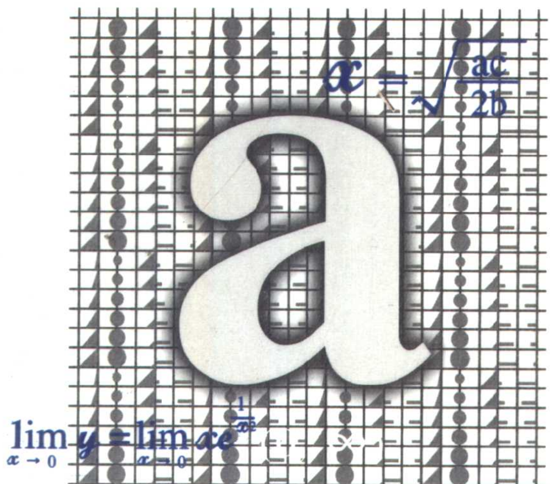
经济数学基础课辅导用书

# 微积分自测试题

WEIJIFEN ZICESHITI

主　编　孙立爱
副主编　罗万钧




上海财经大学出版社

经济数学基础课辅导用书

# 微积分自测试题

WEIJIFEN ZICESHITI

主　编　孙立爱
副主编　罗万钧

上海财经大学出版社

# 微积分自测试题

WEIJIFEN ZICESHITI

主　编　孙立爱

副主编　罗万钧

---

特约编辑　李炳钊

责任编辑　江 王

封面设计　周卫民

---

出版 发行　上海财经大学出版社（上海市中山北一路 369 号　邮编 200083）

印　刷　江苏东台印刷厂（邮编 224200）

装　订　江苏东台印刷厂

开　本　850mm×1168mm　1/32

印　张　7.75

字　数　223 千

版　次　1998 年 6 月第 1 版　1998 年 6 月第 1 次印刷

印　数　1—6 000

书　号　ISBN 7-81049-180-6/O・07

定　价　12.00 元

---

本书如有印装质量问题，请向承印厂调换

# 内容简介

本书根据财经类“经济数学基础”教学大纲的要求，并结合作者多年的教学实践编写而成。全书共八章，每章由内容提要、典型例题、自测试题和思考题组成。书中编入六份综合试题，可作为上、下学期复习使用。书末附有答案与提示，供读者参考。

本书可作为财经类院校师生的教学参考用书，也可作为报考财经类专业的硕士研究生入学考试的辅导用书。

# 前　言

我们根据财经类专业核心课程之一"经济数学基础"教学大纲的要求，结合多年教学实践的积累，编写了这本《微积分自测试题》。

本书简要地归纳了每章的内容，指出了重点与难点，选编了典型例题，每章配有三份试卷与一组思考题，其中试题三与思考题有一定深度。学生在每学完一章后，可按规定时间(每份二小时)独立完成试卷，测试自己掌握知识的程度。同时又配有六份综合试题，分别供上、下学期期末总复习时使用。

书末附有参考答案，对较难的题目作有提示性的解答。

本书由上海财经大学基础课教学部的教师编写。参加编写的成员有：孙立爱、罗万钧、王雅芬、陈慧玉、杨爱珍、吴宏健同志。孙立爱任主编，罗万钧任副主编。

本书不仅适用于高等院校财经类各专业的本科生，也可供报考财经类专业硕士研究生复习时使用。愿它能成为广大读者学习微积分的挚友。对书中的不妥之处，恳请数学界同仁不吝赐教。

# 目　录

# 第一章　函数与极限

## 1.1　内容提要

**一、函数**

1. 函数的概念：函数定义，定义域的求法，函数的表示法，求函数值。

2. 函数的性质：有界性，增减性，奇偶性，周期性。

3. 反函数与复合函数。

4. 基本初等函数，初等函数及分段函数。

5. 经济函数：成本函数，收益函数，利润函数，需求函数，供给函数。

**二、极限**

1. 极限的定义：数列极限的定义，函数极限的定义。

2. 无穷小与无穷大：无穷小的定义、性质与比较；无穷大的定义、无穷大与无穷小的关系。

3. 极限的计算：

(1)极限的四则运算法则(直接代入法)；

(2)消去“零因子”法；

(3)消去“$\infty$因子”法；

(4)分子、分母有理化；

(5)变量替换；

(6)利用两个重要极限：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=\mathrm{e}$；

(7)利用无穷小量的性质；

(8)利用等价无穷小量的代换(当 $x\to0$ 时：$\sin x\sim x$　$\tan x\sim x$.

$\ln(1+x)\sim x \quad e^x-1\sim x.\ 1-\cos x\sim\frac{x^2}{2} \quad \sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{1}{n}x)$.

4. 极限的性质：唯一性、有界性、保号性、极限不等式性质。

5. 极限的证明：

(1)利用极限的分析定义：[$\varepsilon$-$N$]，[$\varepsilon$-$M$]，[$\varepsilon$-$\delta$]定义；

(2)利用极限存在准则一：(夹逼定理)若在 $x_0$ 的某一领域中，恒有 $h(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$，且 $\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$；

(3)利用极限存在准则二：单调有界数列极限必存在。

**三、连续**

1. 连续的定义($\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$).

2. 间断点的分类：①第一类间断点：跳跃间断点与可去间断点；②第二类间断点：无穷间断点、振荡间断点等。

3. 初等函数的连续性：初等函数在其定义域内是连续的。

4. 闭区间上连续函数的性质：最值定理，介值定理(包括零值定理)。

## 1.2 典型例题

本章重点是极限的计算与函数连续性的概念，难点是极限的分析定义与极限的证明。

**例 1** 填空题((1)～(4))

(1)已知 $f(x)=e^x$，$f[g(x)]=1-x^2$，$g(x)=$________，$g(x)$的定义域为__________.

**解** $f[g(x)]=e^{g(x)}=1-x^2$，$g(x)=\ln(1-x^2)$，它的定义域为：$1-x^2>0$，$-1<x<1$，即$(-1,1)$.

(2)已知 $f(x)=\begin{cases}x-1 & x\leqslant 1\\ x^2-1 & x>1\end{cases}$ 的反函数为 $\varphi(x)$，则 $\varphi(3)=$__________.

**解** $x\leqslant 1$ 时，$y=x-1$，$x=1+y$，$y\leqslant 0$；

$x>1$ 时，$y=x^2-1$，$x=\sqrt{1+y}$，$y>0$.

所以，$f^{-1}(x)=\varphi(x)=\begin{cases}1+x & x\leqslant 0\\ \sqrt{1+x} & x>0\end{cases}$ $\varphi(3)=\sqrt{1+3}=2$.

(3)已知 $x\to 0$ 时，$(1+kx^2)^{\frac{1}{2}}-1$ 与 $\cos x-1$ 是等价无穷小，则 $k=$ __________.

**解** 由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+kx^2)^{\frac{1}{2}}-1}{\cos x-1}\cdot \xlongequal[1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}]{(1+kx^2)^{\frac{1}{2}}-1\sim\frac{1}{2}kx^2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}kx^2}{-\frac{1}{2}x^2}=-k=$

1， 所以，$k=-1$.

(4)设 $f(x)=\begin{cases}a+e^{\frac{1}{x}} & x<0\\ b+1 & x=0\\ \dfrac{\sin 3x}{x} & x>0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$ __________，$b=$ __________.

**解** 由连续定义知：$\lim\limits_{x\to 0^-}(a+e^{\frac{1}{x}})=a$，$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin 3x}{x}=3$，$f(0)=b+1$，

$a=3=b+1$，

$\therefore\begin{cases}a=3,\\ b=2.\end{cases}$

**例 2** 单项选择题((1)～(4))

(1)设 $f(x)$ 为定义在$(-\infty,+\infty)$内的奇函数；$\varphi(x)$ 为定义在$(-\infty,+\infty)$内的偶函数，则(　　).

(A) $f[\varphi(x)]$，$\varphi[f(x)]$，都是奇函数

(B) $f[\varphi(x)]$，$\varphi[f(x)]$，都是偶函数

(C) $f[\varphi(x)]$，$\varphi[f(x)]$，都是非奇非偶函数

(D) $f[\varphi(x)]$是偶函数，$\varphi[f(x)]$是奇函数

**解** 设 $F(x)=f[\varphi(x)]$，则 $F(-x)=f[\varphi(-x)]=f[\varphi(x)]=F(x)$，所以，$f[\varphi(x)]$是偶函数；设 $G(x)=\varphi[f(x)]$，则 $G(-x)=\varphi[f(-x)]=\varphi[-f(x)]=\varphi[f(x)]=G(x)$，所以，$\varphi[f(x)]$是偶函数，即 $f[\varphi(x)]$与 $\varphi[f(x)]$都是偶函数，故选择(B).

(2)设 $f(x+1)=\begin{cases}1-x & x\leqslant 0\\ 1 & x>0,\end{cases}$ 则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=$(　　).

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) $-1$

**解**　因为 $f(x+1)=\begin{cases}1-x & x\leqslant 0\\ 1 & x>0,\end{cases}$ 令 $x+1=t, x=t-1$,

$f(t)=\begin{cases}1-(t-1) & t-1\leqslant 0\\ 1 & t-1>0,\end{cases}$　即 $f(t)=\begin{cases}2-t & t\leqslant 1\\ 1 & t>1,\end{cases}$

或 $f(x)=\begin{cases}2-x & x\leqslant 1\\ 1 & x>1,\end{cases}$ $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(2-x)=2$,故选择(C).

(3)已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=2$,则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{f(3x)}=(\quad)$.

(A) $\dfrac{2}{3}$　　(B) $\dfrac{3}{2}$　　(C) $\dfrac{1}{3}$　　(D) $\dfrac{4}{3}$

**解**　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{f(3x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\sin 2x}{2x}\cdot 2x}{\dfrac{f(3x)}{3x}\cdot 3x}=\dfrac{2}{2\times 3}=\dfrac{1}{3}$,故选择(C).

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{r^{2n+1}}{1+r^{2n}}$ 等于(　　).

(A) 0　　(B) $r$　　(C) $\dfrac{1}{2}$　　(D) 以上答案都不对

**解**　因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{r^{2n+1}}{1+r^{2n}}=\begin{cases}0 & |r|<1\\ -\dfrac{1}{2} & r=-1\\ \dfrac{1}{2} & r=1\\ r & |r|>1\end{cases}$　故选择(D).

**例 3**　设 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\lg(3-x)}}+\arcsin(1-2x)$

求:(1) $f(x)$ 的定义域;(2) $f(\ln x)$ 的定义域。

**解**　(1) $\begin{cases}3-x>0\\ \lg(3-x)>0\\ |1-2x|\leqslant 1\end{cases}$　$\begin{cases}x<3\\ 3-x>1\\ -1\leqslant 1-2x\leqslant 1\end{cases}$　$\begin{cases}x<3\\ x<2\\ 0\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$

解不等式组得 $0\leqslant x\leqslant 1$,即 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$.

(2)由(1)结果得 $0\leqslant x\leqslant 1$,现 $0\leqslant \ln x\leqslant 1, 1\leqslant x\leqslant \mathrm{e}$,即 $f[\ln x]$ 的定义域为 $[1,\mathrm{e}]$.

**例 4** 设 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}(x\neq 1,x\neq 0)$，验证：$f\{f[f(f(x))]\}=x$，并求：$f[f(\dfrac{1}{f(x)})]$.

**解** $f[f(x)]=\dfrac{\dfrac{x}{x-1}}{\dfrac{x}{x-1}-1}=\dfrac{x}{x-x+1}=x$，$f[f(f(x))]=\dfrac{x}{x-1}$，

所以，$f\{f[f(f(x))]\}=\dfrac{\dfrac{x}{x-1}}{\dfrac{x}{x-1}-1}=x$.

$f[\dfrac{1}{f(x)}]=\dfrac{\dfrac{x-1}{x}}{\dfrac{x-1}{x}-1}=1-x \quad f[f(\dfrac{1}{f(x)})]=\dfrac{1-x}{1-x-1}=\dfrac{x-1}{x}$.

**例 5** 设 $z=f(x+y)+y-2x$，已知当 $y=1$ 时，$z=x^2$，求 $f$ 和 $z$.

**解** 将 $y=1,z=x^2$ 代入原式得：

$$x^2=f(x+1)+1-2x,f(x+1)=x^2+2x-1=(x+1)^2-2,$$

所以 $f(x)=x^2-2,z=(x+y)^2-2+y-2x$.

**例 6** 设 $f(x)=\begin{cases}0 & x\leqslant 0\\ x & x>0\end{cases}$，$g(x)=\begin{cases}0 & x\leqslant 0\\ -x^2 & x>0\end{cases}$.

求：$f[f(x)]$，$f[g(x)]$，$g[g(x)]$，$g[f(x)]$.

**解** $f[f(x)]=\begin{cases}0 & f(x)\leqslant 0\\ f(x) & f(x)>0\end{cases}=\begin{cases}0 & x\leqslant 0\\ x & x>0\end{cases}=f(x)$.

$f[g(x)]=\begin{cases}0 & g(x)\leqslant 0\\ g(x) & g(x)>0\end{cases}=0$ [因为对于一切 $x$，$g(x)\leqslant 0$]，

$g[g(x)]=\begin{cases}0 & g(x)\leqslant 0\\ -g^2(x) & g(x)>0\end{cases}=0$ [因为对于一切 $x$，$g(x)\leqslant 0$].

$g[f(x)]=\begin{cases}0 & f(x)\leqslant 0\\ -f^2(x) & f(x)>0\end{cases}=\begin{cases}0 & x\leqslant 0\\ -x^2 & x>0\end{cases}=g(x)$.

**例 7** (1)求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$.

**解** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}\cdot\dfrac{\sin x}{x}\cdot$

$\dfrac{1-\cos x}{x^2}\xlongequal{1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}\cdot\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\dfrac{1}{2}.$

(2)求 $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\sqrt{\dfrac{1}{x}+\sqrt{\dfrac{1}{x}+\sqrt{\dfrac{1}{x}}}}-\sqrt{\dfrac{1}{x}-\sqrt{\dfrac{1}{x}+\sqrt{\dfrac{1}{x}}}}\right).$

**解** 令 $\dfrac{1}{x}=t$，当 $x\to 0^+$ 时，$t\to+\infty$.

$$原式=\lim_{t\to+\infty}\left(\sqrt{t+\sqrt{t+\sqrt{t}}}-\sqrt{t-\sqrt{t+\sqrt{t}}}\right)$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\frac{t+\sqrt{t+\sqrt{t}}-t+\sqrt{t+\sqrt{t}}}{\sqrt{t+\sqrt{t+\sqrt{t}}}+\sqrt{t-\sqrt{t+\sqrt{t}}}}$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\frac{2\sqrt{t}\sqrt{1+\dfrac{\sqrt{t}}{t}}}{\sqrt{t}\left[\sqrt{1+\dfrac{\sqrt{t+\sqrt{t}}}{t}}+\sqrt{1-\dfrac{\sqrt{t+\sqrt{t}}}{t}}\right]}$$

$$=\frac{2}{2}=1.$$

(3) 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1-2x}-\sqrt[4]{1+2x}}{\sin 3x}.$

**解** 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt[3]{1-2x}-1)-(\sqrt[4]{1+2x}-1)}{\sin 3x}$

$$\xlongequal[\sin 3x\sim 3x]{\sqrt[3]{1-2x}-1\sim\frac{-2x}{3},\ \sqrt[4]{1+2x}-1\sim\frac{2x}{4}}\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{2x}{3}-\dfrac{x}{2}}{3x}=-\frac{7}{6}.$$

(4) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{x^2+2nx}{2n^2}\right)^{-n}.$

**解** 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{x^2+2nx}{2n^2}\right)^{\frac{2n^2}{x^2+2nx}\cdot\frac{x^2+2nx}{2n^2}\cdot(-n)}=e^{\frac{-2x}{2}}=e^{-x}.$

(5) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\arctan nx}{\sqrt{n^2+n}}$.

**解** 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\arctan nx}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}})=\begin{cases}-\dfrac{\pi}{2} & x<0\\ 0 & x=0\\ \dfrac{\pi}{2} & x>0.\end{cases}$

(6)求极限:$\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{4}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}$.

**解** 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{4}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}2\sin\dfrac{x}{2^n}}{2\sin\dfrac{x}{2^n}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{4}\cdots\cos\dfrac{x}{2^{n-1}}\sin\dfrac{x}{2^{n-1}}}{2\sin\dfrac{x}{2^n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{4}\cdots\cos\dfrac{x}{2^{n-2}}\sin\dfrac{x}{2^{n-2}}}{2^n\sin\dfrac{x}{2^n}}$$

$$=\cdots=\lim_{n\to\infty}\frac{\cos\dfrac{x}{2}\sin\dfrac{x}{2}}{2^{n-1}\sin\dfrac{x}{2^n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{2^n\sin\dfrac{x}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{\dfrac{\sin\dfrac{x}{2^n}}{\dfrac{x}{2^n}}\cdot x}$$

$$=\frac{\sin x}{x}.$$

**例 8**

(1)设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+x)}{x} & x>0 \\ 0 & x=0 \\ \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} & -1\leqslant x<0,\end{cases}$

试研究 $f(x)$在 $x=0$ 处的连续性。

**解** $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=1.$$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1,$$

而 $f(0)=0$,所以 $f(x)$在 $x=0$ 处不连续。

(2)讨论函数 $f(x)=\begin{cases}e^{\frac{1}{x}} & x<0 \\ 0 & x=0 \\ x\arctan\dfrac{1}{x} & x>0\end{cases}$ 的连续性。

**解** 在 $x<0$ 与 $x>0$ 时,$f(x)$显然连续。

$x=0$ 点: $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}e^{\frac{1}{x}}=0$, $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}x\arctan\dfrac{1}{x}=0$

$f(0)=0$,所以在 $x=0$ 处连续,由此知对一切 $x$ 值,$f(x)$均连续。

(3) 设 $f(x)=\sin x$,$g(x)=\begin{cases}x-\pi & x\leqslant 0 \\ x+\pi & x>0,\end{cases}$ 试讨论 $f[g(x)]$在 $x=0$ 处的连续性。

**解** $f[g(x)]=\sin g(x)=\begin{cases}\sin(x-\pi) & x\leqslant 0 \\ \sin(x+\pi) & x>0\end{cases}=\begin{cases}-\sin x & x\leqslant 0, \\ -\sin x & x>0.\end{cases}$

所以在$(-\infty,+\infty)$内 $f[g(x)]=-\sin x$,在$(-\infty,+\infty)$内连续。

**例 9** 求下列函数的间断点,并判别其类型。

(1) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+2} & x<-2, \\ x & -2\leqslant x\leqslant 1, \\ (x-1)\sin\dfrac{1}{x-1} & x>1.\end{cases}$

**解** $x=-2$ 点：$\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{1}{x+2}=-\infty$,

$$\lim_{x\to 2^+}f(x)=\lim_{x\to -2^+}x=-2, f(-2)=-2.$$

$x=-2$ 为第二类无穷间断点；

$x=1$ 点：$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}x=1$,

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}(x-1)\sin\frac{1}{x-1}=0, f(1)=1.$$

所以 $x=1$ 点是第一类跳跃间断点。

(2)函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1} & x\neq 0 \\ 1 & x=0.\end{cases}$

**解** $x=0$ 点，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\dfrac{1}{2^{\frac{1}{x}}}}{1+\dfrac{1}{2^{\frac{1}{x}}}}=1$,

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}=-1, f(0)=1.$$

$\therefore x=0$ 为第一类跳跃间断点。

(3) $f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^n}{1+x^n} & x\geqslant 0 \\ \sqrt[3]{x} & x<0\ .\end{cases}$

**解** 当 $x=0$ 时，$f(0)=0$.

当 $0<x<1$ 时，$f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^n}{1+x^n}=0$.

当 $x=1$ 时，$f(x)=\dfrac{1}{2}$.

当 $x>1$ 时，$f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^n}{1+x^n}=1$.