清

初等数学解题思路

(下)

CHU DENG
SHU XUE
JIE TI SI LU

海洋出版社

初等数学解题思路

下　册

邓禹绩　肖　钰
薛川坪　靳尚成　编
吕凤翥　　审校

海洋出版社

1983年・北京

内容提要

本书是根据全日制十二年制《中学数学教学大纲》(草案)及十年制中学数学新编通用教材并结合多年的教学经验编成的。其目的在于加深读者对中学数学基本内容的理解，开阔读者的解题思路，提高解数学题的能力。

全书分上、中、下三册。上册内容为解题方法总论(怎样解数学题)和代数；中册内容为平面几何、立体几何、三角；下册内容为解析几何、微积分。作者对上述内容作了系统整理，着重分析讨论了解题思路和方法。每章附有练习及答案，对有一定难度的练习作了提示或解答。其内容可适应今后五年内高中数学教学需要。

本书可供中学生课外阅读，也可作为具有中等文化程度的中青年同志自学用书。对中学数学教师、大专师范院校师生也是一部很有价值的参考书。

初等数学解题思路

下　册

邓禹绩　肖　钰
薛川坪　靳尚成　编

吕凤翥　审校

海洋出版社出版
(北京市复兴门外大街)
新华书店北京发行所发行机工印刷厂印刷
开本：787×1092 1/32印张：11　字数：220千字
1983年10月第一版　1984年1月第一次印刷
印数：100,000册

统一书号：7193·0246　定价：1.10元

编 者 的 话

怎样掌握初等（中学）数学解题的思路和方法，这是大家所关心的。的确，要学好中学数学，除去要掌握好有关的概念、定理、公式之外，还必须通过各类典型例题习题的学习，才能进一步加深对基础知识的理解，培养分析问题的能力，开扩解题的思路，寻求解题的规律，掌握解题的方法。为此，我们参照全日制学校十二年制《中学数学教学大纲》（草案），依据十年制新编中学数学通用教材和多年积累的教学经验，试编写《初等数学解题思路》一书，以求抛砖引玉。

本书在对中学数学各部分内容系统化的基础上，分类列举了各章的典型例题，并对解题思路和方法进行了分析研究，力求指出运用每章知识可以解决哪几类典型问题，每类问题可以通过哪些途径去思考，解题过程中有哪些方法和技巧，以及应当注意什么问题。此外为了提高解综合题的能力，书中首先选编了六个解题方法的专题。每章例题习题力求精练而具有一定典型性，分析解答力求简练。为了不使读者陷入题海之中，为了提高中学生及有关读者的解题能力，书中对有一定难度的题目作了提示或解答。

在编写过程中，北京大学吕凤翥老师对本书进行了认真的校核、审阅并提出了许多宝贵意见，在此表示衷心感谢。

由于篇幅所限，书中例题解法一般只选择一种。由于时间和水平所限，书中难免有不妥之处，望读者不吝赐教。

一九八二年七月

本书使用下列符号

自然数集——N;	整数集——J;
实数集——R;	复数集——C;
等差数列——AP;	等比数列——GP;
极大值——max;	极小值——min。

目　　录

第六篇　解析几何

第一章　平面直角坐标系和基本公式

基本内容

（一）有向线段

1. 有向直线

一条直线具有两个相反的方向，如果选定其中一个方向作为正向，那么相反的方向就是负向，像这样规定好了方向的直线叫做有向直线。

2. 有向线段

规定好了起点和终点的线段叫做有向线段，从起点到终点的方向就是这条有向线段的方向，在表示有向线段时，我们规定把表示起点的字母写在前面，把表示终点的字母写在后面，例如A是起点，B是终点，就记作AB.

要决定一条有向线段的方向是正是负，需要看这条线段的方向和它所在直线的方向是否一致，如果一致，它就是正方向的线段；如果相反它就是负方向的线段。

3. 有向线段的数量

一条有向线段的长度，连同表示它的方向的正负号，叫做这条有向线段的数量，为了简便，我们把有向线段AB的数量也记作AB，A是线段起点，B是线段终点。

对于任何两条有向线段AB和BA的数量，都有这样的关系：$AF=-BA$　即$AB+BA=0$。

4. 有向线段的绝对值

如果不考虑有向线段的方向，只考虑它的长度，就叫做有向线段的绝对值，有向线段AB的绝对值记作$|AB|$。

5. 有向线段的数量公式

如果A、B两点的坐标分别是x_1和x_2，那么

$$AB=x_2-x_1$$

6. 沙尔定理

设A、B、C是同一直线上的三个点，那么不论它们的位置怎样，都有$AB+BC=AC$的关系。

推广：设A_1、$A_2\cdots A_n$是同条直线上的几个点，那么不论它们的位置怎样，都有$A_1A_2+A_2A_3+\cdots+A_{n-1}A_n=A_1A_n$的关系。

（二）平面直角坐标系

平面上两条有公共原点又互相垂直的数轴，叫做平面直角坐标系，建立了直角坐标系的平面叫做直角坐标平面。

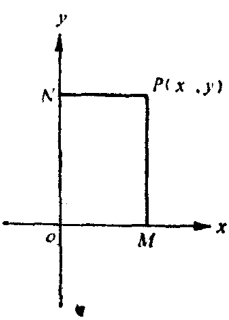

图 5-1-1

利用直角坐标系，可以用一对实数来表示平面内任意一个点的位置，设P是平面内任意一点（图5-1-1），从P分别作x轴和y轴的垂线，得垂足M和N。设M点在x轴上的坐标是x，N点在y轴上的坐标是y，那么(x, y)就是P点在直角坐标系中的坐标。这样，对于坐标平面内任意一点P，可以得出唯一的一对有序实数(x, y)来和它对应。反过来，对于任何一对实数(x, y)，在平面内就能确定唯一的点，而它的坐标是(x, y)。这样，平面内的点和所有一对实数(x, y)

之间就建立了一一对应的关系。

(三)基本公式

1. 两点间距离公式

设两点的坐标为$P_1(x_1, y_1)$、$P_2(x_2, y_2)$,则两点间的距离$|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

特殊位置的两点间的距离,可用坐标差的绝对值表示:1)当$x_1=x_2$时,(两点在y轴上或两点连线平行于y轴)则$|P_1P_2|=|y_2-y_1|$;2)当$y_1=y_2$时(两点在x轴上或两点连线平行于x轴)则$|P_1P_2|=|x_2-x_1|$.

2. 直线的倾角和斜率

1) 直线的倾角:直线l和x轴相交时,直线l向上的方向和x轴正方向所成的最小的正角α叫做直线l的倾角,直线l和x轴平行时,倾角为零。任意一条直线的倾角α的范围是$0\leqslant\alpha<\pi$.

2) 斜率:一条直线倾角的正切叫做这条直线的斜率。一般用K表示,$K=\mathrm{tg}\alpha$,当$\alpha=90^\circ$时斜率不存在。

3) 过两点$P_1(x_1, y_1)$,$P_2(x_2, y_2)$的直线的斜率为

$$K=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\qquad(x_2\neq x_1)$$

3. 线段的定比分点

1) 定义:设P点把有向线段P_1P_2分成P_1P和PP_2两部分,那么有向线段P_1P和PP_2的数量的比,就是P点分P_1P_2所成的比,通常用λ表示,就是$\lambda=\frac{P_1P}{PP_2}$,点$P$叫做分线段$P_1P_2$为定比$\lambda$的定比分点。

(1)P点内分P_1P_2时(如图5-1-2甲)$\lambda>0$.

(2)P点外分P_1P_2时(如图5-1-2乙、丙)$\lambda<0$.

$(\lambda \neq -1)$

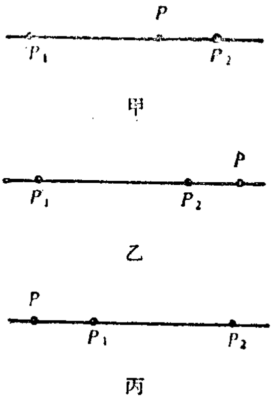

图 5-1-2

特别是当P和P_1重合时$\lambda=0$；当P和P_2重合时λ不存在，当P外分P_1P_2至无穷远点时$\lambda=-1$.

2) 公式：分$P_1(x_1, y_1)$和$P_2(x_2, y_2)$连线所成的比是λ的分点坐标是：

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},$$

$$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$$

特别是，当P是P_1P_2的中点时，$\lambda=1$，因此连结$P_1(x_1, y_1)$和$P_2(x_2, y_2)$的线段中点的坐标是：

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}, \qquad y=\frac{y_1+y_2}{2}$$

4. 三角形面积公式：若三角形三顶点为$P_i(x_i, y_i)$ $(i=1, 2, 3)$ 则其面积的行列式表达式为：

$$S_{\Delta P_1P_2P_3}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}\text{的绝对值}$$

例题类型和解题方法

（一）利用有向线段的数量公式解题

当计算或证明在同一直线上的几个点的数量关系时可利用有向线段的数量公式$AB=x_2-x_1$，要特别注意A点的坐标

是x_1，B点的坐标是x_2，当没有给定点的坐标时，可设点的坐标以利于计算或证明。

例1 设P是A、B、C三点所在直线上任意一点，求证：$PA\cdot BC+PB\cdot CA+PC\cdot AB=0$

证：设A、B、C三点的坐标分别为a、b、c，P点的坐标为x则，

$$\begin{aligned}左式&=(a-x)(c-b)+(b-x)(a-c)+(c-x)(b-a)\\&=ac-ab-cx+bx+ab-ax-bc+cx+\\&\quad+bc-bx-ac+ax\\&=0\end{aligned}$$

（二）用直角坐标系表示平面上点的坐标

用直角坐标系表示平面上点的坐标是依据点的坐标的概念将点投射到坐标轴上计算轴上有向线段的数量。有时可利用点的位置的对称性在求出一些点的坐标后再求另一些点的坐标。如点$P(x, y)$关于x轴的对称点P'的坐标为$(x,-y)$；关于y轴对称点的坐标$P'(-x, y)$；关于原点对称的点的坐标$P'(-x, -y)$，关于直线$x=y$的对称点$P'(y, x)$。

例2 已知正六边形的边长为a，它的中心在原点，两个相对的顶点在x轴上，求这个正六边形各顶点的坐标。

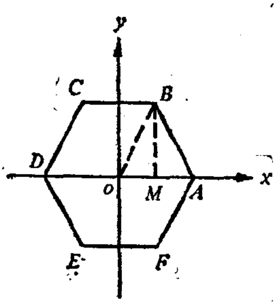

图 5-1-3

解：如图5-1-3设$ABCDEF$为已知正六边形，因为正六边形的半径等于边长，所以A点的坐标为$(a, 0)$

过B点作$BM\perp Ox$，M为垂足，在直角$\triangle OBM$中，$OB=$