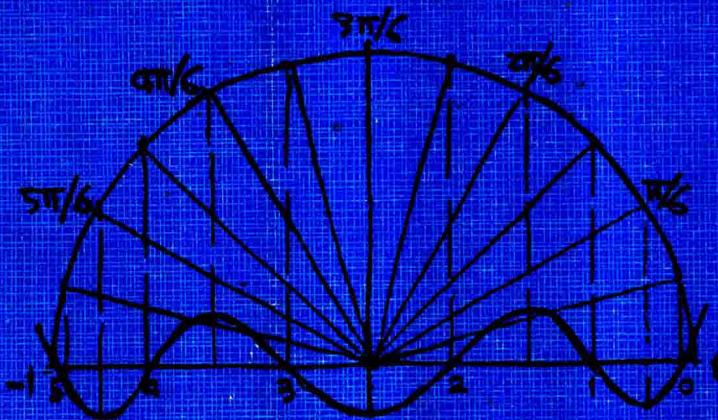
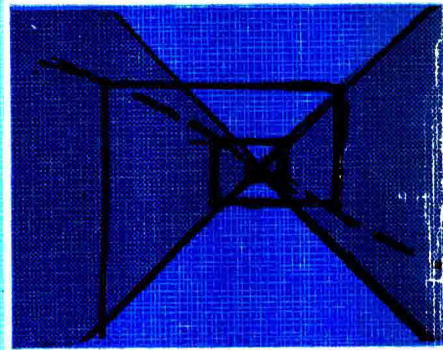
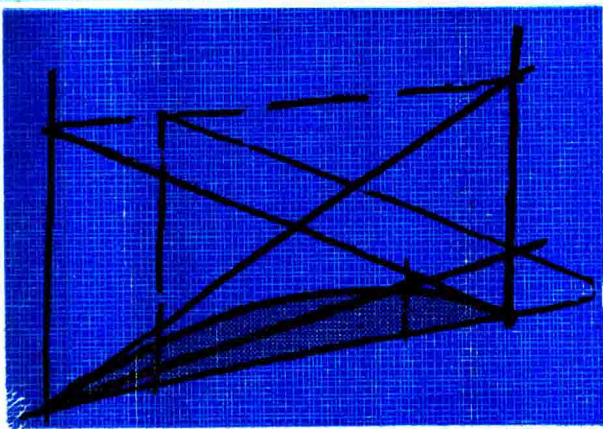


資訊數學基礎 數值分析與 數值方法

張式魯 著



東華書局印行

資訊數學基礎
數值分析與數值方法

張式魯著

中正理工學院教授

東華書局印行



版權所有・翻印必究

中華民國七十年九月初版
中華民國七十二年四月四版

大專
用書

資訊數學基礎——數值分析
與數值方法

定價 新台幣壹百元整

(外埠酌加運費匯費)

著者	張式魯
發行人	卓鑫森
出版者	臺灣東華書局股份有限公司 臺北市博愛路一〇五號
印刷者	合興印刷廠

行政院新聞局登記證：局版臺業字第零柒貳伍號
(70034)

目 錄

關於數值分析——代序	1 ~ 18
第一章 誤差與誤差的傳播	19 ~ 46
1. 誤差與相對誤差	19
2. 有限數位表示法的精度	20
3. 有效數位	24
4. 誤差的傳播	26
5. 四則運算的誤差傳播	29
6. 計算過程與誤差傳播	34
7. 方差與偏差	38
習 作	45
第二章 非直線方程式的解法	47 ~ 80
1. 函數的零值與函數的定點	47
2. 區間的分割法	50
3. 切線法與割線法	54
4. 迭代函數與迭代過程	60
5. 迭代函數的收斂區間	63
6. 迭代函數與收斂速率	67
7. 迭代過程的加速收斂，Aitken Δ^2 修正法	69
8. 迭代函數的選擇	73
習 作	79
第三章 插值法與插值多項式	81 ~ 121

1. 插值法的意義與線性插值	81
2. 插值多項式	83
3. Lagrange 插值多項式與Newton 插值多項式	84
4. 商差的性質與商差表的計算	91
5. 插值多項式的誤差	93
6. 商差函數	99
7. 密切插值	103
8. 分段插值	112
9. 曲線規插值三次多項式	113
10. 插值法的迭代計算過程	116
習 作	120
 第四章 微分與積分的數值計算過程	 122 ~ 155
1. 微分，積分與插值多項式	122
2. 數值微分與數值積分的基本法則	125
3. 積分公式與微分公式的精度	130
4. 分段積分與其平均誤差	133
5. 平均誤差之階與Richardson 外插法	139
6. 增加積分公式的精度 — Newton Cote 積分公式	142
7. 增加積分公式的精度 — Gauss 積分法	145
8. 其他積分公式	148
9. 關於數值微分	150
習 作	154
 第五章 矩陣的運算與線性方程式	 156 ~ 181
1. 矩陣的定義與運算	156
2. 矩陣的相關數值與相關矩陣	160
3. 線性函數與線性方程	161

4. 方程式 $[A \ b]$ 的解與矩陣的性質	164
5. 逆陣與可逆性	172
6. 對稱分割方陣的逆陣	173
7. 排列方陣	176
習 作	180
 第六章 線性方程的數值解法	 182 ~ 220
1. 同解方程	182
2. Gauss Jordan 消去法	185
3. 消去法算子與求逆算子	190
4. 部份 Gauss Jordan 消去法	192
5. 線性方程的最小二乘方解	194
6. Gauss 消去法	198
7. Crout 變換	203
8. 線性方程的迭代解法	207
9. 求逆的迭代過程	210
10. 消去法算子 E^{kl} 與求逆算子 g^{kl} 的討論	212
11. 基本解	215
習 作	219
 第七章 微分方程的數值解法	 221 ~ 249
1. 微分方程的數值解法	221
2. 數值解法的基本型態與 Euler 解法	222
3. Euler 解法的誤差	224
4. 數值解法的階與近似斜率的選擇	226
5. Euler 解法的改進與 Runge Kutta 解法	229
6. 多級解法, 預計 — 校正過程	233

7. 二階常微分方程與邊界條件問題·····	238
8. 差分法與係數配置法·····	241
習 作·····	248

關於數值分析一代序

「每個計算機中心都有很多現成的應用程式，我們還有必要學習數值分析嗎？」這是我們首先會遭遇到的問題；這個答案自然是肯定的。事實上我們自己早已答覆了這個問題，雖然我們知道已經有了很多的數學家，但是我們從來沒有停止學習數學。數值分析的學習自然也不例外。

學習是一個複雜的過程，影響的因素很多，但對於數值分析來說，我以為影響最顯著的是內容的組織與表達的方法。

著者寫這本書的目的，便是希望藉着這些年來同學們反映出來的學習經驗（尤其是困難的經驗），重新組織相關的內容，提供一個有效的學習過程。同時也希望藉此能夠更有效的去應用我們的計算工具；無論你心目中的計算工具是什麼，有效的運用才是最重要的。數位計算機當然是今日最得力的計算工具——但是更有賴我們善加運用，本書也將以此作為「目標」工具，但並不要求讀者已經具備應用計算機的經驗。

作為一個好的開端，讓我們引用 Hamming 的一句話：

計算的目的是「明察秋毫」，不是數字。（The purpose of computing is insight, not numbers.）

1. 數值分析（Numerical Analysis）的意義

關於數值分析的意義，我們首先列舉若干相關文獻中對於數值分析含義的解釋：

Lanczos (1956)

數值分析的意義是討論將數學過程 (mathematical process) 轉換為數值的運算 (operation of numbers) …並考慮修整誤差 (rounding errors) 的累積。

Hartree (1958)

數值分析是數值計算的科學與藝術，特別是由某些數據 (data) 獲得某些結論 (results) 的過程。

Hilderbrand (1956)

數值分析的最終目標是提供求解數學問題的適當方法，…這些問題可能寫為代數方程或超越方程，微分或積分方程，或是這些方程式的組合。

Ralston (1967)

以科學而言，數值分析關心的是以算術方法求解數學問題的過程，以藝術而言，數值分析關心的是選擇求解特定問題的最適合的程序。

Hamming (1971)

計算的目的是「明察秋毫」(insight)，並不是數字。

以上的討論均在顯示數值分析的意義，但各有其強調的重點，綜合起來說，我們可以認為：

(一) 數值分析的目標是求解問題、了解問題。這些問題是經過數學方法描述或模擬的。

(二) 技巧上我們是將數學方法 (通常是涉及無限的過程) 轉換為有限的數值計算過程 (同時考慮轉換與計算過程的誤差)。原始的數據得以透過這些計算反映出有用的資料與結論。

(三) 方法的應用必須針對問題的性質，要求的精度與反應速率，以及計算工具的性能，做適當的選擇。

以上的綜合結論均屬概念性的闡述，其中以(二)最具有特徵性，也就是說數值分析的特徵在於將數學方法轉換為數值計算方法。由於數值計算工具的改進。涉及這一特徵的問題（也就是數值分析面臨的問題）。因此日趨廣泛。這些問題的解決，本身便形成了數學應用的新領域，例如統計學、抽樣理論、隨機過程、動態規劃、最佳控制、系統鑑別、系統分析等等。

這些數學應用之間具有一個更為廣泛的目標，便是資訊。因此可以統稱資訊數學。資訊數學乃是泛指關於資料的有效處理、轉換、傳遞與應用的數學方法。我們今日對於問題的處理，要求的水準日益提高，在在須要有效的資訊，以為討論、控制、或決策的依據。這些資訊多數並非原始資料，而必須透過適當的轉換才能產生具有應用意義的資訊。

一般的說，資訊可能以不同的形態出現，例如：數據、符號、影像、紀錄、聲響等等。但由於計算工具的進步，資訊的數值化因此形成一個重要的趨向，在這些數值資訊的處理、轉換與傳遞之中，當然諸多有賴數值方法的發展。因此我們可以這樣說，數值分析實為資訊數學的一個基礎，本書命名的涵意亦即在此，希望讀者在學習時能夠預見一個更為深遠的背景。

2. 數值分析內容的分類

數值分析的內容最易導致爭議，因為數值分析原無明確範圍。事實上我們也無須賦予嚴格的定義，使一門學問孤立起來，相反的，我們應當設法闡述相關的學科彼此的關聯與影響。就前述資訊數學的觀點而言，所有數值計算方法的設計與討論（包括選擇與評議）均將形成數值分析的主要內容，但由於應用範圍的擴大，許多特有的數值分析問題，例如統計學，均有其專業化的討論，因此在數值分析的學程中只列舉一般性的內容，以為學習的方向。

4 資訊數學基礎 —— 數值分析與數值方法

(一) 函數的表示與計算

插值問題

曲線的配應 (fitting)

曲線與曲面的數值表示法

積分與微分算子的數值方法

* 垂直函數與基函數

* 近似函數

(二) 方程式的求解

非直線方程

線性方程

常微分方程

* 偏微分方程

* 積分方程

* 多項式的根

(三) 特別問題

矩陣代數的計算

迭代過程

誤差傳播

* 計算過程的穩定性

3. 計算工具

數值計算方法的選擇，必須配合計算工具的性能，特別適用某一種計算工具的方法，往往並不適用其他的工具，這是常見的事實。本書雖然以數位計算機為「目標」工具，但也希望讀者瞭解其他的計算工具的存在與價值。

一個紀錄計算結果（或者包括過程）的設備輔以計算方法，便形成計算工具。我們可以就發展的歷史列舉如下：

- (一) 算籌與算盤
- (二) 筆算與作圖
- (三) 函數表 (function table)
- (四) 算表 (nomography)
- (五) 算尺 (slid rule)
- (六) 計算機構 (computing mechanism)
- (七) 類比計算機 (analogy computer)
- (八) 數位計算器 (digital calculator)
- (九) 數位計算機 (digital computer)

以上計算工具發展雖有先後，但沒有一種可以認為已經落伍，或者可以淘汰；作圖與算盤是最古老的計算工具（算盤源自算籌，二千年前算籌即已出現歷史記載），今日仍在廣泛應用。算表的設計，今日似乎被人忽略，但對於許多特別問題，却是最便利的計算工具。

關於這一點，可以補充說明如后：

算籌是我國古代的計算工具，始自何時已無法查考，但最早見諸歷史文獻的是在漢書律歷志。當時計算，以竹籌記錄計算經過。籌之記數，五以下者各籌當一，五以上者一籌當五，分縱橫兩式

縱式： | || ||| |||| 丅 𠄎 𠄏 𠄐
 橫式： 一 二 三 𠄎 𠄏 𠄐 𠄑 𠄒 𠄓

記數時，縱橫相間使用，計算中，以十進位法佈籌記錄計算經過。今以 78×56 為例，說明算籌記錄方法如下：

【例 1】

The four diagrams show the progression of the calculation:

- Initial setup: 78 (represented by 7 vertical rods and 8 horizontal rods) and 56 (represented by 5 vertical rods and 6 horizontal rods).
- First step: The product of the units digits (8 x 6 = 48) is calculated and recorded.
- Second step: The product of the tens digits (7 x 5 = 35) is calculated and recorded, shifted one place to the left.
- Final step: The two partial products are added together to reach the final result.

其計算過程可以解釋為：

$$\begin{array}{r}
 56 \qquad \qquad 6 \qquad \qquad 6 \\
 35 \qquad \qquad 390 \qquad \qquad 432 \qquad \qquad 4368 \\
 78 \qquad \qquad 78 \qquad \qquad 8
 \end{array}$$

運籌計算的方法與今日筆算無異，由左至右而已。但因以籌記數，增減便利，於是形成一個動態的紀錄器。而後發展的算盤想係由算籌演進而來，只是以珠代籌，更為便捷。後來（約於宋代）再輔以計算口訣，才形成今日之珠算。

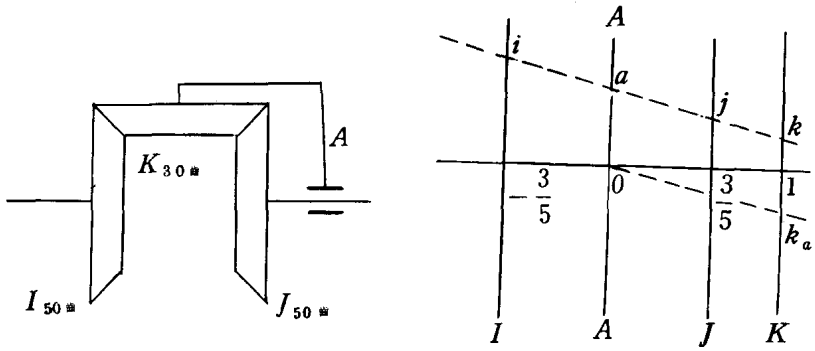
以作圖做為計算的方法，實際上便是數學的起源，我們知道幾何源自戶象與地形的測量，作圖與計算自是不能分離。在我國最早的記載是周髀，這是最古老的曆算之書，也是我們考求二千年前天算知識的重要史料。周髀測望術即古代土圭測影之遺法；所謂髀者，表也，亦即測度日影與星辰的工具。其基本依據即為勾股弦的關係（今稱畢氏定理）。

今日在工程圖學中仍多採用作圖計算的方法。由於作圖在視覺上的特別效果，特別有助於工程設計與研究。我們不但以作圖代替計算，必要時也不惜以大量的數值計算來展示圖形。

作圖的精度容或有限，但通常有賴作圖計算的結果，精度往往不是主要的問題，而且我們還可以透過幾何方法另作精確的計算。因此有時作圖無寧說是一種圖示法與圖解法。設計良好的圖示法，可以一目了然的展示某些相關變數的關係。

【例 2】設有一差速輪系，齒數與相關結構如下圖。

今以轉臂固定 A 時的轉速比例（ I, J, K 在固定轉臂時形成一簡單轉系，轉速比為 $-3/5, 3/5$ 與 1 ），作垂線 I, A, J, K 如圖一，若以各轉速 i, a, j, k 為縱坐標，分取各點（並以

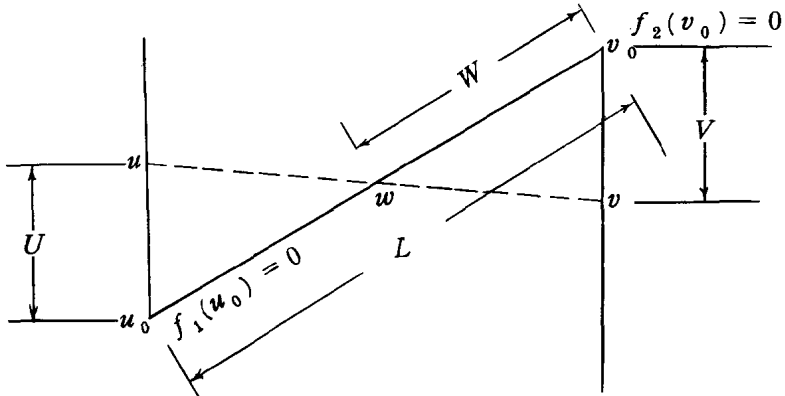


圖一

i, a, j, k 表之) 則各點必在同一直線上, 因此任意兩個轉速為已知時, 其他轉速可由一直線決定之。

註: k 輪的轉動面不與其他各輪平行, 其轉速 k 因此特別定義為轉臂轉速 a 與相對轉速 k_a 的代數和: $k = a + k_a$ 。

算表 (nomography) 可以視為作圖計算的一種延伸, 在算表中, 我們將各變數, 以一組特別設計的尺度來表示。在應用時, 只須一個簡單的作圖 (比如作直線) 即可獲得各變數的對應數值。例如 $f_1(u) = f_2(v)f_3(w)$ 的關係可以由下列圖二算表來計算,



圖二

對應的 u , v , w 值，在上述算表中恒在一直線上，因此應用方法極為簡便。設計的關鍵在於利用各函數性質，決定各尺度的分劃：今設 $U = a f_1(u)$, $V = b f_2(v)$, 則 W 的分劃可以設計如下：

今設 L 為 w 尺度全長，由相似三角形的比例關係，

$$\frac{U}{V} = \frac{L - W}{W}$$

解之可得 w 的分劃為

$$W = \frac{L}{1 + \frac{U}{V}} = \frac{L}{1 + \frac{a}{b} f_3(w)}$$

在計算尺 (slid rule) 中，各尺度均採用對數分劃，但可相對滑動，形成長度的加減，於是得以透過對數分劃作乘除運算。這便是一般計算尺設計的原理。當然我們也可根據特別的計算要求，設計專用的計算尺。

計算機構，一般係指利用機械構件作為計算工具。例如秤的設計，即在利用槓桿作比例的計算。轉速器則在利用離心力計算轉速。此外如面積儀，積分儀均為良好設計的計算機構。一般儀器的設計，常含有個別的計算機構。在二次大戰期間，美國政府曾委託麻省理工學院特別研究計算機構，以為軍事上的應用。

計算機構是以位移與運動作模擬運算，實為類比計算機的一種。由於機械構件不易作大規模的組合，計算機構只適合特別問題的計算。以電流與電壓，藉電器原件的物理性質完成的類比計算，可以解決這一困難，於是一個具有一般功用的類比計算機得以形成。在類比計算中，主要的特徵是所有數據都是一些連續而且時變的物理量，雖有直接應用的便利，但在計算與儲存的功能上，則形成一種限制。

突破這個限制的便是計量的數位化與有效的記憶設備。於是形成

今日廣泛應用的數位計算機。其特徵自然也就在於能夠迅速的完成大量數值運算，並且具有大量的記憶能力。

值得強調的一點是一個計算工具效果在於使用的狀況，是否能夠發揮工具本身的性質，我們在選擇計算工具時除了全盤的成本效益分析而外，通常可以考慮下列幾個相關的因素。

- (一) 計算能力
- (二) 記憶設備
- (三) 一般應用的彈性與特別計算的專長
- (四) 使用的便利，使用技術的難易
- (五) 輸出輸入的方式，環境設備的配合
- (六) 計算速率與操作速率

這些因素雖然不將納入本書討論範圍，但可以提示讀者注意到計算工具與數值分析的相關性。

4. 數位計算機

數位計算機是本書的「目標」計算工具，但並未列入讀者必須事先具備的條件。讀者請參考一般教材。

對於計算機的認識，我們可以僅就數值分析上的應用分別以結構與運籌兩方面去瞭解。前者係指計算機實體的結構。故又稱硬體；後者則係利用程式語言指導計算機的作為，有效的發揮其功用，因此相對的稱為軟體。

硬體的發展迅速，代有創新，所謂第一代，第二代，第三代，也就是根據硬體構件的改進來劃分的。但是這些硬體的設計，能夠有機的結合成為一個整體，有效的運行，並與外界溝通，則有賴軟體的貢獻。這是數值分析中比較更重視的一面。

軟體在此可以泛指一切指導機器有效運行的並與外界溝通媒體，

其基本元素可分述如下：

一、指令或指述

這是一些機器所能了解而予以反應的詞彙，這些詞彙是以數字代號，稱為指令代碼 (instruction code) 輸入並儲存在記憶之中，作為控制機器運行的依據。

二、程 式

一個序列的指述，經過有計劃的安排，使機器得以依次執行而達成預定的目的。

三、語 言

以機器所能接受而予以反應的指令遵照一定的語法擬定的程式，直接能為機器接受瞭解，藉此指導機器的運行。此等語法與其詞彙稱為機器語言 (machine language)。機器語言因為遷就硬體的設計，通常冗長煩瑣應用十分不便。於是為了應用的便利，我們簡化為若干基本單元，並以英文縮寫代號，便於我們記憶與反應，形成組合語言 (assembly language)。應用時，以組合語言寫成的程式須經翻譯為機器語言才能為機器接受，這個翻譯的工作可以由機器自行完成，指導這個翻譯工作的程式即稱為組合程式 (assembler)。

組合語言脫胎於機器語言，仍嫌不能符合人們的思考方式與語言習慣，因此進而發展出一些基於人們思考模式的語言。例如

- FORTRAN (Formula translator)
- ALGOL (Algorirhmic language)
- COBOL (Common Business Oriented Language)
- BASIC (Begimer's All-purpose Symbolic Instruction Code)
- PASCAL (紀念 1642 年發明加法器的法國數學家 Pascal)

相當的翻譯工作則有賴專門設計的程式，稱為編譯程式 (compiler)。