数学归纳法

蒋文蔚　杨延龄　编

北京师范大学出版社

数 学 归 纳 法

蒋文蔚　杨延龄

北 京 师 范 大 学 出 版 社

内 容 简 介

数学归纳法是数学中的一种重要证明方法，在数学的各个部门中都有着广泛的应用．本书比较详尽地介绍了数学归纳法的基本意义，如何使用数学归纳法以及数学归纳法的各种形式。并对于如何求由归纳定义的函数解析式的基本方法也作了初步介绍．本书还提供了丰富的例题和练习题，并附有提示或略解供读者参考．

本书是中学生、大学低年级学生以及自学青年的一本有益的读物，也可供中学数学教师参考和数学课外小组选用．

数学归纳法
骆文蔚　杨延龄
＊
北京师范大学出版社出版
新华书店北京发行所发行
天津黎明印刷厂印刷
＊
开本：787×1092　1/32　印张：6　字数：127千
1985年5月第1版　1985年5月第1次印刷
印数：1—37,000
统一书号：7243·273　定价：0.80元

目　　录

第一节 数学归纳法——一种重要的证明方法

§1.1 命　　题

数学中往往把研究的对象、问题用命题的形式来表达。什么叫命题呢？命题是指那些具有判断性的（肯定它是正确的或是错误的）语句或式子。请看

(1) 6是3的倍数；

(2) $1+2<3$；

(3) 三角形的三内角和是180°吗？

其中(1)、(2)都是命题，而(3)不具有判断性，因此不是命题。

注意命题不都是正确的。正确的命题，我们把它叫做真的或成立的，如(1)；错误的命题，我们把它叫假的或不成立的，如(2)。

我们又可把命题分为特殊性的命题和一般性的命题。特殊性的命题简称特殊命题，是指关于某一类事物中个别事物的判断。一般性的命题简称一般命题，是指关于某一类事物中全体对象的判断。请看

(4)

左	右
任一锐角三角形的三条高线相交于一点； 任一直角三角形的三条高线相交于一点； 任一钝角三角形的三条高线相交于一点。	任一三角形的三条高线相交于一点。

我们可把左边的三个命题认为是特殊命题，而右边的命题是一般命题。

§1.2 归纳法

人们在想问题时经常用由特殊命题过渡到一般命题的推理方式，我们把它叫做归纳推理或归纳法。例如

(5) 在(4)中由三个特殊命题：

锐角三角形的三条高线相交于一点；

直角三角形的三条高线相交于一点；

钝角三角形的三条高线相交于一点。

我们可以归纳得出一般命题：

任一三角形的三条高线相交于一点。

(6) 观察下面的等式

$2\times2=4$,	$2+2=4$;
$\frac{3}{2}\times3=4\frac{1}{2}$,	$\frac{3}{2}+3=4\frac{1}{2}$;
$\frac{4}{3}\times4=5\frac{1}{3}$,	$\frac{4}{3}+4=5\frac{1}{3}$;
$\frac{5}{4}\times5=6\frac{1}{4}$,	$\frac{5}{4}+5=6\frac{1}{4}$;
…………	…………

比较每一行左、右两个式子，我们可以得出：任意两数之积等于这两数之和。即若 a、b 为任意两数，则

$$a\times b=a+b.$$

(7) 观察前 n 个奇数的和

当 $n=1$ 时， $1=1=1^2$；

当 $n=2$ 时， $1+3=4=2^2$；

当 $n=3$ 时， $1+3+5=9=3^2$；

当 $n=4$ 时， $1+3+5+7=16=4^2$；

当 $n=5$ 时， $1+3+5+7+9=25=5^2$；

…………………………

容易归纳得出，对于任意的自然数 n，

$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$。

在(5)、(6)、(7)中虽同是由归纳推理得到一般命题，但仔细比较，可以发现各具特点。(5)中因为综合了锐角三角形、直角三角形、钝角三角形三种三角形就得全体三角形，每一种三角形都具有三条高线相交于一点这种性质，自然可以归纳得出全体三角形也具有这种性质。象这种由每一对象都具有某种性质过渡到全体对象都具有这种性质的归纳推理叫做完全归纳推理或完全归纳法。显然用完全归纳法得出的结论是可靠的。而(6)和(7)中仅是由部分对象具有某种性质过渡到全体对象都具有这种性质，我们把这种归纳推理叫做不完全归纳推理或不完全归纳法。显然(6)中得出的结论：两数之积等于这两数之和，是不正确的。为了说明一个一般性结论是错误的，我们只要举出一个实例说明结论不成立就行了。再看(7)中所得结论：对于任意自然数 n，都有等式

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2。$$

我们在后面将能证明它是正确的。

由此可见，由不完全归纳法得出的结论不一定是可靠的。这同时也说明了不完全归纳法有着严重的缺陷。

因为这里的 n 是指任意的自然数，因此等式 $1+3+5+$

$\cdots+(2n-1)=n^2$ 实际上表示了 $n=1,2,3,\cdots$ 时的无数多个等式．如何证明(7)中的等式是正确的呢？显然采用完全归纳法对无数多等式一一验证是不可能办到的．要证明象这种与全体自然数 N 有关的一串（无数多个）命题还得采用另外高明的办法，下面将要介绍的数学归纳法就是这样一种方法．

§1.3 数学归纳法

我们采用记号 $P(n)$ 表示一个与自然数 n 有关的命题，把它们都写出来就是 $P(1)$，$P(2)$，$P(3)$，$\cdots$．

事实上如果满足以下两个条件：

1． $P(1)$ 成立（即当 $n=1$ 时命题成立）；

2． 只要假设 $P(k)$ 成立（归纳假设），由此就可证得 $P(k+1)$ 也成立（k 是自然数）．

就能保证这一大串（无数多个）命题

$P(1)$，$P(2)$，$P(3)$，$\cdots$，$P(n)$，$\cdots$

都成立．

我们把此叫做数学归纳法原理，可以看作一条公理[1]，它是数学归纳法证明的根据．这里，第一条是归纳的基础，没有它归纳假设就失去了依据．第二条指出了在第一条基础上可确立一种递推法则，逐个进行递推．根据 $P(1)$ 成立，如果取 $k=1$，由 2 就可得到 $P(2)$ 成立，再取 $k=2$，根据 2 又可得 $P(3)$ 也成立．只要不断地重复这一过程（继续取 $k=3,4,5,\cdots$），我们就可得到 $P(4)$，$P(5)$，$P(6)$，$\cdots$也

注［1］将在第六节中进一步阐述．

都成立。可见第二条的作用就在于以一次逻辑推理代替了无限次验证过程。

根据数学归纳法原理，我们在证明时可相应地按照以下两步进行

1． 验证 $P(1)$ 是成立的（奠基步骤）；

2． 假设 $P(k)$ 成立导出 $P(k+1)$ 也成立（归纳步骤）。

由 1、2 可得对于任意的自然数 n，命题 $P(n)$ 都成立。

这是数学归纳法最基本的形式，通常称作第一数学归纳法。

［例 1］ 用数学归纳法来证明前面(7)中的等式

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2.$$

［证明］（1）当 $n=1$ 时，左边 $=1$，右边 $=1^2=1$，等式显然成立。

（2）假设 $n=k$ （$k\geqslant1$）时等式成立，即

$$1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2.$$

$$\therefore\quad 1+3+5+\cdots+(2k-1)+(2k+1)=k^2+(2k+1)$$
$$=(k+1)^2.$$

这就是说，当 $n=k+1$ 时等式也成立。

由(1)、(2)可知，对于任意的自然数 n，等式都成立。

［例 2］ 用数学归纳法证明

$$1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2).$$

［证明］（1）当 $n=1$ 时，左边 $=1\cdot2=2$，

右边 $=\frac{1}{3}\cdot1\cdot2\cdot3=2$，因此等式成立。

（2）假设 $n=k$ 时等式成立，即

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+k(k+1)=\frac{1}{3}k(k+1)(k+2).$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad & 1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+k(k+1)+(k+1)(k+2)\\ &=\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)+(k+1)(k+2)\\ &=\frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3)\end{aligned}$$

因此，当 $n=k+1$ 时等式也成立。

由(1)、(2)可知，对于任意的自然数 n，等式都成立。

归纳法与数学归纳法从名称上看两者似乎是同一类方法，其实这是一种误解。因为两者表现在逻辑上是完全不同的形式，要知道数学归纳法是演绎法[2]的一种，它是一种严格的证题方法，不可与普通的归纳法混为一谈。

§1.4 数学归纳法的一种变形

如果某一命题不是与全体自然数有关的命题，而是与从 $k_0(k_0>1)$ 开始的所有自然数有关的命题，证明时只要把数学归纳法的基本形式稍加修改就行了。

第一步改为：验证 $P(k_0)$ 成立；

第二步改为：假设 $P(k)$ 成立 $(k\geqslant k_0)$ 导出 $P(k+1)$ 也成立。

[例 3] 用数学归纳法证明，对大于 1 的自然数 n 有

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{2n}.$$

注 [2] 演绎法又叫演绎推理，它是由一般命题过渡到特殊命题的推理方法

［证明］ (1) 当 $n=2$ 时，左边 $=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$，右边 $=\frac{3}{4}$，因此等式成立。

(2) 假设当 $n=k(k\geqslant 2)$ 时等式成立，即

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\frac{k+1}{2k},$$

$$\therefore\ \left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{k^2}\right)\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)$$

$$=\frac{k+1}{2k}\cdot\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)=\frac{k+1}{2k}\cdot\frac{k(k+2)}{(k+1)^2}$$

$$=\frac{k+2}{2(k+1)}.$$

因此 $n=k+1$ 时，等式也成立。

由(1)、(2)可知，对大于 1 的自然数 n，等式都成立。

［例 4］ 如自然数 $n\geqslant 2$，试用数学归纳法证明：

$$3=\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\cdots\sqrt{1+n\sqrt{(n+2)^2}}}}}.$$

［证明］ (1) 当 $n=2$ 时， $3=\sqrt{1+2\sqrt{(2+2)^2}}$，所以等式成立。

(2) 假设 $n=k$ 时等式成立，即

$$3=\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\cdots\sqrt{1+k\sqrt{(k+2)^2}}}}}.$$

因为：$(k+2)^2=1+(k+1)(k+3)=1+(k+1)\sqrt{(k+3)^2}$，

所以：

$$3=\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\cdots\sqrt{1+k\sqrt{1+(k+1)\sqrt{(k+3)^2}}}}}}.$$

这就是说，当 $n=k+1$ 时等式也成立。

由(1)、(2)可知，当 $n\geqslant 2$ 时原等式都成立。

〔思考题 1〕 试用数学归纳法证明凸 n 边形的 n 个内角和为 $(n-2)\pi$，其中 $n\geqslant 3$。

第二节　如何正确使用数学归纳法

开始学习数学归纳法时，常常会遇到两个困难：一是数学归纳法的实质不容易理解，二是归纳步骤的证明有时感到难以入手。本节将对几种常见的错误及归纳步骤证明的基本方法进行讨论，以帮助初学者进一步理解数学归纳法的原理，弄清它的实质，明确如何正确使用数学归纳法。

§2.1　两步缺一不可

1．缺第二步不可

有人觉得如果一个命题对于开头的一些自然数都成立，那末由 $P(k)$ 成立导出 $P(k+1)$ 成立是必然的。因此第二步归纳步骤是流于形式，证与不证似乎一样。显然这是不正确的，产生这种错误想法的原因在于没有认识到归纳步骤所起的递推作用。如果没有递推性，那末一个命题可能对于开头的许多自然数都成立，但是一般的并不成立，我们举几个例子来看看。

十七世纪法国卓越的数学家费尔玛考察了形如 $2^{2^n}+1$ 的数，$n=0$，1，2，3，4 时，它的值分别为 3，5，17，257，65，537。这 5 个数都是质数。因此费尔玛就猜想：对于任意的自然数 n，式子 $2^{2^n}+1$ 的值都是质数。但是在十八世纪另一位卓越的数学家欧拉指出 $n=5$ 时，

$$2^{2^5}+1=4294967297=641\times6700417$$

是个合数，费尔玛的猜想错了。

又如式子 n^2+n+41，当 $n=1, 2, 3, \cdots, 39$ 时这个式子的值都是质数，但当 $n=40$ 时，

$$40^2+40+41=40^2+2\cdot40+1=(40+1)^2=41^2$$

是个合数。

再看一个很有说服力的例子。式子 $991n^2+1$ 中依次用 1，2，3，…来代替 n，即使我们花好几天时间来计算也得不出一个数是完全平方数。但是如果我们由此就说：对于任意的自然数，式子 $991n^2+1$ 都不是完全平方数，那就错了。实际上，当 $n=12055735790331359447442538767$ 时，$991n^2+1$ 是一个完全平方数。

以上这些例子充分说明我们不能把不完全归纳法当作证明，用数学归纳法证明时缺第二步不可。

2. 缺第一步也不可

也有人觉得既然第二步归纳步骤中有递推作用，而且 k 又可以任意取值，这样就够了，有没有第一步无关紧要。这种认识也是错误的，它忽视了第一步的奠基作用，因为如果没有 $P(1)$ 成立，归纳假设 $P(k)$ 成立就没有了依据，因此递推性也就成了无源之水，无本之木了，下面我们看一个这样的例子。

［例 5］ 如果不要奠基步骤，我们就可以证明 $(n+1)^2+(n+2)^2$ 一定是偶数。

［证明］ 假设 $n=k$ 时命题成立，即 $(k+1)^2+(k+2)^2$ 是偶数。

当 $n=k+1$ 时

$$[(k+1)+1]^2+[(k+1)+2]^2=(k+2)^2+(k+1)^2$$

$$+4(k+1)+4=(k+1)^2+(k+2)^2+4(k+2).$$

由假设$(k+1)^2+(k+2)^2$是偶数，又$4(k+2)$也是偶数，所以上式是偶数，这就是说$n=k+1$时命题也成立。

由此，对于任意的自然数n，$(n+1)^2+(n+2)^2$一定是偶数。

这个结论显然是错误的，原因就在于证明中缺少第一步奠基步骤。实际上，$n=1$时

$$(1+1)^2+(1+2)^2=4+9=13$$

不是偶数。这说明使用数学归纳法时缺第一步不可。

我们现在可以把数学归纳法形象地比喻作攀登一个无穷的梯子的过程，证明的第一步验证$P(1)$成立，这表明我们能够登上这一梯子的第一级；证明了能够从$P(k)$过渡到$P(k+1)$，就相当于我们有能力从梯子的任何一级登上更高的一级。只有同时具备了这两种能力，我们才能到达梯子的任何一级，这相当于只有同时完成了数学归纳法的两个步骤，才能保证对于任意的自然数n，$P(n)$成立。

缺少数学归纳法的第一步，这表明我们不能登上梯子的第一级，而在这种情况下，纵然有从任何一级升到更高一级的本领也是没有用的；缺少证明的第二步，这表明即使我们登上梯子的第一级，但是我们不具备从任何一级登上更高一级的能力，那末我们就不能无限地攀登上去。总之，数学归纳法证明中，两个步骤互相联系，不可分割，缺一不可。

§2.2 错在哪里？

解数学题时，有时出现一些错误是不足为怪的，问题是怎样对待这些错误，如果我们善于利用各种错误的解法，分

析产生的原因，研究纠正的方法，从中吸取教训，无疑这对有关数学概念、方法的理解及掌握是非常有益的。经验告诉我们有时甚至于比正面说明应该怎样做印象更深刻。下面进一步对数学归纳法证明中常见的错误进行分析，这对正确理解和掌握数学归纳法同样是十分有益的。

［例 6］　用数学归纳法证明

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}.$$

对这道题，有人可能会这样叙述它的证明：

(1) 当 $n=1$ 时，左边$=\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{2}$，右边$=\frac{1}{2}$，所以等式成立。

(2) 假设 $n=k$ 时等式成立，即

$$\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1},$$

当 $n=k+1$ 时

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$
$$=\frac{k+1}{k+2}.$$

由(1)、(2)可知，对于任意的自然数 n 等式都成立。

［分析］　上述“证明”只是表面上套用数学归纳法的模式，不明白第二步中递推性的意义，这里由 $P(k)$到 $P(k+1)$ 并没有推导过程，只是把原来等式中的 n 分别换成了 k 和 $k+1$ 而已，因此并不能保证可由 $P(k)$过渡到 $P(k+1)$，没有递推功能也就不能断言对于任意的自然数 n 等式都成立。

第二步证明应改为以下的叙述就对了：

(2)假设 $n=k$ 时，等式成立，即

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}$$

因此 $$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2},$$

所以当 $n=k+1$ 时，等式也成立。

由(1)、(2)可知，对于任意的自然数 n，等式都成立。

［例 7］ 用数学归纳法证明

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot3^n}$$

对这道题，有人可能这样来证明：

(1) 当 $n=1$ 时，左边 $=\frac{1}{3}$，右边 $=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$，所以等式成立。

(2) 假设当 $n=k$ 时等式成立，即

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^k}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot3^k}$$

当 $n=k+1$ 时，$\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^k}+\frac{1}{3^{k+1}}$

$$=\frac{\frac{1}{3}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{k+1}\right]}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^{k+1}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot3^{k+1}},$$

因此，当 $n=k+1$ 时等式也成立。