三角學

何祚豐編

中國科學圖書儀器公司
出版

三 角 學

何祚豐 編
沈傳艮 校

中國科學圖書儀器公司

內 容 提 要

本書係根據蘇聯中等技術學校數學教學大綱編著,並作有系統的簡明敘說. 書中開始即灌輸函數及動的觀念,羅列了大量機械工業及建築工程上的實用例題,在若干問題上特別介紹用圖解法使人有清晰的概念.書的末章又補充了研究電機工程的必要知識——正弦曲線的討論.全書一冊,如採爲中等技術學校教本, 可於六十四小時至八十小時間授完, 有相當於初中及其以上文化程度的技工,亦可用以自修.

三　角　學

編　者　何祚鑾
校閱者　沈傳良

*

中國科學圖書儀器公司出版
(上海延安西路326弄1號)
上海市書刊出版業營業許可證出〇二七號
上海新華印刷廠印刷　新華書店上海發行所總經售

*

編號：9
(原大東版印7,500冊)
開本850×1168耗1/32・4 3/8印張・120,000字
一九五六年三月新一版
一九五六年三月第一次印刷・印數1—3,020

定價：七　角

編 者 的 話

這本書的對象是工業中等技術學校的學生及車間與現場上青年技術人員。可以將這本書作爲中等技術學校的教本、參考書與工作崗位上的自修書籍。

全書的編寫：基本上依照蘇聯中等技術學校關於三角部份教學大綱的內容,並照顧着它與代數及幾何的關聯次序。

書的取材:絕大部份是依據 1948 年第十三版的德國阿・海斯博士所寫對於機械及電機工程師適用的三角。書中具有大量富有意義的從工業、工程上實際應用範圍中摘出並配好了答案的例題與練習,這就給予研究這本書的人們以一種便利，他們可以立即或在不久以後找到很多機會去結合自己有意義的實際工作。

例題的範圍很廣：在工程畫與幾何方面——包括有投影問題、立體幾何、空間坐標、極坐標、特殊曲線等;在力學方面——包括力的合成與分解、力多角形、向量等;在土木建築方面包括道路坡度、渠道、溝管、桁架、三角測量等；在機械工程方面包括螺栓、齒輪、皮帶輪、曲拐傳動機構等。

書從開始便從角的定義裏灌輸人們以運動的、可變的觀念,從這裏出發給予人們在研究數量的問題時以一種正確的理解；從而建立起辯證唯物主義的世界觀。

根據編者在前同濟高工教學時的經驗,介紹三角函數的定義時,就從三角形和圓的關聯上來考察。非但避免了初學者對於邊與邊之比的定義擴充到鈍角時會產生的疑惑,而且告訴了他們,邊與邊之比的定義祇是在特定的條件下才產生的。在學會了銳角三角函數的邊與邊之比

的定義以後，可以再向學生們闡明：三角學從三角形和圓上來考察，乃是發展出來的一種完全新的三角理論。這種發展，就是對辯證法的一個很好的例證❶。因爲它是從事物底聯系中來考察事物，而並非孤立地來考察的。

三角函數的圖示是非常重要的，所以在書裏關於三角函數的變化、內插法、解三角方程式、許多正弦函數的組合等部份，全用圖示來幫忙，因而就給予研究者以更明確的概念。

在這本書裏，主要地是用三角函數眞數値來計算的。這樣就使初學者在學習時可以集中注意力到了解三角函數的本身上去，而不致分散注意力在對數的運算上。按照蘇聯教學大綱的次序，對數是在代數中預先學會了的。因爲坊間亦已有了五位對數表的單行本，所以書中就省卻了三角函數對數表的篇幅。

學習本書各章所需的總時數，作了初步的估擬附在內容提要上，它還應該經過實踐來修正。

最末章較爲深入地談到正弦曲線，主要的是介紹了曲線的幾何特性。這對於電機及機械工程師是特別重要的一些材料，同時亦可對學習高等數學有些啓示。因此，雖然未載於蘇聯教學大綱上，仍列於書的最後作爲補充材料以便自修。

本書經沈傳良同志的詳細校閱並按照他豐富的教學經驗加以訂正，是編者特別要提出鄭重致謝的；王蓉孫、陸嘉、江可宗諸位同志的鼓勵，及大東書局方面的協助得以提早出版，此處也一併致謝。

由於編者對數學欠缺完整的研究，對蘇聯教學大綱的體會亦不够，書中存在的缺點一定還很多，希望讀者不吝指正爲幸。

何祚豐　一九五三年七月，寫於南京建築工程學校。

❶ 參閱人民出版社出版，曹葆華、于光遠譯，恩格斯著：辯證法與自然科學(第 134 頁)。

三角學目錄

第一章　函數及圖象

(1·1) 函數

在整個數學的領域內，我們將數量分成爲兩類：一類叫變數，一類叫常數。凡是在研究問題的過程中，一種數量是可以被任意地、或有限度地變動它的值的，它就被叫做爲變數。凡是在研究問題的過程中，那種數量是常保持着同等的值的，它就被叫做爲常數。在數學、物理、工業以及生活中，我們要研究的不祇是單獨在變動的一個變數，而却是要研究很多的變數及它們之間互相的連系與關係；祇有在掌握了它們——客觀的規律，我們才能進而發展到運用它們來爲我們人類謀幸福。

假如一個數與另一個變數間存在着一定的關係，當那變數變化時，這數就隨着它而變化，那末我們就稱這數爲因變數或函數，而稱那變數爲自變數。

例如在式子
$$y=x+2$$
中，x 爲自變數，y 就是 x 的函數。又例如圓的面積是半徑的函數。

不獨在數學中有函數存在，它在我們的日常生活、工程及經濟事業中到處存在。

例如在物理上，公式
$$v=\frac{s}{t}$$
中，如果 s 代表路程爲一定的長短時，它是一個常數，這時速度 v 便是變數時間 t 的函數。反過來說，時間 t 亦是速度 v 的函數。

音調的高低是振動數的函數。

三角學中要討論到三角函數，三角函數就是角的函數。那就是說

當角變化時,其它的量也隨着而變化。或者反過來時,其它的量變化時角也跟着變。

例如我們站在地上仰頭看旗杆頂,我們的頭與地平面成一個仰角,當我們仍站在原地將目光注視到在同一遠近距離旗杆旁的塔尖時,我們的頭與地平面所成的仰角就較大了(圖1)。從生活的經驗中,我們知道塔比旗杆高,因而覺察到角與高度之間的關係。這就是三角函數在生活中例子之一,以後要詳細地討論。

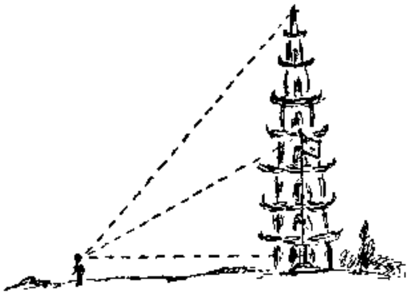

圖 1

(1·2) 坐標

爲了要敍說一個圖形的形象與位置,有一種方法是用直角坐標制來表示,在紙平面上打一個十字線,十字線的交點稱爲原點。橫線稱爲橫軸,或叫它爲 X 軸,豎線稱爲縱軸,或叫它爲 Y 軸,兩根軸相交分平面成四個象限(圖2)。在 X 軸上從原點 O 向右爲正,向左爲負;在 Y 軸上從原點 O 向上爲正,向下爲負。以正 X 軸與正 Y 軸相夾的象限爲第一象限,按照與時針運動相反的方向(反時針方向)定出其它象限的序次。於是在平面上的任何一點,就可被描述它的位置。過點 P 引一平行於 Y 軸的線交 X 軸於 A 點,AP 就是 P 點的縱坐標(通常稱作 y),OA 就是 P 點的橫坐標(通常稱作 x)(圖3)。

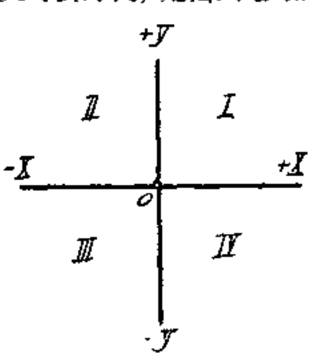

圖 2

所以祇要在選取了一個直角坐標軸與一個用來量坐標長度的長度單位時,於是在直角坐標系內的一個點就

總有兩個坐標,而兩個坐標也就能確定一點的位置。

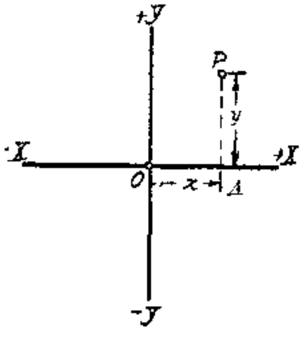

圖 3

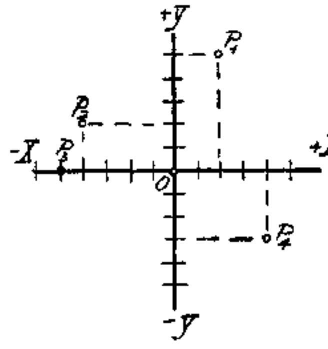

圖 4

例如圖 4 中 P_1 的 $x=2, y=5$, 寫作 $P_1(2,5)$, P_2 應是 $P_2(-4,+2)$, P_3 是 $P_3(-5,0)$, $P_4(4,-3)$。

各個象限內任意點坐標的符號可歸納成表(1·1)

表 1·1

象　限	I	II	III	IV
橫坐標 x	+	−	−	+
縱坐標 y	+	+	−	−

(1·3) 角

選取一定長短的直線段 r, 在直角坐標中將 r 的左端與原點 O 疊合,右端與 $+X$ 軸相疊合在 A 處。按反時針方向轉動直線段 r, OA 爲直線段 r 的開始時位置,叫它爲初邊或不動徑;OP 爲直線段 r 停止運動時的位置, 叫它爲終邊或動徑(圖 5)。AOP 就是由旋轉開始到旋轉結束時 r 所經過的幅度,或者說 AO 與 OP 構成一個角度 AOP。無疑地 r 由初邊 OA 位置運動迴轉一圈到原

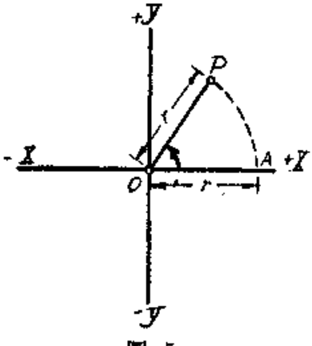

圖 5

來位置終止時，OP 與 OA 重疊，P 點所走過的路程為一個圓周，它的半徑就是 r。這時 AOP 的幅度為一個圓，我們稱他為360度，寫作 $360°$，每度為 60 分，每分為 60 秒，寫作

$$1° = 60', \qquad 1' = 60''$$

一個直角就等於 $90°$，58 度 27 分 31 秒的角寫作 $58°27'31''$。

於是就可以看出角度的大小完全是按照旋轉量的大小而定的。至於角的正負，就看直線段 r 轉動的方向而定，按照反時針方向轉動出來的角作為正的角；或正角，與時針向同方向轉出來的角作為負的角；或負角。角度的終邊停止在那個象限內時，就是說那是第幾象限的角度。例如圖 5 是第一象限的角，而圖 6 卻是第二象限的角。

(1·4) 三角函數的定義

圖 7 中 P 點是在終邊上並與 O 點有區別的任意一點；它的坐標是 x 及 y，它離開 O 點的距離是 r。我們叫 r 為半徑，並在計算中總當它是正的。

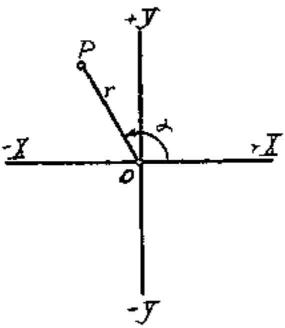

圖 6

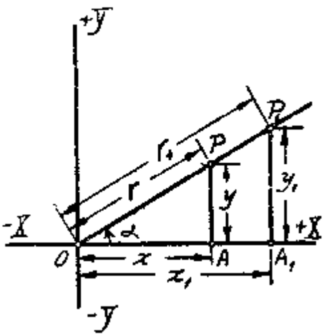

圖 7

既然在數學中一種與另一數量結着某種關係的數量，被稱為另一數量的函數，那麼對照着圖 7，我們就可以寫出以下一些三角函數。我們叫

$$\left.\begin{aligned}
&\text{角}\,\alpha\,\text{的正弦函數簡寫為}\quad \sin\alpha=\frac{\text{縱坐標}}{\text{半徑}}=\frac{y}{r}\\
&\text{角}\,\alpha\,\text{的餘弦函數簡寫為}\quad \cos\alpha=\frac{\text{橫坐標}}{\text{半徑}}=\frac{x}{r}\\
&\text{角}\,\alpha\,\text{的正切函數簡寫為}\quad \tan\alpha=\frac{\text{縱坐標}}{\text{橫坐標}}=\frac{y}{x}\\
&\text{角}\,\alpha\,\text{的餘切函數簡寫為}\quad \cot\alpha=\frac{\text{橫坐標}}{\text{縱坐標}}=\frac{x}{y}
\end{aligned}\right\}\quad(1\cdot1)$$

除了這四個三角函數之外,還有兩個如下,不過以後在計算中將不再用它們了。

$$\text{角}\,\alpha\,\text{的正割函數為}\qquad \sec\alpha=\frac{\text{半徑}}{\text{橫坐標}}=\frac{r}{x}$$

$$\text{角}\,\alpha\,\text{的餘割函數為}\qquad \operatorname{cosec}\alpha=\frac{\text{半徑}}{\text{縱坐標}}=\frac{r}{y}$$

從上面我們可以看到凡是三角函數如正弦、餘弦、正切、餘切等都是兩個長度的比，因此它們都是**不名數**，或者說是它們都是沒有單位的。所以任何一個量被這些函數中之一來乘或除時，得出的積或商的單位仍與原量相同。例如一個"力"乘上一角的餘弦仍是一個"力"，一個"長度"被一個正弦去除時,仍得一個"長度"。

在式(1·1)中，各三角函數的大小並非孤立地與 x、y、r 的大小有關,而卻是正確地與那些比例值 $\frac{y}{r}$、$\frac{x}{r}$、$\frac{y}{x}$、$\frac{x}{y}$緊密地相關連。祇要是角度 α 不變,或者說,祇要是 P點始終在這已停止運動的終邊上活動時,比例值 $\frac{y}{r}$、$\frac{x}{r}$、$\frac{y}{x}$、$\frac{x}{y}$ 總是保持它們的值不變，也就是說角 α 的三角函數不變。

我們可以很容易地從圖 7 中看出：當 P 點在終邊上移到 P_1 時,它距 O 點的距離為 r_1，距 X 軸為 y_1……。按照式 (1·1) 的叫法,對於 P_1 時的正弦函數,假如叫它為 $\sin_1\alpha$，正切函數為 $\tan_1\alpha$ 時,則

$$\sin_1\alpha=\frac{y_1}{r_1}\ ,\qquad \tan_1\alpha=\frac{y_1}{x_1}$$

從 $\Delta\,OPA$ 及 $OP_1\,A_1$ 的相似來看,

$$\frac{y}{r}=\frac{y_1}{r_1}, \qquad \frac{y_1}{x_1}=\frac{y}{x}\cdots\cdots$$

所以 $\sin_1 \alpha=\sin \alpha$, $\tan_1 \alpha=\tan \alpha$。因而我們說：角度不變時，它的三角函數不變。反過來說，在以後我們也將看到，當角度變化時，那些比值都發生了變化，也就是說三角函數發生了變化。這也就是 $\sin \alpha$、$\cos \alpha$、$\tan \alpha$、$\cot \alpha$ 等爲什麼叫做爲 α 角的三角函數的原因。

(1·5) 三角函數的符號

因爲式(1·1)內含有坐標，所以從現在起每個三角函數都有符號；並且因爲 r 總是被作爲正的值，所以

正弦的符號就是**縱坐標** y 的符號，

餘弦的符號就是**橫坐標** x 的符號。

除此之外正切函數與餘切函數的符號總是相同的。

由式 (1·1) 並連同表 (1 1) 便得三角函數在各象限的符號列成表(1·2)

表 1·2

象　限	I	II	III	IV
$\sin \alpha$	+	+	−	−
$\cos \alpha$	+	−	−	+
$\tan \alpha$	+	−	+	−
$\cot \alpha$	+	−	+	−

表 1·3

sin	全
tan cot	cos

爲了便於記憶起見，也可畫一個表如表(1·3)，各按象限的位置註上那種是正的函數。

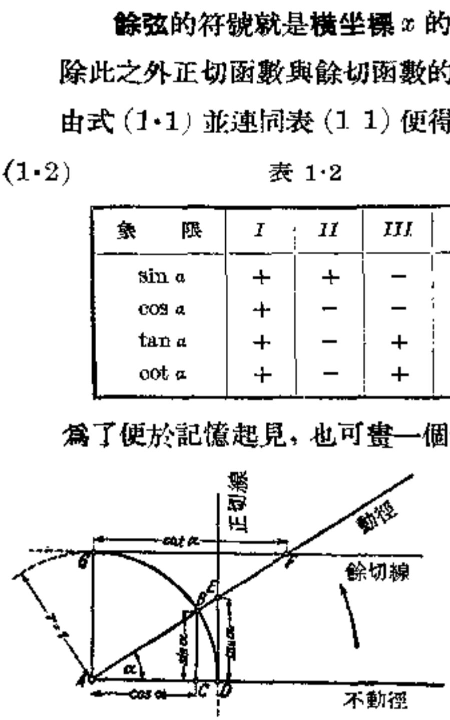

圖 8

(1·6) 在單位圓上用線段來顯示函數

一個任意角的所有三角函數值可以很簡單地用線段來顯示。在圖 8 中 α 是已知角；在

角頂 A 處用單位長度作半徑畫段圓弧（這就是單位圓的一部份）；並在點 D 及 G 處引切線。由圖中得如下的式子：

$$\sin\alpha=\frac{BC}{AB}=\frac{BC}{1}=BC \qquad \text{簡成 } \sin\alpha=BC$$

$$\cos\alpha=\frac{AC}{AB}=\frac{AC}{1}=AC \qquad \text{簡成 } \cos\alpha=AC$$

$$\tan\alpha=\frac{BC}{AC}=\frac{DE}{AD}=\frac{DE}{1}=DE \qquad \text{簡成 } \tan\alpha=DE$$

$$\cot\alpha=\frac{AD}{DE}=\frac{FG}{AG}=\frac{FG}{1}=FG \qquad \text{簡成 } \cot\alpha=FG$$

在這裏三角函數值是用線段表示出來了（在以前的說法它們都是一個純粹的數字）。其所以能如此的原因，是因為我們在相比的分子式中將分母選為 1 的原故。所以假如圓的半徑是 1 時，那些線段 BC、AC 等的長度就與那個與它相對應的三角函數值相等。這些線段就被稱作為三角函數線。例如 BC 稱為正弦線，ED 稱為正切線等。

在圖 8 中圍着 A 點轉動動徑 AF 到另一個位置，於是角度 α 就變了，同時不難想像三角函數值亦變了。任意的一個角 α 都有它固定的四個函數值用線段 BC、AC、DE 及 GF 來顯示。

現在我們使式(1·1)中分數中的分母等於1，於是便可得到式子

$$\sin\alpha=y \text{ 及 } \cos\alpha=x \qquad (1\cdot2)$$

即是說：任意角的正弦值及餘弦值與動徑及單位圓相交點的坐標相同。（當然先應假定不動徑仍與橫軸相重疊，參考圖 9 及 10）。

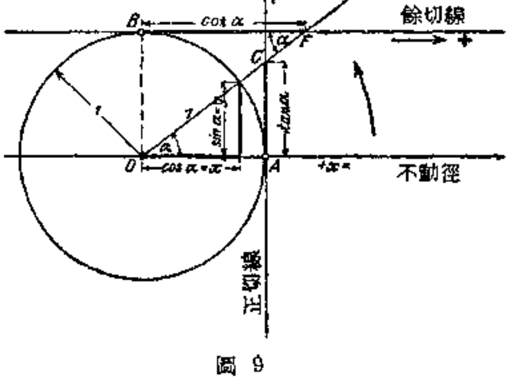

圖 9

$\tan\alpha$ 及 $\cot\alpha$ 亦可同樣地用線段來表示。假如將 P 點移至 C 點，

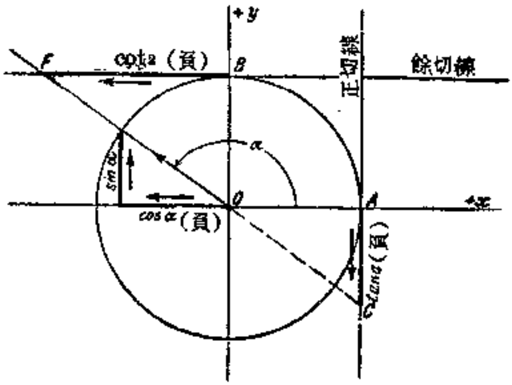

圖 10

就是 A 處切線與動徑相交的一點位置。於是,因爲 $OA=1$,所以 $\tan\alpha=AC$。F 點的坐標是 $x=BF$ 及 $y=BO=r=1$,所以 $\cot\alpha=x:y=BF$,於是得

$$\tan\alpha=AC \text{ 及 } \cot\alpha=BF \qquad (1\cdot3)$$

這兩個式子還需加以說明,假如角 α 是如圖 10 的一個鈍角,則動徑與垂直的那根正切線就碰不着了;這時我們定正切值就不再用動徑本身,而祇用它反向的延長線與 A 處的正切線相交線段,因爲從圖中三角形的相似,可得

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{AC}{OA}=AC$$

同樣的方法亦將用於第三象限的角求正切值及第三與第四象限的角求餘切值。所以可將式(1·3)作如下的簡括:對於任何一個角度 α 來說,它的正切值與餘切值是用線段 AC 及 BF 來表示;這些線段是指那些或者由動徑本身或者由它的反向延長線所割出的,在 A 及 B 點所引的切線並從 A 及 B 點開始的那段長度。AC 及 BF 定出 $\tan\alpha$ 及 $\cot\alpha$ 時的符號也是符合的。

因此在圖 10 中因爲 AC 是向下的,所以它是負的。

初學者常有一種願望希望能具體地了解或看見這些三角函數,式(1·2)及(1·3)與圖 9 及 10 大概在這點上可以有些幫助。

第二章　銳角的三角函數

(2·1) 銳角三角函數的定義

銳角的定義是小於 90° 的角，所以牠一定在第一象限內。在四個象限之內，我們現在祇討論着這一特殊情形——第一象限的角——的時候，便可從圖 7 中畫出一個直角三角形如圖 11。

在這時候，比照着圖 7，圖 11 中角 α 的三角函數就成爲以下的關係：

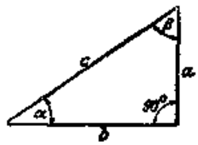

圖 11

1. 正弦　一個銳角的正弦就是這隻角的對邊比斜邊（圖 2）。

$$\sin\alpha=\frac{a}{c}=\frac{\text{對邊}}{\text{斜邊}}$$

2. 餘弦　一個銳角的餘弦是這隻角鄰邊與斜邊的比。

$$\cos\alpha=\frac{b}{c}=\frac{\text{鄰邊}}{\text{斜邊}}$$

3. 正切　一個銳角的正切是這隻角對邊與鄰邊的比。

$$\tan\alpha=\frac{a}{b}=\frac{\text{對邊}}{\text{鄰邊}}$$

4. 餘切　一個銳角的餘切是這隻角鄰邊與對邊的比。

$$\cot\alpha=\frac{b}{a}=\frac{\text{鄰邊}}{\text{對邊}}$$

5. 正割　斜邊與鄰邊的比。

$$\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}=\frac{c}{b}=\frac{\text{斜邊}}{\text{鄰邊}}$$

6. 餘割　斜邊與對邊的比。

$$\operatorname{cosec}\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}=\frac{c}{a}=\frac{\text{斜邊}}{\text{對邊}}$$