sin 2\alpha$。

显然，当 $2\alpha = 90°$，即 $\alpha = 45°$，时，面积有最大值 $2R^2$，此时 $a = b$，也就是该矩形为正方形。

从这个例子我们可以看到，引入参数 α，就沟通了变量 a、b 和定量 R 之间的关系，起了化难为易的作用。这样的例子还很多。

例 2　设　$x^4 + px^2 + q$　的一个因式是　$x^2 + ax + b$（$a \neq o$），求证：$p = 2b - a^2$，$q = b^2$。

【分析】要直接找出 p、q 和 a、b 之间的关系，不大容易。我们由 $x^2 + ax + b$ 是 $x^4 + px^2 + q$ 的一个因式这一条件，想到一定还有一个二次因式　设它为 $x^2 + mx + n$，此处 m、n 并不是我们最后结果里所需要的，但引入这两个参数，问题就比较好解决了。

【解】设　$x^2 + mx + n$ 是另一个因式，则

$$x^4+px^2+q=(x^2+ax+b)(x^2+mx+n)$$

或
$$x^4+px^2+q=x^4+(a+m)x^3+(am+n+b)x^2+(an+bm)x+nb,$$

因为这是恒等式，对应系数应该相等，所以有

$$\begin{cases} a+m=0, \\ am+n+b=p, \\ an+bm=0, \\ nb=q. \end{cases}$$

从这四个方程中消去参数 m、n，即得：

$$p=2b-a^2,$$
$$q=b^2.$$

这种引入参数的作法，在平面解析几何中，也早就出现过。

例 3 求经过两圆：$x^2+y^2-6x-7=0$ 和 $x^2+y^2=4$，交点并过原点的圆的方程。

【分析】此题当然可以先求出两圆的交点，然后求过这两个交点并过原点的圆的方程，但此法较烦。若引入参数 λ ($\lambda\neq-1$)，则经过两圆交点的圆系方程为：

$$x^2+y^2-6x-7+\lambda(x^2+y^2-4)=0$$

整理后得： $(1+\lambda)x^2+(1+\lambda)y^2-6x-7-4\lambda=0$ (1)

因为方程(1)经过原点，常数项为零，所以

$$-7-4\lambda=0.$$

即
$$\lambda=-\frac{7}{4}.$$

代入(1)得所求圆的方程为

$$x^2+y^2+8x=0.$$

从上面几个例子可以看出，参数是一种变数，它是由于解决问题的需要而引进，它参与了解决问题的论证或计算过程，起了一个桥梁作用，到问题解决之时，它也就被消去了．所以，一般地讲，参数就是在研究问题的过程中引进的一个变数．

正因为数学中引入参数是研究问题的一种重要方法，所以应用范围很广．

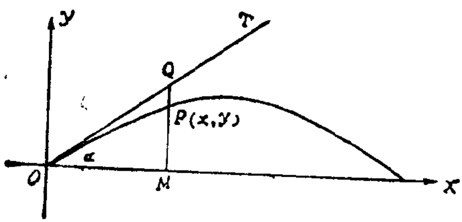
§2　参数方程

参数方程，是应用参数的一个重要方面．由于它本身的重要性及其应用的广泛性，需要研究与掌握其知识的规律和应用的方法．

什么叫参数方程？为什么有了直角坐标系的普通方程，还要引进参数方程？我们仍用两个例子来加以说明，并给出定义．

例 1　炮弹与地面成α角向前方射击，初速度为v_0米/秒，求炮弹的轨迹方程（不计空气阻力）．

【分析】设炮弹为动点P，其坐标为$(x、y)$，如果不引进参数，读者不妨试着直接找一找x y之间的关系，建立轨迹曲线的普通方程．着手进行这项工作时，我们就会发现极



（图1-2）

为困难，但如果引进时间 t 作为参数，利用牛顿定律，办法就有了。根据力的分析，炮弹的运动是由两个力决定的：一个是火药的推动力给炮弹以初速度 v_o，使它朝 OT 方向直线前进；另一个是地球的引力，把炮弹拉向地面，即 QM 的方向．如图1—2。

假如 t 秒后，不考虑地球引力，炮弹匀速运动到 Q 点，则 $OQ=v_0t$；但另一方面，t 秒内炮弹被拉向地面的距离应该是 $\frac{1}{2}gt^2$；所以炮弹实际上在 P 处．显然，P、Q 两点的横坐标相同纵坐标相差 $PQ=\frac{1}{2}gt^2$，即

$$x=OQ\cos\alpha=v_otcos\alpha;$$

$$y=MP=MQ-PQ=OQ\sin\alpha-\frac{1}{2}gt^2$$

$$=v_ot\sin\alpha-\frac{1}{2}gt^2.$$

这样，我们就得到了以时间 t 为参数，动点 $P(x,y)$ 的纵横坐标的一组解析式：

$$\begin{cases}x=v_ot\cos\alpha,\\ y=v_ot\sin\alpha-\frac{1}{2}gt^2.\end{cases}\quad (t\text{ 为参数})$$

这就是炮弹轨迹的参数方程．从中消去 t，得

$$y=x\operatorname{tg}\alpha-\frac{g}{2v_o^2\cos^2\alpha}x^2.$$

这就是炮弹轨迹的普通方程．显然，这是一条抛物线．

一般地，在直角坐标系中，如果曲线上任意一点的坐标 (x,y) 都可以表示为某个区间内变量 t 的单值函数，那么所得到的方程：

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \qquad (A)$$

叫做曲线的参数方程。变量 t 叫做参变数，简称参数。在具体问题中，参数 t 常常有其物理的或几何的意义，上例中 t 的物理意义是时间，但参数并不必需具有某种实际意义。

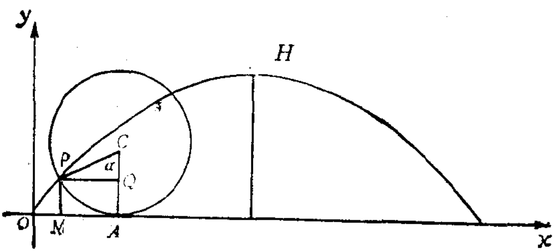
显然，在(A)中，每给一个t值，对应着唯一的一组数(x, y)，即平面直角坐标系内一定点 P；随着 t 值的变化，$P(x, y)$点的坐标也在变化，P 点的集合就是一条曲线。如果消去参数 t，就得到 P 点纵横坐标之间的关系式：

$$F(x, y) = 0. \qquad (B)$$

今后我们把(B)称之为曲线的普通方程。

运动学中，质点运动的轨迹方程，常常必需借助于参数方程来建立，就是某些纯几何轨迹，也常常必需借助于参数来建立其方程。下面这个例子，就是一个几何问题，读者不妨先试着不用参数去建立其轨迹方程。

例 2　一个半径为 r 的定圆，沿一直线滚动，求圆周上一定点 P 的轨迹方程。



(图1-3)

【分析】为了使建立的方程简单一些，不妨把已知直线

作为 x 轴，圆上定点 P 滚到和直线接触时直线上的那一点 O 作为原点建立直角坐标系。不难想到，P 点的位置和半径 r 有关，也和张角 $\angle ACP=\alpha$ 有关，因为随着张角 α 的增大，P 点向右移动．既然 α 的变化可以引起 P 点的变化，我们就可以用 α 作为参数来试一试．先看纵坐标 MP 和横坐标 OM，若作 $PQ /\!/ x$ 轴，如图 1—3，则

$$MP=AQ=AC-QC=r-r\cos\alpha,$$

$$OM=OA-MA=OA-PQ=OA-r\sin\alpha.$$

其中 OA 怎么处理？如果我们注意到圆在滚动时，弧 $\overset{\frown}{PA}==OA$，由弧长公式 $\overset{\frown}{PA}=\alpha r$，于是可得参数方程（旋轮线）：

$$\begin{cases} x=\alpha r-r\sin\alpha, \\ y=r-r\cos\alpha. \end{cases} \quad (\alpha \text{ 为参数}) \qquad (C)$$

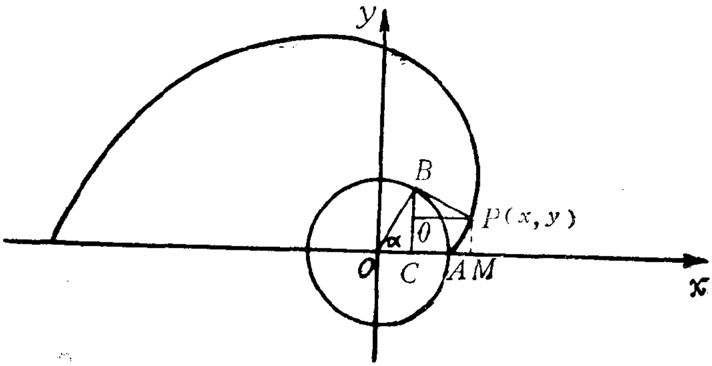
由以上两个例子可以看出，某些物理、数学问题，不引入参数，是很难建立其方程的．而某些类型的参数方程建立起来以后，又成为一个重要的数学工具，不仅可以用来建立轨迹方程，还可以用来解决许多本来不好解决的物理与数学问题。关于这方面的应用，读者可以在后面的章节里读到，这里要说明的是，除了上面说的好处以外，参数方程还有这样一个优点，就是它能够把某些比较复杂的函数关系从整体上单值化．譬如圆的方程是很简单的：$x^2+y^2=R^2$，它能在整体上反映圆上任一点纵、横坐标的关系，但却不是单值的，因为对于每一个 x 值，y 的值是两个：

$$y=\pm\sqrt{R^2-x^2},$$

这就不仅造成将来求导和积分的困难，就是在初等数学里，

处理某些问题，如已知切线的斜率，就不能给出切线方程的统一形式，只好分段解决。而有些曲线，甚至用 x、y 之间的关系式，都没有办法表示出整个曲线，圆的渐开线就是一个例子。

例 3 把一条没有弹性的细绳绕在一个圆盘上，在绳的外端将绳拉紧，逐渐展开，同时保持绳和圆相切，那么绳的外端的轨迹，就叫做圆的渐开线。建立圆的渐开线方程。



(图1-4)

【分析】 如图1-4，因为渐开线上任意一点 $P(x,y)$ 是细绳 BP 的端点，而 BP 是圆的切线，显然，切线 BP 的长度等于 $\widehat{BA}$ 的弧长。建立渐开线的方程，主要利用这个关系。容易看出动点 P 的位置，除和圆 O 的半径 R 有关外，与张角 $\angle AOB=\alpha$ 的变化有关，所以我们可以把 α 选择为参数，于是 P 点的横坐标 OM 和纵坐标 MP 有（请注意 $\angle PBC=\angle COB=\alpha$）：

$$OM=OC+CM=OC+QP=R\cos\alpha+BP\sin\alpha,$$

$$MP = CQ = CB - QB = R\sin\alpha - BP\cos\alpha.$$

因为 $$BP = \overset{\frown}{AB} = \alpha R,$$

于是得渐开线的参数方程

$$\begin{cases} x = R\cos\alpha + \alpha R\sin\alpha, \\ y = R\sin\alpha - \alpha R\cos\alpha. \end{cases} \quad (\alpha\text{ 为参数}) \qquad (D)$$

从图 1-4 可以看出，曲线随着 α 角的增大而逐渐展开，一圈圈地向外无限增大其对圆心的距离，对应于一个 x 值，函数值 y 可以取无穷多个值．一个普通方程，本来就很难反映出这种关系，更不用说在整体上用单值的形式来反映了．事实上，方程（D）也无法消去参数，化为普通方程．

二、直线和二次曲线的参数方程

建立了直线和二次曲线的参数方程，就能利用它解决许多有关直线和二次曲线的许多问题．怎样选择参数，怎样建立参数方程，参数的几何意义又是什么，这是我们必须解决的问题．

§1 直线的参数方程

直线的参数方程可以有各种不同的形式，我们下面要介绍的，是典型形式的参数方程，它的优点是：方程中每一个量都有它的几何意义，因此，它的应用比较广泛．

问题：已知直线的倾角为 α，并且直线过定点 $P_0(x_0, y_0)$，求直线的参数方程．

【分析】我们的目标是寻找一个参数 t，使直线上任意

一点 $P(x,y)$ 的坐标能用表达式

$$\begin{cases} x = f(t), \\ y = g(t). \end{cases}$$

来表示．怎样才能建立这个表达式？自然应该从几个量 x、y、x_o、y_o 和 α 之间去找关系（参看图 1-5）．为此，我们经过 P_o、P 作 x 轴的垂线 P_oM_o 和 PM，则 $OM_o = x_o$，$M_oP_o = y_o$，$OM = x$，$MP = y$（注意，此处 OM_o、M_oP_o、OM、MP 都是有向线段，若再过 P_o 作 $P_oQ \parallel x$ 轴，则 $\angle PP_oQ = \alpha$，在直角 $\triangle PP_oQ$ 中，就可以找出 x、y、x_o、y_o、α 之间的关系。

解 在直角 $\triangle PP_oQ$ 中，

$$QP = P_oP\sin\alpha,$$
$$P_oQ = P_oP\cos\alpha.$$

因为 $QP = MP - MQ = MP - M_oP_o = y - y_o$，

$P_oQ = M_oM = OM - OM_o = x - x_o$，

令 $P_oP = t$，即得直线的参数方程：

$$\begin{cases} x = x_o + t\cos\alpha, \\ y = y_o + t\sin\alpha. \end{cases} \quad (t \text{ 为参数}) \qquad (E)$$

在图 1-5 中，我们把 P_o、P 都取在第一象限，α 取成锐角，P 点取在 P_o 的上方，但这并不影响证明的一般性，因为我们的证明是利用的有向线段，所以在其余情形下，上面的推理过程完全一样．

因为 $t = P_oP$，即 t 的几何意义是有向线段 P_oP，它的绝对值是动点 P 到定点 P_o 点的距离，当 $0 < \alpha < \pi$ 时，符号决定于 P 点在 P_o 点的上方或下方：上方为正，下方为负．当 $\alpha = 0$ 时，P_oP 和 x 轴正方向相同时 $t > 0$，P_oP 与 x 轴正方向