科 學 譯 叢

——數學：第1冊——

三十年來的蘇聯數學

度量性實變數函數論

中 國 科 學 院 出 版

科 學 譯 叢
——數學：第1册——
度量性實變數函數論
МЕТРИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ
ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО
原文係 МАТЕМАТИКА В СССР ЗА ТРИДЦАТЬ ЛЕТ
一書中之一部分，Государственное Издательство
Технико-Теоретической Литературы 1948 年出版

著 者	Н. К. Бари,	А. А. Ляпунов
	Д. Е. Меньшов,	Г. П. Толстов
譯 者	孫 以 豐	
出版者	中 國 科 學 院	
印刷者	北 京 新 華 印 刷 廠	
總經售	中 國 圖 書 發 行 公 司	

書號：53007 （數）01　　1953 年 4 月初版
（京）0001—2,800　　定 價 4,000元

目　　錄

前　言

二十世紀剛開始的時候，產生了點集測度的理論。並且一種非常有効果的積分定義也被發現了（勒貝格）。

在很短的時間之內，這些觀念就深深地滲入了好幾支數學分析，引起一聯串新問題；同時對於古典數學分析中的問題也有了許多本質上不同的新觀點。譬如像函數展開爲三角級數的問題，尋找原函數的問題，求弧長及曲面面積的問題等都得到了更清楚更深刻的意義。屬於這一個圈子的思想後來就形成了數學裏新闢的一支，所謂度量性實變數函數論。在二十世紀最初的十年當中，這個新開的領域吸引了相當多數的數學家，並且得到一般的認識。二十世紀第二十年代之初，莫斯科學派在這方面，和其他有些學派共同佔有榮譽的地位。莫斯科學派證明了兩個非常有價值的定理，這兩個定理揭露了度量性函數論的中心觀念——可測函數，和古典分析中基本觀念之間的關係：

收斂的可測函數叙列，除開一個測度可以任意小的點集之外，爲一致收斂（Д. Ф. 葉果洛夫）。

可測函數，除開一個測度可任意小的點集之外，是連續的（Н. Н. 盧辛）。

隨後，在1915年出現了盧辛有名的博士論文"積分與三角級數"。這篇論文裏包含很多具有頭等重要性的結果，並且是後來較年輕的數學家們在這個方向許多工作的引子。

後來盧辛的工作重點轉到描寫性點集理論。可是他對於度

原
书
缺
页

數論中的思想密切有關的。Л. Г. 史尼爾曼在整數論中引入了測度的觀念，並且得到對於解決高德巴赫問題極爲基本的結果。

A. Я. 赫因慶與 A. Н. 柯莫果洛夫在幾率理論當中引入了很多度量性函數論的思想，以致使幾率論的面目完全改觀。這樣使得幾率論和其他支的近代數學密切地結合起來，並且幾率論本身的主題也比以前增廣了許多，同時也增加了在技術和自然科學上應用的新的可能性。

在二十年代中，列寧格拉也形成了一個以 Г. М. 費希金果夾與 Н. М. 龔特爲首的實函數論學派。列寧格拉的數學家們對於推廣實函數理論所能影響到的範圍也儘過很大的力氣。龔特將史蒂捷積分及可加集函數的觀念廣泛地應用到物理上去。

A. Д. 亞歷山大洛夫得到實函數論在各支幾何學上的許多應用。

喜爾柏特特徵值理論，無窮維線性空間的觀念和度量性函數論的觀念結合起來就成了近代數學當中很大的一支——汎函分析。這一支數學的誕生，蘇聯數學家是有很大功勞的，不過這些結果的詳細陳述不在本文範圍之內。

必須指出度量性函數理論的思想在各支數學中的應用是現代的特徵。M. A. 拉弗倫捷夫，Л. A. 劉斯特尼克，H. H. 波果劉波夫在變分學中引入這一類的思想。B. B. 斯捷潘諾夫對於殆週期函數的理論中，C. Л. 索波列夫對於偏微分方程論中，B. A. 達達可夫斯基對於抽象羣論引入了度量性函數論的觀念。在動力系統，積分方程，以及定性的微分方程論中應用就更多了，以致難於分辨究竟誰是首創者。

最後可以强調指出的就是度量性函數論的影響已經通過汎函分析而及於理論物理。

與向很廣的應用範圍推廣同時，度量性函數論中的問題也不斷地向深處發展。在這方面蘇聯的學者經常担任着重要角色。

現在我們就是要簡單地叙述一下蘇聯數學家在度量性實變數函數論方面的工作。

寫本文的時候由於時間限制*)，距離完美的境界是很遠的，這一點非常抱歉。不但如此，由於上述的原因，可能遺漏是相當多的，作者也不得不事先提醒讀者。

本文關於殆週期函數的部份，基本上是由B.B.斯捷潘諾夫與Б.М.列文坦完成；寫關於級數的一部份時C.Б.斯捷契金曾參加工作；A.И.普賴斯納及B.B.涅美次基曾提供過很多有價値的建議；E.M.蘭底斯，A.M.毛恰諾夫，A.C.克郎若德，A.Л.布魯得諾，H.Я.維淩金，B.Я.柯次洛夫，Ю.A.史賴德等幫助校閱；對於這些幫助，作者們謹致最深的謝意。沒有這些援助，作者們是不能如期完成任務的。

這篇概覽之中所要提到的是蘇聯學者在度量性實變數函數論方面的工作，就是，從測度理論的觀點出發，討論數學分析上基本觀念（函數，導函數，積分，級數）的工作。對於函數項的級數，不僅考慮與收斂有關的問題，並且要考慮在各種不同方法之下，求和可能性的問題。因此，對於常數項發散級數

*) 原編者註：原來約定寫本文的作者後來放棄了計劃。因此，本文現在的作者們就只能有很短的一段時間來安排工作。

的求和法也不得不加以闡述。由於測度理論已經很深地滲入了殆週期函數理論中，因此非常自然地把殆週期函數也列爲度量性函數論的一部份。

函數論其他與測度理論無關的部份（如像函數的多項式逼近，擬解析函數，描寫性函數論等），將不在這裏提到。這個文集裏另有幾篇是貢獻於這方面的。

本文第一節爲 Н. К. 巴利，А. А. 里阿普諾夫與 Г. П. 托爾斯托夫所合寫；第二節爲 Д. Е. 門壽夫所寫；第三節爲 Н. К. 巴利所寫；第四節爲 Н. К. 巴利與 Д. Е. 門壽夫合寫。

第一節　可測函數·積分·微分

在可測函數度量性質研究的領域之內，首先要提出 A.Я.赫因慶的重要工作〔1〕。在叙述這篇論文之先，我們先叙述一些關於任意一個可測函數增加及減少的性質的結果。

赫因慶稱一個函數在點 x 爲近似有向，假如，除開一個在 x 密度爲零的點集之外，這個函數爲增函數，或減函數，或常數。函數稱爲在某個測度爲正的點集上近似有向，是指它是在這點集上殆遍近似有向。

闡明近似有向函數的結構的基本定理是：

可測函數在其定義區間（或測度爲正的點集）爲近似有向的充分且必要條件就是，除開一個測度可以任意小的點集之外，它和一個只有有窮多個極大極小的連續函數相等。

研究近似有向性其趣味是在於，一個點集上的近似有向函數在此點集上殆遍有近似導函數*)。

唐若阿曾經證明，任何一個可測函數是殆遍近似連續的。B.B.斯捷潘諾夫指出上述命題之逆亦成立。因此，殆遍近似連續性爲可測函數的特徵性質。如果可測函數同時又具有近似有向性，那麼由上述赫因慶定理，近似導函數也就殆遍存在了。可是赫因慶舉出例來說明有可測函數存在，僅在一個測度爲零

---

*) 照通常的說法，若一種性質在某一點除開一個在此點密度爲零的點集之外成立，則這種性質可以冠以近似二字。如是則近似連續，近似導函數等的意義可知。

的點集上近似有向。同時他又建立了下面關於最一般的可測函數的定理。

可測函數，除開一個測度爲零的點集之外，在任一點，或者是有近似導函數，或者關於某一在此點上密度爲1的點集所作的兩個上導數爲$+\infty$，而兩個下導數爲$-\infty$。

在這篇論文當中 A. Я. 赫因慶把當時已知的主要的對於導函數觀念的推廣（對稱導函數，波黑兒導函數之平均積分，近似導函數），以及某些新的推廣（廣義導函數，由敘列所定之導函數）作了有系統的整理。這些微分法被排成一個次序，在其中每一種方法比在它之前的"强"，比在它之後的弱。

很自然地會發生這樣的問題：是否可定義一種求導函數的方法，使得每一個連續函數殆遍有導函數？這個問題的答案是反面的，A. H. 柯莫果洛夫[2]證明，存在連續函數，不可能具有勒貝格可測導函數*)。這就說明了不可能建立一種自然的導函數定義，對所有的連續函數有效。

必須指出的就是上述A.Я.赫因慶的那篇論文乃是那方面奠定基礎的工作，在很長一段時間那一方面的問題爲它所决定。在其中 A. Я. 赫因慶創了不少新的有力的方法，其價值一直到現在仍然不減。

Г. П. 托爾斯托夫[1]繼續A.Я.赫因慶關於近似連續性及近似微分可能性的研究。在他所得的一聯串結果當中，我們提出關於恰當近似導函數描寫性的估計。他證明，這類函數所屬的

*）這裏假設，無論所出現的導函數其定義如何，都滿足某些自然的要求（可以從微分號下移出常數因子，導函數之和爲和之導函數等）。

拜爾類不能高於第一類。

Ю. Б. 格麥爾[1]，在研究史瓦爾茲對稱導函數的觀念時，對第一階對稱導數得到一個定理，和關於普通導數的唐若阿定理類似，並且證明，對第二階對稱導函數類似的命題不成立。同時他又對後者得到和上述 А. Я. 赫因慶定理類似的定理：

設可測函數 $f(x)$ 在點集 E 上殆遍爲有窮，則除開一個測度爲零的點集之外，或者第一二階近似導函數 $f'_{ac}(x)$ $f''_{ac}(x)$，以及史瓦爾茲近似導函數 $D^2_{ac}f(x)$ 存在，並且 $D^2_{ac}f(x)=f''_{ac}(x)$；或者

$$\overline{\lim}\ \frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}=+\infty,$$

$$\underline{\lim}\ \frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}=-\infty,$$

這裏 h 由任何關於 0 點對稱並且在 0 點下密度爲正的點集上趨於零。

Ю. Б. 格麥爾證明瓦雷－普山導函數當階數 $n\geqslant 3$ 時，其值取無窮大之點可能成一個測度爲正的點集。這件事對於普通導函數及近似導函數是不會發生的。

關於導數的文章我們先指出 Л. В. 康托洛維奇[1]。他得到一些充分條件，判斷已給的四個函數，在某些特殊的點集上，是否是連續函數的四個導數。並且也討論了對於上導數及下導數相類似的問題。

В. Н. 文尼阿米諾夫[1]爲了研究導數，引入了一種方法造“覆面”，所謂“覆面”就是一個可求長曲線，它和一個已給的

連續系統（例如像若當曲線）在測度爲正的點集上相切。有這個方法在手裏，B.H. 文尼阿米諾夫就具備了一個有力武器。把這個方法應用到曲綫 $y=f(x)$ 上去，其中 $f(x)$ 爲連續，他重新得到關於導數的唐若阿定理。在所有的關於導數的理論中間，也許他這個是最簡單的，並且無疑地是最直覺的。

列寧格勒的數學家 И. Н. 李柏爾曼〔1〕得到和唐若阿定理類似的關於連續函數導函數之導數的定理。他也得到，任意函數關於某一已給的函數 $\varphi(x)$ 微分時，唐若阿定理成立的充分且必要的條件。

以上所說全是關於微分觀念的推廣。現在開始說到積分觀念的種種推廣。

П. С. 亞歷山大洛夫〔1〕證明狹義唐若阿積分和派郎積分相等。因此就把狹義唐若阿積分定義中涉及超限數的部份避免了。

П. И. 羅曼諾夫斯基〔3〕從另外的辦法得到唐若阿－赫因慶積分的定義，用不着引入超限數。

Г. П. 托爾斯托夫〔3〕利用擴充了的導函數觀念把派郎積分加以推廣，並且證明新定義和唐若阿－赫因慶定義相等。他又研究了柏基爾積分定義，並證明柏基爾可積分函數的全體和唐若阿－赫因慶可積分函數的全體部分地相重疊。

在 1927 年的第一次全俄羅斯數學會上，Ю. 果多夫斯基報告了一個很出人意外的結果：有在唐若阿－赫因慶意義之下不可積分的恰當導函數存在*)。由於果多夫斯基的遇難，這個結

---

*) 唐若阿證明，若恰當導函數爲處處有窮，則在他的意義之下可積分。若將處處爲有窮的假設取消，則 Ю. 果多夫斯基舉例說明該定理不再繼續成立。

果也就遺失了，過了很多年之後才爲 В. Я. 柯次洛夫重新得到。

Ю. 果多夫斯基[1]討論關於函數爲其導函數唯一決定的性質。他證明，若連續函數處處皆有有窮的或無窮大的導函數存在，並且殆遍這個導函數爲零，則該函數必爲一常數。這個結果後來爲 Г. П. 托爾斯托夫推廣到近似導函數。

如果將導函數觀念向另外一個方向推廣，討論一個函數關於另外一個函數的微分，就會產生如勒貝格所曾提出過的問題：假如一個函數關於另外一個連續函數的導函數爲零，是否這個函數一定是常數？И. Г. 畢特羅夫斯基早期的[1, 2]得到這個問題正面的答案。

在結束關於積分觀念推廣的工作的陳述時，不能不提到 Н. Н. 盧辛在他博士論文中所得的非常一般性的結果：若$f(x)$爲可測函數並且殆遍爲有窮，則必存在連續函數 $F(x)$，殆遍滿足$F'(x)=f(x)$。由這個定理就知道對於任何一個可測函數皆可尋找其原函數。Н.Н.盧辛在實際造原函數時注意到，在他的方法之下，方程$F'(x)=f(x)$雖殆遍成立，不過只是在一個屬於第一範疇的點集上。於是他就提出了這個結果可否加强的問題，問是否上述的方程式能使之在第二範疇的點集上成立？Г. П. 托爾斯托夫[2]得到這個問題反面的答案。

Н.Н.盧辛定理雖然如此廣義，可是並不保證可測函數積分存在的唯一性，因爲若只是要求原函數殆遍滿足 $F'(x)=f(x)$，而沒有要求處處成立，則兩個原函數之差也就不一定是常數。

Н. Н. 盧辛又想解決這樣的問題，就是從所有那些原函數

當中，用一種自然的辦法選出一個來，稱之爲不定積分，同時，與此關聯，他對勒貝格及唐若阿不定積分的特徵性質作了精深的研究，並且介紹了變差爲零的函數的觀念。不過盧辛以及後來繼續他的工作的人，希望用一種自然的辦法使所得的不定積分是唯一決定的，都未能成功。我們現在知道這件事情本身也並非是一件自然的事。因爲A.H.柯莫果洛夫[1]證明，如果可以定義一種積分對任何可測函數都有效，並且滿足某些自然的要求*)，那麼就可利用這種積分定義，避免經過蔡爾美羅公理造出勒貝格不可測點集來。不過近來數理邏輯方面的進展令人相信這種造的步驟是不能實際作出來的。

到現在爲止，我們只提到了可測函數的構造以及微分積分觀念的推廣。但是就函數的理論而言，一件很重要的事就是去研究個別的特殊函數類以及它們之間的關係。譬如像絕對連續函數就代表一類很重要的函數，因爲絕對連續性是勒貝格不定積分的特徵性質。所以，對於這類函數就自然有比較更爲詳細的討論。Г.M.費希金果次[1]證明，兩個絕對連續函數f，φ的複合函數$f[\varphi(x)]$不一定是絕對連續函數。他提出，並且後來也解決了這樣的問題，問對f（或φ）加上甚麼條件可使對於任何絕對連續的φ（或f）所得的複合函數仍爲絕對連續。

H. K. 巴利與 Д. E. 門壽夫[1, 2]得到，連續函數是兩個絕對連續函數的複合函數的充分必要條件。由他們這個判斷條件特別可以推得，絕對連續函數的三重複合並不能比二重得出更

*) 能够從積分號下移出常數因子，二可積分函數之和仍爲可積分，並且等於二者積分之和，以及種種其他要求。

多的新函數來。

H.K. 巴利[3,4]也是貢獻於這方面的，她得到下面的結果：任何一個連續函數可以寫成絕對連續函數的三重複合之和，可是有些連續函數不能寫成絕對連續函數二重複合之和。

H.K. 巴利[5]發現，有界變差函數的複合情形就完全不同。一方面她證明，任何一個連續函數必能表示成有有界變差函數二重複合之和，另外一方面證明，由有界變差函數作出來的複合函數，對於每一個正整數n，n重複合必定引出新函數來，就是說這些函數不能由重數小於n的複合引出。即使將複合函數的重數推廣到第二類超限數α，巴利證明，對每一個α，第α重複合函數必定引出新的函數來，這些新函數不是α重以前的複合函數。同時又存在連續函數不是任何α重複合函數。

現在我們轉到多變數函數這一方面來。

關於兩個或多個變數函數的微分可能性，B. B. 斯捷潘諾夫[1,4]曾經研討過。他得到，在某一個已知點集上全微分殆遍存在的充分且必要的條件。給了近似全微分的定義以後，他證明，如果近似偏導函數在某一個可測點集上存在，則近似全微分必在該點集上殆遍存在。(相類似的定理對於普通偏導函數及微分是不成立的。) 由這個定理立刻可推得，在勒貝格意義之下可求積的曲面 $z=f(x,y)$，殆遍有近似切面。這個結果也爲M. A. 薩利斯基獨立得到。

A. Д. 美史基斯[1]研究了雙變數函數在它的定義區域的邊界上全微分存在的問題。

Г.П. 托爾斯托夫[4]研究兩個函數 $P(x,y)$ 及 $Q(x, y)$ 是某

一函數的偏導函數的條件。出乎一般的想法之外，他舉例說明可能有連續函數 $P(x,y)$ 及 $Q(x,y)$ 在某一閉正方形上處處滿足

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

可是 $Pdx+Qdy$ 並非全微分。另外一個出人意料之外的結果就是他舉出一個函數 $f(x,y)$，處處有第一階偏導函數及第二階混合偏導函數，可是在一個測度為正的點集上

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\neq\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}。$$

同時他又證明，如果不假設混合偏導函數處處存在，上述不等式可以使之殆遍成立。

Г. П. 托爾斯托夫又證明了下列的結果：

如果在某一區域函數 $f(x,y)$ 的偏導函數一直到 n 階的全都存在（在這個條件之下，$f(x,y)$ 可以在一個測度為正的點集上不連續），則凡是階數 $<n$ 的混合偏導函數，處處均與微分的次序無關；不過對於第 n 階導數，此事僅殆遍成立。這個結果對於多個變數的函數依然正確。

對於偏導函數描寫性的性質有下列的結果：如果函數 $f(x,y)$ 具有直到某一階數為止的偏導函數，則這些偏導函數所屬的拜爾類不能高於第一類。對於 $m+1$ 個變數的函數，在類似的條件下各偏導函數最高屬於第 m 階拜爾類。

同時又證明，某些偏導函數之不存在，可以促使存在的那些偏導函數所屬的類數增高。

A. C. 克郎若德得到一聯串關於多變數函數的結果。對於

這種函數他研究了變差的觀念，並且注意到對於n個變數的函數自然地可以定義不僅僅一個，而是性質上不同的n個變差。他說明，一個變數時，在變差爲有界的假設之下所能推出來的性質，當變數的數目爲n時，要得到同類的性質，就有時需假設所有的變差爲有界，而有時只要某些個變差爲有界，或者只要假設變差當中的任意一個爲有界就够了。

例如當$n=2$時，在面性變差爲有界的假設之下就可推得近似全微分殆遍存在。如果假設面性和線性變差均爲有界，則可推得普通全微分殆遍存在。如果只假設線性變差有界，可以推得函數能表示爲兩個“弱單調”函數*)之和。

A.C. 克郎若德對於多變數函數論的研究，其卓越之處在於着重地反映了函數定義區域的高維性。除了變差以外，他又對多變數函數引入了相類於單調性，導函數，積分等的觀念。這種研究的基本方法依賴水平點集的討論。

A. C. 克郎若德與 E. M. 郎狄斯[1]討論n個變數多次可微分函數的水平點集。若ξ點滿足 $\operatorname{grad} F(\xi)=0$ 則稱之爲函數F的奇異點。他們證明，n個變數n次可微分函數F的奇異點，被F映射成一個測度爲零的點集。由此立刻可推得n個變數n次可微分函數F，幾乎所有的水平點集都是每個由有限個可微分流形組成。這個結果對於n個變數$n-1$次可微分函數是不一定成立的。

И. Я. 費爾欠科與 A. H. 柯莫果洛夫[1,2]討論兩個變數函

*) 由於 A. C. 克郎若德的工作，單調的觀念已推及多變數函數。