

21 世纪

数学教育探索丛书

全国教育科学
“九五”规划重点课题
研究成果

开放题——数学 教学的新模式

戴再平 等著

上海教育出版社

21世纪 数学教育探索丛书

丛书主编 顾冷沅

副主编 郑毓信

戴再平

全国教育科学
“九五”规划重点课题
研究成果

开放题——数学 教学的新模式

戴再平 等

上海教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

开放题:数学教学的新模式/戴再平主编. —上海:
上海教育出版社, 2004. 1

(21世纪数学教育探索丛书/顾泠沅主编)

ISBN 7—5320—9195—3

I. 开... II. 戴... III. 数学课—教学研究—中小
学 IV. G633. 602

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2004) 第 001810 号

21世纪数学教育探索丛书

开放题

——数学教学的新模式

戴再平等著

上海世纪出版集团 出版发行
上海教育出版社

易文网: www.ewen.cc

(上海永福路123号 邮政编码:200031)

各地新华书店经销 苏州望电印刷有限公司印刷

开本 890×1240 1/32 印张 9.75 插页 4 字数 226,000

2004年1月第1版 2004年1月第1次印刷

印数 1-5,000本

ISBN 7-5320-9195-3/G·9070 定价:(软精) 20.00元



戴再平，男，1933年生，浙江奉化人，现为浙江教育学院教授。1953年毕业于浙江师范学院。曾担任中学数学教学工作，1962年以后在黑龙江省教育学院、浙江教育学院工作，长期从事数学教育的教学和研究。是荣获国务院政府特殊津贴的专家，浙江省第7届人民代表大会代表。近二十余年来发表数学教育、教学论文多篇，在上海教育出版社、江苏教育出版社、高等教育出版社、人民教育出版社、九章出版社(台湾)等11个出版社出版《数学习题理论》、《数学教育研究导引》(合著，第一副主编)、《数学方法及解题研究》(合著，第一作者)及《中小学数学开放题研究丛书》(五卷集，主编，主要作者)等专著、教材近40种，其中《数学习题理论》一书获全国第三届优秀教育图书二等奖、浙江省教育学会教育科研成果一等奖、浙江省教育委员会高师院校优秀教育教学成果一等奖、浙江省“八五”教育科研重大成果二等奖和第三届国家图书奖提名奖。主要社会兼职(曾任及现任)：浙江教育学院学术委员会副主任、全国高师数学教育研究会常务理事、浙江省高师数学教育研究会理事长、浙江省数学会常务理事兼数学教育工作委员会主任、浙江省中学数学教育研究会副理事长及学术委员会主任、浙江省中小学教材审定委员会中学数学科主审委员、华东师大兼职教授、教育部国家义务教育阶段数学课程标准编制组顾问。

21 世纪数学教育探索丛书

主 编 的 话

长期以来,学校数学教育的实际研究几乎完全集中在固有数学知识的传授上,为了成为一名合格的数学教师,首先必须懂数学,如有可能的话,还必须知道用什么方法将这些知识介绍给学生,教师们由此积累数学教学实践经验.现在,人们已渐渐超越了这种简单化的方法,因为数学教育可以提出许多需要回答的理论问题.如果一个数学教师打算使学生更好地学习这门课程,并在教育总构架下发挥充分而适当的作用,那么他就必须回答诸如为什么教、教什么、教谁、怎样教以及效果如何等问题,这样,学科教育的一般理论研究便受到普遍关注.到了世纪之交,探讨数学教育理论问题的著作日见其丰,数学教学经验的总结也以惊人的速度在增加,但人们终于发现,在理论与实践结合的中介环节上却相对薄弱,囿于经验的描述与紧迫的时代需求不相吻合,追求理想的假设与常态的学校生活差距太大.于是如下的国际背景凸现在我们面前:各路人马纷纷走出误区,一线的教师开阔理性视野、提升教学能力与水平成为趋势,理论工作者走进学校课堂寻找解决教学问题的大策略成为时尚,学校数学教育在如此强劲的两极张力中作为重要角色被推上了历史舞台.在此转折时期,从国际、国内不同的角度和多元的表达方式来介绍、探讨 21 世纪数学教育的理论与

实践问题,观察、思考我国的数学教育,便自然而然地成为编撰这套丛书的宗旨和要义。

事实上,在如上所述的观察、介绍、借鉴乃至思考中,我们必将发现我国今天所发生的许多数学教育的进展甚至问题,都已与国际社会在数学教育方面所发生的变化有着无法分割的紧密联系:世界正在密切注视这个教育人口最多的国家,我国数学教育的变革和发展已与国际数学教育的发展息息相关。正是在这个意义上,我国数学教育探索已超出了地域时空的限制,其意义已经具有国际特征。正如全球的数学教育必然包括中国的数学教育,并作为其发展的组成部分,我们也应把我国数学教育的研究与发展置于世界数学教育的视野之中,简单化的优劣之辨的做法在这里已不能揭示我国数学教育所包含的全部内涵与价值,而构筑一个相互吸收、富有本民族特色的新地带,也许才是辩证法指引的必由之路。由此而论,我国数学教育的探索需要扩大其研究领域,突破以往的研究方式,不再是东方和西方、传统和现代、理论和实际的六方对峙,而是融入国际意识的跨文化、大系统、重现场(现实复杂性)的研究观念和方法。在此我们应不惜痛下功夫,扫除那种热衷于空谈、浮游于形式的不良习惯,树立实事求是、返璞归真的好风气,使探索的内涵与价值得以真正的升华和张扬。

顾冷流

序

江泽民同志说:“一个没有创新能力的民族难以屹立于世界民族之林。”时代呼唤着数学教育工作者要转变教育观念,改革人才培养模式,激发学生独立思考和创新的意识.目前的中小学数学教材中,习题基本上是为了使学生了解和牢记数学结论而设计的,在这种情况下,学生在学习过程中产生了以死记硬背代替主动参与,以机械方法代替智力活动的倾向.为了改变这一情况,使数学教育适应时代的需要,我们选择了数学开放题作为一个切入口,希望通过开放题的引入,促进我国数学教育的开放化与个性化,特别是有利于学生创新精神的培养和实践能力的形成.

数学开放题在过去的教学中曾经有过不少的例子,但是对它在数学教学中的地位肯定,还是近二十年来的事.1993年,我们开始进行数学开放题的教学实验,有关的研究很快成为一个亮点;1997年,全国教育科学规划办批准“开放题——数学教学的新模式”立项为“九五”规划重点课题;1998年10月,近百名国内外数学教育学者和中小学教师云集上海,举行了“‘数学开放题及其教学’学术研讨会”.1999年,我国建国以来的第八次基础教育课程改革启动,教育部明确指示:初中毕业、升学数学考试“应设计……开放性问题”(《关于2000年初中毕业、升学数学考试改革指导意见》),教育部制订的《全日制义务教育数学课程标准(实验稿)》(2001年7月)及《普通高中数学课程标准(实验)》(2003年4月)更正式将开放题列入其中.时代的需要和改革的要求,使数学开放题成为我

国数学教育的一个研究热点,同时我国数学开放题的研究成果也引起了国际上同行的注意.

为反映我国数学开放题的研究进展情况,构建数学开放题的理论框架,我们约请了原国际数学教育委员会执行委员、华东师大张奠宙教授等学者编写了本书,编写过程中得到了各地包括香港地区的学者和教师的热忱支持与帮助,我们对这些先生和女士表示诚挚的感谢!

虽然,数学开放题已进入我国基础教育数学课程与考试,但数学开放题是一个新课题,一个新的事物,从这个意义上说,本书终究是不可能完善的.“纸上得来终觉浅,绝知此事须躬行”.对本书存在的问题和不足,我们衷心地希望得到大家的批评与指正.

戴再平

2003年10月

目 录

第一章 时代的呼唤	1
1.1 一点历史:从欧几里得到牛顿	2
1.2 推理数学与直观数学	3
1.3 儒家的“考据文化”与逻辑推理	5
1.4 数学教育的开放性	10
1.5 开放题教学:“双基+创新”教育的载体	13
第二章 国际、国内研究概况	15
2.1 国际巡礼	15
2.2 日本:从“未完结问题”到“课题学习”	18
2.3 我国的研究情况	23
第三章 数学开放题的概念及其分类	29
3.1 数学开放题的概念的界定	29
3.2 数学开放题的特点	33
3.3 数学开放题的分类	39
第四章 开放题——数学教学的新模式	52
4.1 构建新的教学模式是素质教育的核心问题	52
4.2 开放题——数学教学的新模式	54
附:“钟面数字问题”的教学设计	58
第五章 开放题与数学课堂文化	64
5.1 开放题课堂教学中的内在文化(精神文化)	65
5.2 开放题课堂教学中的外在文化(制度、行为文化)	79

第六章 开放式数学课的剖析	94
6.1 理论框架	95
6.2 一堂课的剖析	97
6.3 学生体验了什么	107
第七章 数学开放题与学困生的转化	110
7.1 数学学困生概说	111
7.2 面向学困生的数学开放题的特色	123
7.3 数学学困生的转化与开放题	128
第八章 现代教育技术与数学开放式教学	137
8.1 计算机学习环境的特点	138
8.2 使用计算机技术解决数学开放题的策略	144
8.3 技术支持的以数学开放题为载体的开放式教学	157
8.4 结论与讨论	174
第九章 应用背景下的数学开放题	178
9.1 数学应用中的开放性问题	178
9.2 应用背景下的开放题设计	183
9.3 应用和建模的教学活动的开放性设计	188
附：现实生活中开放性问题设计的素材	191
第十章 数学开放题的编制	198
10.1 弱化陈题的条件,使其结论多样化	198
10.2 隐去陈题的结论,使其指向多样化	204
10.3 在既定的条件或关系下,探讨多种结论	210
10.4 给出结论,寻求使结论成立的充分条件	213
10.5 比较某些对象的异同点	217
10.6 在既定的条件或实际情景中,设计解决某些 问题的方案	219
第十一章 用开放性问题进行数学教学评估改革	228

目 录

11.1	对“质”的学习结果的评估	228
11.2	封闭性问题和传统数学成绩评估的不足	230
11.3	开放性问题和高层次思维	233
11.4	评估的层次和分层评估的框架	236
11.5	数学测验方法的设计	238
11.6	学生成绩的评估结果	240
11.7	对数学学习结果的探讨	247
11.8	研究结果的启示	248
第十二章	进入考试的数学开放题	251
12.1	概况与意义	251
12.2	可贵的探索	258
12.3	几个理论性和技术性的问题	271
12.4	几点建议	283
	附：波尔约—盖尔文定理的证明	294
	后记	296
	第2版后记	299

第一章 时代的呼唤

20 世纪的最后 20 年,中国大踏步地走向开放.“改革和开放”奏出了中华民族复兴的基调和最强音.国家的开放,社会的开放,思想的开放,自然地带来了“教育的开放”.派出去,请进来,中国的教育思想在继承自己优秀传统文化的基础上,注意吸收国外的有益教育经验为我所用.“面向世界,面向未来,面向现代化”,正是教育上实行开放政策的指针.

在这样的形势下,数学教育界提出了一种新的教学模式:数学开放题教学.20 世纪 90 年代以来,数学开放题出现在论文中,课堂上,直至高考的考场里.1993 年问世的《中学数学问题集》^[1]含有“开放题”的专章.1996 年《数学习题理论》^[2]再版时,“开放题”已是特定的研究对象.当“钟面数字问题”在浙江省初中数学教材中出现时,似乎还有些“偶然”,没有料到的是,不仅各省、市、自治区的中考数学试题屡屡出现“开放题”,1998 年的全国高等学校招生统一考试数学试题里“开放题”居然也堂皇入室.于是,一种在统编教材极少有地位的题型,终于引起了人们的广泛注视.进入 21 世纪以后,开放题教学进入教育行政部门的文件,写进各种教育著作,推动创新教育,以至成为广大数学教师耳熟能详的常用名词了.

从“改革开放”的国策,到“数学开放题教学模式”,我们可以看到某种历史的印记.可是,如果我们回顾中国的思想文化史、世界数学发展史,就会看到,“开放”的数学教学模式是一种重大的教学观念的转变.儒家文化的收敛性思维特征,数学史上“形式演绎”的

强大作用,都使得“数学的开放式思维”在中国很难立足.开放题教学模式的到来历尽甘苦.它的现状需要扶植.未来的前景大概是光明的,但免不了要经历艰苦的斗争.这并非危言耸听.让我们先来看看历史传统.

1.1 一点历史:从欧几里得到牛顿

古希腊的文明,数学是主要标志之一.欧几里得(Euclid)的一部论述几何学的巨著《原本》,闪耀着不朽的理性精神.世界上的文字著作中,除了“圣经”,就以《原本》的发行量最大.中国的近代科学,一般都以利玛窦和徐光启翻译《原本》前六卷(翻译本定名《几何原本》)的1607年作为起点.对《几何原本》的认识和崇拜,也许是人类走向科学的必由之路.

但是,《几何原本》的思维模式是演绎的、逻辑的、相对封闭的.它从一些公理开始,用完全理性的方法进行逻辑推理,发展成一部严密的演绎体系.《几何原本》是古希腊学者创造性思维的一种“总结性”的著作.由于是“总结”,古埃及和古巴比伦的数学实践,毕达哥拉斯学派的直观数学创造,欧多克斯(Eudoxus)突破“无理数”障碍的创新研究精神,都被淹没在逻辑的海洋里.人们在欣赏和赞叹欧几里得的逻辑体系的同时,渐渐地把数学等同于逻辑,以“理性的封闭演绎”作为数学的主要特征,因而逐步地忽略了数学思维的开放性品质.演绎体系的深刻,尤其使中国科学家感受到理性思维威力的震撼.有些学者甚至把中国科学落后的原因归结于缺乏“严密的逻辑思维”.

以牛顿(Newton, S. I.)为代表的数学巨人冲破了“数学=逻辑演绎”的公式.微积分是《几何原本》的自然发展吗?看来不是.我国著名科学史家席泽宗院士对此有过精辟的论述:

作为近代数学标志的微积分,并不是从欧几里得几何学发展起来的.牛顿、莱布尼兹(Leibniz, G. W.)和他们的先辈们为了适应当时运动学、弹道学、光学和天文学的需要,大胆地不顾欧几里得关于严密性的要求,发明了微积分.在微积分建立以后,反对微积分者正是那些受着欧几里得几何学束缚的人.关于这一点,在1981年翻译出版的斯科特著的《数学史》中有详细叙述.牛顿的《自然哲学数学原理》虽然是按照《几何原本》的模式写的,但那只是形式.牛顿自己说过,读了《几何原本》对他没有多少帮助^[3].

我想,席泽宗先生在此绝无贬低《几何原本》的意思,而是力求对人类的两种思维模式进行科学分析.

欧几里得几何学: 严密的逻辑演绎思维模式

牛顿的微积分学: 开放的实践创造思维模式

总之,逻辑是重要的,但只有逻辑是缺乏创造力的.对数学教学来说,培养逻辑思维能力是重要的,但只有逻辑思维能力是走不远的.如果说“逻辑思维”是收敛的、封闭的,那么“创新性思维”必须是发散的、“开放”的.开放式的数学教学,正是在这一差异上显示出它的重要性.

1.2 推理数学与直观数学

中国的古代数学传统,到李善兰(1811—1882)画上句号.19世纪和20世纪之交,或者说在辛亥革命前后,一批留学生将西方数学引入中国,于是开始了中国的“现代数学”和“现代数学教育”事业.在这里,我们要指出的是,世界上在这一时期占统治地位的数学观恰恰是“形式主义”、“逻辑主义”这样的思潮.“数学=逻辑”的观念,从一开始就形成了.

纵观全部数学史,一直有两条线:“推理数学”观和“直观数学”

观.二者交替主导,互相影响,共同发展.每当数学思想出现大的突破,数学成果成批涌现的时候,数学创新占主导地位.但这时的数学往往不大严密,许多数学定理看上去是“对”的,用起来也很有成效,可往往会有些矛盾,解释不通.于是,有一些数学家开始做整理工作,寻求一些最基本的事实作为出发点,进行逻辑分析和演绎推理,构成比较严密的形式化体系.

古希腊许多大数学家都是极具创造性的,如泰勒斯(Thales)、毕达哥拉斯(Pythagoras)、欧多克斯等.毕达哥拉斯的数学见解都是建立在有理数基础上的,一切的“比值”必须是有理数.当他的门人发现存在无理数的时候,他的数学就露出破绽,难以自圆其说了.后来是欧多克斯用穷竭法克服了这一困难.他们的创造性工作,到了欧几里得手里才获得完全的逻辑整理,这就是《几何原本》.文艺复兴以后,数学又面临重大突破,牛顿和莱布尼兹发明了微积分.他们的伟大创造是人类理性的胜利,但是不严格.18世纪的达朗贝尔(D'Alembert, J. le R.)开始整理,仍不完善.最后在19世纪末才使得分析学严密化.牛顿时代的那种创造性研究风格,一直在发展.欧拉(Euler, L.)、拉普拉斯(Laplace, P. S.)、傅立叶(Fourier, J. B. J.)、马克斯威尔(Maxwell, J. C.)都是大踏步前进的“开放式”的研究家.然后是希尔伯特(Hilbert, D.)出版《几何基础》,为严密化的数学提供了典范.

进入20世纪之后,形式化的思潮仍占统治地位.但是,一些伟大的数学家仍然在“开放式”地思维,不受“逻辑严密性”的约束.大数学家庞加莱(Poincaré, J. H.)创立的“拓扑学”、“定性理论”都不大严格.勒维(P. Lévy)建立了现代概率论,但常常把简单的定积分算错.莱夫谢兹(Lefschetz, S.)是拓扑名家,但他的学生说他的论文几乎篇篇都有毛病,但又都可以改正.总之,数学家的创新工作,可以是十分严密的推导,也可以是开放式的直觉思维.

冯·诺依曼(Von Neumann, J.)是一位当代的大数学家.他的数学工作十分严密,曾是希尔伯特研究数学基础的得力助手.但是,他的创造力更表现在“算子代数”、“对策论”、“数理经济学”等学科的创立,尤其是研制电子计算机,提出冯·诺依曼方案,造福人类.这样伟大的工作不是逻辑推理所能推出来的.当然,一旦想到“电子计算机”方案,以下的工作依然需要逻辑演绎方能奏效.

综上所述,数学上的开放性思维,是数学前进的动力之一.数学毕竟不等于逻辑.“直觉—试验—错误—推测—猜想—证明”,这大概是发展数学的顺序.当然,我们希望最后的结果有“严格的证明”.当严格的证明一时达不到的时候,人们依然承认他们的直觉的重要.推测的数学也是数学^[4].

1.3 儒家的“考据文化”与逻辑推理

清代中期以来,以戴震为首的考据学派在学术界占统治地位.考据学派的治学方法,重实证,讲究逻辑推理,因而贴近数学.清末以来的学术界,崇尚“严谨治学”的文化氛围,恰与西方数学要求严密逻辑推理的层面相吻合.

儒家文化没有数学的地位,但本身是一个演绎系统的思想和行动,儒家文化在演绎这一点上,与西方数学要求却并不抵牾.以前关于中国传统数学的论述,都认为中国传统文化“缺乏形式逻辑,却一直倾向于发展辩证逻辑”^[5].日本三上义夫认为,在古代中国数学思想中,最大的缺点是缺少严格求证的思想,他把这一点同形式逻辑不能在中国发展联系起来.

这一判断有一定的道理.但是,从徐光启接触欧氏《几何原本》之时起,中国数学家对西方的逻辑推理从未提出过反对意见,而且能够很顺利地接受.尤其是徐光启、李善兰等都能够欣赏西方数学

中精细的逻辑演绎推理,并高度赞赏。戴震等考据学者提倡复古主义,认为西方的数学中国早已有之。他们虽不称赞西方数学,却并未指摘西方数学中的逻辑推理不符合中国国情,加以拒绝。时至今日,华人地区的数学课程中,逻辑演绎的要求远远高出世界上其他地区,而且学生接受起来并不困难(相对而言),这不能不从传统文化的演绎背景中找原因。

为什么说儒家文化是一个演绎系统呢?让我们来作一类比:

- ◆ 儒家经典相当于数学的公理。
- ◆ 朱熹等为经典作注是权威的论证。
- ◆ 读书人的任务是“代圣贤立言”,相当于作推论。

儒家文化的思想体系,从表面上看似乎不讲逻辑推理、演绎论证。但就整体来看,思维方式是收敛的、封闭的、演绎的。与此相反,凡是涉及创造、探索和发现的发散思维层面,只要和经典论述有所抵触,就绝对不能允许。这种演绎式的封闭思想体系,不鼓励创新,自然会扼杀一切创造,包括数学上的创造。相比之下,儒家学说虽不重视数学,但是对数学上的逻辑演绎方法并不拒绝和反对。

1840年鸦片战争之后,西学大举进入,乾嘉学派到19世纪下半叶虽然已经解体,但是考据文化一经形成,便会发生重要的潜在作用。“中国旧学,考据,掌故,词章为三大宗”,考据列在第一位。“严谨治学”成为研究一切学问的起码标准,也是对学者的最高赞赏,其核心当然是指考据和训诂。辛亥革命以来,特别是五四运动以来,尽管西方科学与中国传统文化屡有冲突,却一直和考据学派的思想相安无事。康有为、梁启超、王国维、章太炎、陈寅恪、钱穆等国学大师都是一时的学界泰斗,他们的治学态度绝对是一个时期的榜样。他们的学识渊博自不待言,而更令人折服的正是他们“精于考据,长于训诂”的治学态度。考据学派对中国科学发展的作用可以概括为梁启超的以下论断: