三角形的巧合点

江苏省数学学会科普委员会主编

涂世泽　编写

初中数学辅助读物

江苏教育出版社

SHUXUE

三角形的巧合点

江苏省数学学会科普委员会主编
涂 世 泽 编 写

江 苏 教 育 出 版 社

三角形的巧合点

涂世泽　编写

江苏教育出版社出版

江苏省新华书店发行　　淮阴新华印刷厂印刷

开本 787×1092 毫米 1/32　印张 3.25　字数 67,000

1984 年 6 月第 1 版　1984 年 6 月第 1 次印刷

印数 1-54,000 册

书号：13351·025　定价：0.30 元

责任编辑　何履邦

编者的话

数学在实际生活中的应用是很广泛的。对于一个中学生或任何一个青少年来讲,不管你将来是在哪一个部门里工作,还是进哪一个学校，都必须要有最基本的数学知识，才能作出某些成绩。因此，每一个同学和青少年都应该努力打好数学基础。

学习数学，首先应该掌握一定的数学概念和数学规律，这是学好数学的基础。同时，也要学会把学到的知识用之于实际。如果掌握了知识不会灵活运用，那么，这些知识便只是一堆废物。因此,我们在学习数学时,必须注意理论和实际两个方面，注意领会有关的数学思想,掌握数学思维的方法,从根本上提高分析问题、解决问题的能力。为了达到这样的目的，在正课学习的基础上，适当看一点课外数学读物，以开拓知识领域，扩大视野，启迪智慧，是十分必要的。

基于这样的指导思想，我们组织部分长期从事中学数学教学和研究的专家、教授、中学教师编写了这套初中数学辅助读物。

这套丛书的内容密切结合现行初中课本，注意数学教材中各个方面的联系及应用,采用以点带面、纵横贯通的方法,阐述初中数学里的重要概念、定理和法则，疏通学习中的难点，剖析教材中的重点。书中涉及的数学知识一般不超越初

中数学的范围，某些地方虽稍有拓宽加深，但以初中学生能看懂为原则。文字上力求适合初中学生的年龄特点，做到生动活泼，浅显通俗。

这套丛书第一批编辑出版的有五种：《怎样列方程解应用题》（沈超编写），《三角形的巧合点》（涂世泽编写），《距离与角度》（王永建编写），《怎样解初中数学题》（赵振威编写），《数学命题和证明》（范惠民编写）。以后将根据初中学生和广大青少年学习初中数学知识需要，继续出版。

由于当前初中学生的程度不一，这套书在选题与编写方面都可能存在一些缺点，欢迎各地教学研究部门、中学教师以及广大青少年读者多多提出意见，帮助我们编好这套丛书。

江苏省数学学会科普委员会

一九八三年十一月二十九日

目　录

引　　言

平面上的三条直线**两两相交***，一般，总会有如图 0-1 所示的三个交点．但是，在某些情形下，平面上的三条直线也可能会**恰巧相交于一点**，如图 0-2 所示．

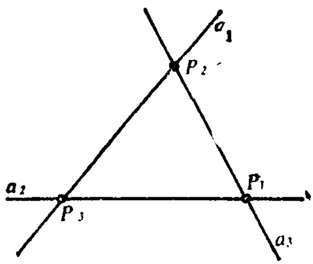

图 0-1

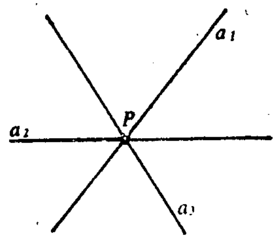

图 0-2

恰巧相交于一点的三条直线(或多于三条直线)，简称为**共点线**；这类共点线的交点，通称**巧合点**．

在这本书里，我们打算讨论一些有关三角形的巧合点的知识．这里，所谓**三角形的巧合点**，也就是关于**三角形的某些共点线的交点**；这些点都各有其专用的名称．

本书所讲三角形的巧合点，主要有：三角形的**外心**、**垂心**、**重心**、**内心和旁心**。这些点在平面几何中占有相当重要的地位．特别是：在研究和解决关于三角形的某些问题

* 三条直线**两两相交**，就是说，这三条直线中每两条**都**相交。

时，往往要让这些点来发挥作用。

本书的内容，分为四部分。在一、二两部分，我们着重讲解有关概念和主要原理。在第三部分，就进而论述三角形的这些巧合点的性质(包括它们的相互关系)。然后，在第四部分，再进一步介绍一些有关的知识。

希望读者在阅读本书时能自行作图、认真看图，积极地进行研究和思考。

本书所列习题，在书末附有解答与提示。读者在解题时应该首先独立思考、反复推敲，不要依赖所附解答。倘若你花过很多精力去进行探索，那么即使你并没有把题解出来，也肯定会从中得到不少收获。当你花了工夫而仍然没有解答出来，需要得到些帮助的时候，你再去看一下解答；这时，最好只看解答中的一部分，从中找到有用的东西，再去自行作出解答的其余部分。

一、有关概念

我们所讨论的三角形的巧合点：外心、垂心、重心、内心和旁心，都是三角形理论中有名的特殊点。对于这些点，我们应该有清晰的了解。

下面，首先**借助具体图形**，对这些点作出直观的说明。这里，着重阐述有关概念，让读者**通过对图形的直接观察来认清这些巧合点各是由三角形的哪些特殊线共点形成的**。至于对这些特殊线的共点性的证明，则待第二部分讲。

§1 三角形的外心

为了说明什么是三角形的外心，我们先来看下面的这个问题：

"已知不在一直线上的三点 A、B、C；怎样找定一点 D，使它和这三点 A、B、C 的距离相等?"；或者说，"已知$\triangle ABC$；怎样找定一点 D，使它和$\triangle ABC$ 的三个顶点 A、B、C 的距离相等?"

我们知道，经过线段中点而且和这条线段垂直的直线，叫作**这条线段的中垂线**（或者，**垂直平分线**）。例如，图1-1中，直线 PQ 就是线段 BC 的中垂线；或者说，它是三角形 ABC 的边 BC 的中垂线（它经过 BC 的中点 M，而且垂直于 BC）。

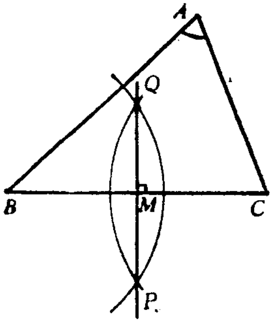

图 1-1

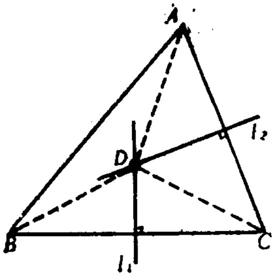

图 1-2

我们还知道，**线段的中垂线上任何一点和这条线段的两个端点距离相等**。例如，D 是线段 BC 的中垂线 l_1 上的点（如图 1-2），则 $DB=DC$。由此可见，只要作出$\triangle ABC$的边 BC 的中垂线 l_1 和边 CA 的中垂线 l_2，那么，l_1 和 l_2 相交的交点，就是和 A、B、C 距离相等的点（如图 1-2 中，D 是 l_1 和 l_2 的交点，则 $DB=DC=DA$）。这样，我们就得出了上面问题的解。

容易想到，如果再作出边 AB 的中垂线 l_3，那么，l_1 和 l_3 的交点也是和 A、B、C 距离相等的点；同理，l_2 和l_3 的交点也应该是和 A、B、C 距离相等的点。我们要问：这两个交点是否就是 l_1 和 l_2 的交点 D？也就是，我们要来研究："这三条直线 l_1、l_2、l_3 是否恰巧相交于一点？"

我们来作三角形三边的中垂线：

先作锐角三角形三边的中垂线（如图 1-3），可以看到，所作

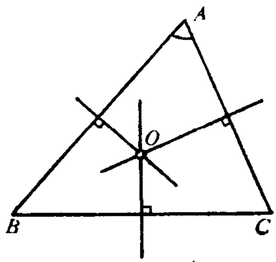

图 1-3

的这三条线恰巧相交于一点。

再来作钝角三角形三边的中垂线（如图1-4），所作出的这三条线也恰巧相交于一点.

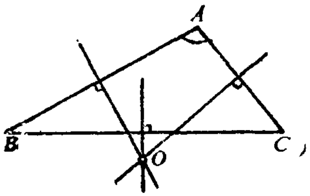

图 1-4

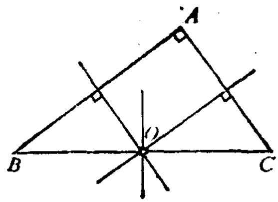

图 1-5

最后，来作直角三角形三边的中垂线（如图1-5），所作出的这三条线也恰巧相交于一点。

通过实际作图，综合上面三种情形，归纳起来，得出如下的结论：

任何三角形的三边的中垂线，都恰巧相交于一点。这个点和三角形的三个顶点距离相等。

三角形三边的中垂线的交点，叫作三角形的外心。

三角形的“外心”，通常用大写英文字母“O”来表示。

由上面的图1-3、1-4、1-5，我们看出：

（1）锐角三角形的外心，在三角形**内**；

（2）钝角三角形的外心，在三角形**外**；

（3）直角三角形的外心，**就是斜边的中点**。

建议读者自行作图，画出直角三角形的外心、钝角三角形的外心；并且，想想看：怎样作出“经过不在一直线上三点”的圆？

§2　三角形的垂心

大家知道，在平面上可以有这样的四点 A、B、C、D：它们中的任意三点不在一条直线上，而且"A、B 的连线和 C、D 的连线平行（$AB \parallel CD$），A、D 的连线和 B、C 的连线平行（$AD \parallel BC$）"。很明白的，这样的四点正好就是平行四边形 $ABCD$ 的四个顶点。

但是，你知道吗？在平面上是否可以有这样的四点 A、B、C、D：它们之中"A、B 的连线和 C、D 的连线垂直（$AB \perp CD$），A、D 的连线和 B、C 的连线垂直（$AD \perp BC$）"？这个问题的答案是肯定的。解答如下：

任取不在一条直线上的三点 A、B、C；连接 AB、BC、CA，得到 $\triangle ABC$（图 1-6）。过 A 点，作 $h_1 \perp BC$；过 C 点，作 $h_3 \perp AB$。设 h_1 与 h_3 相交的交点为 D；这样，"$h_1 \perp BC$ 和 $h_3 \perp AB$"就是"$AB \perp CD$，$AD \perp BC$"。由此可见，在平面上确实可以有这样四点 A、B、C、D：它们中任意三点不在一条直线上，而且"$AB \perp CD$、$AD \perp BC$"。

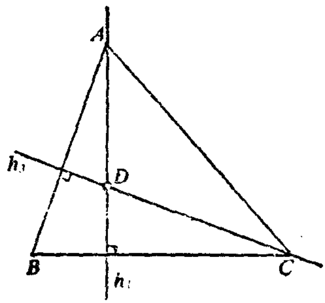

图 1-6

上面解答，使我们进而想到：在平面上是否可以有这样的四点 A、B、C、D，它们之间不但有"$AD \perp BC$，$AB \perp CD$"，而且还有"$AC \perp BD$"？这个问题就是说：是否能在平面上找到这样的四点 A、B、C、D，使得其中的"任何两点的连线都垂直于其余两点的连线"？

仔细观察上面的图 1-6，可以发现：这个问题就是要我们判明"图 1-6 中的 B、D 两点连线是否垂直于 AC"。换句话说，就是要我们来判明"过三角形的三个顶点所作对边的垂线是否相交于一点"。

过三角形的顶点所作对边的垂线，叫作**三角形的高线**；在高线上由顶点到垂足的线段，叫作**三角形的高**。如图 1-7 中，线段 AD 是$\triangle ABC$ 的高，AD 所在的直线 h 就是 $\triangle ABC$ 的高线。

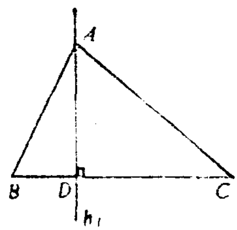

图 1-7

这样，上面问题就改变成为：是否"三角形的三条高线相交于一点"？

现在来找这个问题的答案。为此，我们按照锐角三角形、钝角三角形、直角三角形这三种情况，分别作出三角形的三条高线，并对所作的图形进行直接观察。

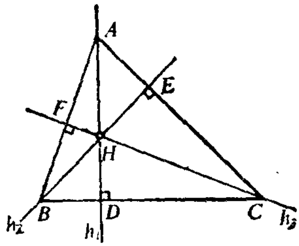

图 1-8

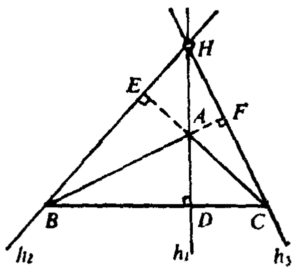

图 1-9

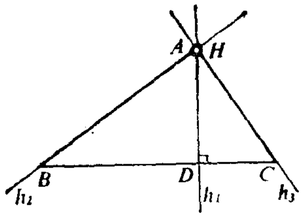

图 1-10

如图 1-8、1-9、1-10 所示，我们看到，所作出的每一种三角形的三条高线，都恰巧相交于一点.

于是，通过对图形的直接观察，归纳起来，得出结论如下：

任何三角形的三条高线都相交于一点.

三角形的三条高线的交点，叫作三角形的垂心.

三角形的"垂心"，通常用大写英文字母"H"表示.

从上面的图 1-8、1-9、1-10，可以看到：

（1）锐角三角形的垂心，在三角形内；

（锐角三角形的三条高，都在三角形内.）

（2）钝角三角形的垂心，在三角形外；

（钝角三角形中，钝角所对边上的高在三角形内，其余两边上的高都在形外。如图 1-9，$\angle A$是钝角，它的对边BC上的高 AD 在形内，但其余两边 CA、AB 上的高 BE、CF 都在形外。）

（3）直角三角形的垂心，就是**直角顶点**。

（直角三角形中，斜边上的高在形内；每一直角边上的高都与另一直角边相重合。）

建议读者自行研究：先来作出一个三角形 ABC（钝角三角形或锐角三角形）的垂心H；然后通过对图形进行观察来找"$\triangle HBC$、$\triangle AHB$、$\triangle CAH$ 的垂心各是什么点?"这样一来，你有什么体会？你看出了吗?"$\triangle HBC$ 的垂心是A点，$\triangle AHB$ 的垂心是C 点，$\triangle CAH$ 的垂心是B点"。

§3　三角形的重心

我们知道，在任何一个平行四边形 $ABCD$ 中，总会有这样的一点E，使得以 E 为顶点的四个三角形"$\triangle EAB$、$\triangle EBC$、$\triangle ECD$、$\triangle EDA$"的面积相等（如图 1-11）。这点E就是$\square ABCD$的对角线的交点。

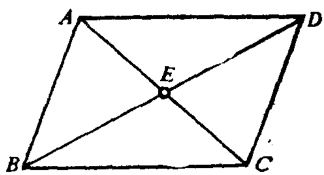

图 1-11

现在要问：在任何一个三角形 ABC 内，是否也能有这样的一点 P，使得以它为顶点的三个三角形“$\triangle PBC$、$\triangle PCA$、$\triangle PAB$”的面积相等？

下面，我们来研究这个问题。

三角形的顶点与其对边的中点连线，叫作**三角线的中线**。如图 1-12 中，线段 AM、BN 就是 $\triangle ABC$ 的两条中线（M 是边 BC 的中点，N 是边 CA 的中点；AM、BN 分别是边 BC、CA 上的中线）。

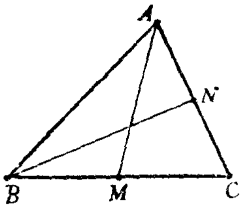

图 1-12

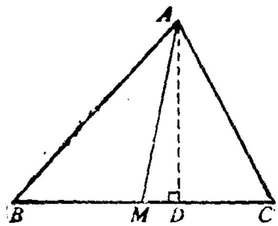

图 1-13

因为，三角形的面积 $=\frac{1}{2}\cdot$底$\times$高；所以，如果两个三角形的底相等、高也相等，那么这两个三角形的面积相等。据此，就可推知：三角形的一条中线把三角形的面积分为二等分；如图 1-13 中，AM 是 $\triangle ABC$ 的一条中线，从而就有：“$\triangle ABM$ 与 $\triangle AMC$ 的面积相等”。(图 1-13 中，AD 是 $\triangle AMC$ 的高、也是 $\triangle ABM$ 的高，而且 $BM=MC$；因此，由 $\triangle ABM$ 的面积 $=\frac{1}{2}\cdot BM\times AD$ 和 $\triangle AMC$ 的面积 $=\frac{1}{2}\cdot MC\times AD$ 得到“$\triangle ABM$ 与 $\triangle AMC$ 的面积相等”)。

现在，作出 $\triangle ABC$ 的两条中线 AM、BN，设这两条中线相