

清
**初等数学
解题思路**

CHUDENG
SHU XUE
JIE TISILU

海洋出版社

初等数学解题思路

下 册

邓禹绩 肖 钰 编
薛川坪 靳尚成
吕凤翥 审校

海洋出版社

1983年·北京

内 容 提 要

本书是根据全日制十二年制《中学数学教学大纲》(草案)及十年制中学数学新编通用教材并结合多年的教学经验编成的。其目的在于加深读者对中学数学基本内容的理解,开阅读者的解题思路,提高解数学题的能力。

全书分上、中、下三册。上册内容为解法方法总论(怎样解数学题)和代数;中册内容为平面几何、立体几何、三角;下册内容为解析几何、微积分。作者对上述内容作了系统整理,着重分析讨论了解题思路和方法。每章附有练习及答案,对有一定难度的练习作了提示或解答。其内容可适应今后五年内高中数学教学需要。

本书可供中学生课外阅读,也可作为具有中等文化程度的中青年同志自学用书。对中学数学教师,大专师范院校师生也是一部很有价值的参考书。

初等数学解题思路 下 册

邓禹绩 肖 钰 编
薛川坪 新高成
吕凤翥 审校

海洋出版社出版

(北京市复兴门外大街)

新华书店北京发行所发行机工印刷厂印刷

开本: 787×1092 1/32印张: 11 字数: 220千字

1983年10月第一版 1984年1月第一次印刷

印数: 100,000册

统一书号: 7193·0246 定价: 1.10元

编者的话

怎样掌握初等（中学）数学解题的思路和方法，这是大家所关心的。的确，要学好中学数学，除了要掌握好有关的概念、定理、公式之外，还必须通过各类典型例题习题的学习，才能进一步加深对基础知识的理解，培养分析问题的能力，开扩解题的思路，寻求解题的规律，掌握解题的方法。为此，我们参照全日制学校十二年制《中学数学教学大纲》（草案），依据十年制新编中学数学通用教材和多年积累的教学经验，试编写《初等数学解题思路》一书，以求抛砖引玉。

本书在对中学数学各部分内容系统化的基础上，分类列举了各章的典型例题，并对解题思路和方法进行了分析研究，力求指出运用每章知识可以解决哪几类典型问题，每类问题可以通过哪些途径去思考，解题过程中有哪些方法和技巧，以及应当注意什么问题。此外为了提高解综合题的能力，书中首先选编了六个解题方法的专题。每章例题习题力求精练而具有一定典型性，分析解答力求简练。为了不使读者陷入题海之中，为了提高中学生及有关读者的解题能力，书中对有一定难度的题目作了提示或解答。

在编写过程中，北京大学吕凤翥老师对本书进行了认真的校核、审阅并提出了许多宝贵意见，在此表示衷心感谢。

由于篇幅所限，书中例题解法一般只选择一种。由于时间和水平所限，书中难免有不妥之处，望读者不吝赐教。

一九八二年七月

本书使用下列符号

自然数集—— N ; 整数集 —— J ;
实数集 —— R ; 复数集 —— C ;
等差数列—— AP ; 等比数列—— GP ;
极大值 —— \max ; 极小值 —— \min .

目 录

第六篇 解析几何	(1)
第一章 平面直角坐标系和基本公式	(1)
基本内容	(1)
(一) 有向线段	(1)
(二) 平面直角坐标系	(2)
(三) 基本公式	(3)
例题类型和解题方法	(4)
(一) 利用有向线段的数量公式解题	(4)
(二) 用直角坐标系表示平面上点的坐标	(5)
(三) 基本公式的使用	(6)
练习1—1	(10)
练习1—2	(12)
第二章 曲线与方程	(12)
基本内容	(12)
(一) 定义	(12)
(二) 曲线与方程的两个基本问题	(13)
附: 充要条件	(14)
例题类型和解题方法	(14)
(一) 已知曲线求它的方程	(14)
(二) 已知方程画出它的曲线	(17)
(三) 判断充要条件	(19)
练习2—1	(19)
练习2—2	(21)
第三章 直线	(21)
基本内容	(21)
(一) 直线方程的各种形式	(21)

(二) 点到直线的距离公式·····	(22)
(三) 直线间的位置关系·····	(22)
例题类型和解题方法·····	(23)
(一) 求直线方程·····	(23)
(二) 点与直线、直线与直线的位置关系·····	(27)
练习3—1·····	(33)
练习3—2·····	(34)
第四章 圆锥曲线 ·····	(35)
一 圆·····	(35)
基本内容·····	(35)
(一) 圆的定义·····	(35)
(二) 圆的方程·····	(35)
(三) 点与圆的位置关系·····	(35)
(四) 直线与圆的位置关系·····	(36)
(五) 圆与圆的位置关系·····	(36)
例题类型和解题方法·····	(37)
(一) 已知圆的方程确定圆心半径·····	(37)
(二) 求圆的方程·····	(37)
(三) 圆的切线·····	(38)
(四) 关于圆的割线与弦长·····	(39)
(五) 两圆位置关系·····	(41)
(六) 圆系·····	(41)
(七) 综合题·····	(42)
练习4—1·····	(45)
练习4—2·····	(46)
二 椭圆、双曲线、抛物线·····	(47)
基本内容·····	(47)
(一) 椭圆和双曲线·····	(47)
(二) 抛物线·····	(48)

例题类型和解题方法	(48)
(一) 已知圆锥曲线的标准方程求焦点坐标、离心率、 准线方程、渐近线方程	(48)
(二) 求圆锥曲线的方程	(49)
(三) 证明题	(54)
练习4—3	(56)
练习4—4	(58)
三 椭圆、双曲线、抛物线的切线和法线	(59)
基本内容	(59)
(一) 定义	(59)
(二) 过圆锥曲线上已知点 $P(x_0, y_0)$ 的切线和法线 方程的求法	(59)
(三) 过圆锥曲线外的已知点 $P(x_0, y_0)$ 的切线方程的 求法	(59)
(四) 已知斜率是 K 的切线方程	(60)
(五) 圆锥曲线的切线和法线的物理性质	(60)
例题类型和解题方法	(61)
(一) 求圆锥曲线的切线、法线及其有关的问题	(61)
(二) 关于圆锥曲线弦所在直线方程和弦长等问题	(65)
(三) 在圆锥曲线上求一点使它到已知直线的距离最短	(68)
练习4—5	(69)
练习4—6	(71)
练习4—7	(72)
第五章 坐标变换	(74)
基本内容	(74)
(一) 坐标轴的平移	(74)
(二) 坐标轴的旋转	(75)

例题类型和解题方法..... (77)

(一) 利用平移公式求点在新旧坐标系下的坐标..... (77)

(二) 利用平移化简方程..... (77)

(三) 利用转轴公式化简方程..... (81)

(四) 一般二次方程的化简..... (81)

(五) 利用坐标变换公式求方程的系数..... (83)

(六) 二元二次方程的讨论..... (85)

练习5—1..... (86)

练习5—2..... (87)

第六章 极坐标和参数方程..... (88)

一 极坐标..... (88)

基本内容..... (88)

(一) 极坐标系和点的极坐标..... (88)

(二) 点和它的极坐标间的关系..... (89)

(三) 极坐标与直角坐标的互化..... (89)

(四) 曲线的极坐标方程..... (89)

例题类型和解题方法..... (92)

(一) 有关极坐标系和点的极坐标概念的题目..... (92)

(二) 极坐标与直角坐标的互化..... (93)

(三) 已知极坐标方程画出它的图形..... (95)

(四) 求曲线的极坐标方程..... (96)

(五) 在极坐标系下求两曲线的交点坐标..... (98)

(六) 其他..... (99)

练习6—1..... (101)

练习6—2..... (103)

二 参数方程..... (105)

基本内容..... (105)

(一) 定义..... (105)

(二) 参数方程的几个基本问题..... (105)

例题类型和解题方法	(108)
(一) 消去参数把参数方程化为普通方程	(108)
(二) 普通方程化参数方程	(110)
(三) 由参数方程画曲线	(111)
(四) 求轨迹的参数方程	(112)
(五) 参数方程的应用	(117)
练习6—3	(120)
练习6—4	(124)
附: 解析法证明平面几何题	(125)
练习7	(135)
第七篇 微积分	(137)
第一章 极限和连续	(137)
基本内容	(137)
(一) 概念	(137)
(二) 计算法则	(140)
例题类型和解题方法	(142)
(一) 关于极限的证明	(143)
(二) 极限的计算	(147)
(三) 函数的连续	(160)
练习1—1	(162)
练习1—2	(164)
第二章 导数和微分	(166)
基本内容	(166)
(一) 概念	(166)
(二) 计算	(169)
例题类型和解题方法	(171)
(一) 求函数的导数	(171)
(二) 求函数的微分	(185)
练习2—1	(186)

练习2—2	(188)
第三章 导数和微分的应用	(189)
基本内容	(189)
(一) 中值定理	(189)
(二) 泰勒公式	(190)
(三) 函数的增减性	(190)
(四) 函数的极大值与极小值	(191)
(五) 函数作图	(193)
(六) 近似公式	(193)
(七) 不定式求极限法则	(194)
例题类型和解题方法	(195)
(一) 基本定理的验证与应用	(195)
(二) 研究函数	(196)
(三) 应用问题	(200)
(四) 求不定式的极限值	(201)
(五) 求近似值	(206)
练习3—1	(206)
练习3—2	(208)
第四章 不定积分	(209)
基本内容	(209)
(一) 概念	(209)
(二) 计算	(210)
例题类型和解题方法	(212)
(一) 直接积分法	(212)
(二) 分项积分法	(213)
(三) 换元积分法	(215)
(四) 分部积分法	(225)
练习4—1	(228)
练习4—2	(230)

第五章 定积分及其应用	(232)
基本内容	(232)
(一) 概念	(232)
(二) 计算	(233)
例题类型和解题方法	(235)
(一) 利用定积分的定义计算定积分	(235)
(二) 求定积分的值	(236)
(三) 定积分的应用	(240)
练习5—1	(247)
练习5—2	(248)
答案	(250)

第六篇 解析几何

第一章 平面直角坐标系和基本公式

基本内容

(一) 有向线段

1. 有向直线

一条直线具有两个相反的方向，如果选定其中一个方向作为正向，那么相反的方向就是负向，像这样规定好了方向的直线叫做有向直线。

2. 有向线段

规定好了起点和终点的线段叫做有向线段，从起点到终点的方向就是这条有向线段的方向，在表示有向线段时，我们规定把表示起点的字母写在前面，把表示终点的字母写在后面，例如 A 是起点， B 是终点，就记作 AB 。

要决定一条有向线段的方向是正是负，需要看这条线段的方向和它所在直线的方向是否一致，如果一致，它就是正方向的线段；如果相反它就是负方向的线段。

3. 有向线段的数量

一条有向线段的长度，连同表示它的方向的正负号，叫做这条有向线段的数量，为了简便，我们把有向线段 AB 的数量也记作 AB ， A 是线段起点， B 是线段终点。

对于任何两条有向线段 AB 和 BA 的数量，都有这样的关系： $AB = -BA$ 即 $AB + BA = 0$ 。

4. 有向线段的绝对值

如果不考虑有向线段的方向，只考虑它的长度，就叫做有向线段的绝对值，有向线段 AB 的绝对值记作 $|AB|$ 。

5. 有向线段的数量公式

如果 A 、 B 两点的坐标分别是 x_1 和 x_2 ，那么

$$AB = x_2 - x_1$$

6. 沙尔定理

设 A 、 B 、 C 是同一直线上的三个点，那么不论它们的位置怎样，都有 $AB + BC = AC$ 的关系。

推广：设 A_1 、 A_2 、 \dots 、 A_n 是同一条直线上的几个点，那么不论它们的位置怎样，都有 $A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_{n-1}A_n = A_1A_n$ 的关系。

(二) 平面直角坐标系

平面上两条有公共原点又互相垂直的数轴，叫做平面直角坐标系，建立了直角坐标系的平面叫做直角坐标平面。

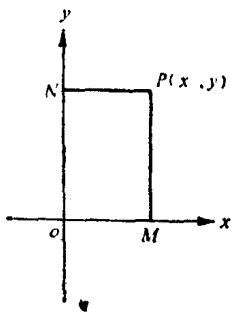


图 5-1-1

利用直角坐标系，可以用一对实数来表示平面内任意一个点的位置，设 P 是平面内任意一点（图5-1-1），从 P 分别作 x 轴和 y 轴的垂线，得垂足 M 和 N 。设 M 点在 x 轴上的坐标是 x ， N 点在 y 轴上的坐标是 y ，那么 (x, y) 就是 P 点在直角坐标系中的坐标。这样，对于坐标平面内任意一点 P ，可以得出唯

一的一对有序实数 (x, y) 来和它对应。反过来，对于任何一对实数 (x, y) ，在平面内就能确定唯一的点，而它的坐标是 (x, y) 。这样，平面内的点和所有一对实数 (x, y)

之间就建立了一一对应的关系。

(三) 基本公式

1. 两点间距离公式

设两点的坐标为 $P_1(x_1, y_1)$ 、 $P_2(x_2, y_2)$, 则两点间的距离 $|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ 。

特殊位置的两点间的距离, 可用坐标差的绝对值表示:

1) 当 $x_1 = x_2$ 时, (两点在 y 轴上或两点连线平行于 y 轴) 则 $|P_1P_2| = |y_2 - y_1|$; 2) 当 $y_1 = y_2$ 时 (两点在 x 轴上或两点连线平行于 x 轴) 则 $|P_1P_2| = |x_2 - x_1|$ 。

2. 直线的倾角和斜率

1) 直线的倾角: 直线 l 和 x 轴相交时, 直线 l 向上的方向和 x 轴正方向所成的最小的正角 α 叫做直线 l 的倾角, 直线 l 和 x 轴平行时, 倾角为零。任意一条直线的倾角 α 的范围是 $0 \leq \alpha < \pi$ 。

2) 斜率: 一条直线倾角的正切叫做这条直线的斜率。一般用 K 表示, $K = \operatorname{tg} \alpha$, 当 $\alpha = 90^\circ$ 时斜率不存在。

3) 过两点 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ 的直线的斜率为

$$K = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (x_2 \neq x_1)$$

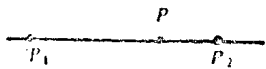
3. 线段的定比分点

1) 定义: 设 P 点把有向线段 P_1P_2 分成 P_1P 和 PP_2 两部分, 那么有向线段 P_1P 和 PP_2 的数量的比, 就是 P 点分 P_1P_2 所成的比, 通常用 λ 表示, 就是 $\lambda = \frac{P_1P}{PP_2}$, 点 P 叫做分线段 P_1P_2 为定比 λ 的定比分点。

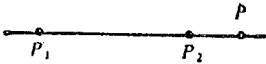
(1) P 点内分 P_1P_2 时 (如图5-1-2甲) $\lambda > 0$ 。

(2) P 点外分 P_1P_2 时 (如图5-1-2乙、丙) $\lambda < 0$ 。

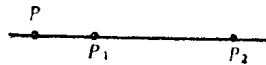
($\lambda \neq -1$)



甲



乙



丙

图 5-1-2

特别是当 P 和 P_1 重合时 $\lambda = 0$; 当 P 和 P_2 重合时 λ 不存在, 当 P 外分 P_1, P_2 至无穷远点时 $\lambda = -1$.

2) 公式: 分 $P_1(x_1, y_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2)$ 连线所成的比是 λ 的分点坐标是:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda},$$

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$$

特别是, 当 P 是 P_1P_2 的中点时, $\lambda = 1$, 因此连结 $P_1(x_1, y_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2)$ 的线段中点的坐标是:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

4. 三角形面积公式: 若三角形三顶点为 $P_i(x_i, y_i)$ ($i=1, 2, 3$) 则其面积的行列式表达式为:

$$S_{\Delta P_1 P_2 P_3} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \text{ 的绝对值}$$

例题类型和解题方法

(一) 利用有向线段的数量公式解题

当计算或证明在同一直线上的几个点的数量关系时可利用有向线段的数量公式 $AB = x_2 - x_1$, 要特别注意 A 点的坐标

是 x_1 , B 点的坐标是 x_2 , 当没有给定点的坐标时, 可设点的坐标以利于计算或证明。

例1 设 P 是 A 、 B 、 C 三点所在直线上任意一点, 求证: $PA \cdot BC + PB \cdot CA + PC \cdot AB = 0$

证: 设 A 、 B 、 C 三点的坐标分别为 a 、 b 、 c , P 点的坐标为 x 则,

$$\begin{aligned} \text{左式} &= (a-x)(c-b) + (b-x)(a-c) + (c-x)(b-a) \\ &= ac - ab - cx + bx + ab - ax - bc + cx + \\ &\quad + bc - bx - ac + ax \\ &= 0 \end{aligned}$$

(二) 用直角坐标系表示平面上点的坐标

用直角坐标系表示平面上点的坐标是依据点的坐标的概念将点投射到坐标轴上计算轴上有向线段的数量。有时可利用点的位置的对称性在求出一些点的坐标后再求另一些点的坐标。如点 $P(x, y)$ 关于 x 轴的对称点 P' 的坐标为 $(x, -y)$; 关于 y 轴对称点的坐标 $P'(-x, y)$; 关于原点对称的点的坐标 $P'(-x, -y)$, 关于直线 $x=y$ 的对称点 $P'(y, x)$ 。

例2 已知正六边形的边长为 a , 它的中心在原点, 两个相对的顶点在 x 轴上, 求这个正六边形各顶点的坐标。

解: 如图5-1-3 设 $ABCDEF$ 为已知正六边形, 因为正六边形的半径等于边长, 所以 A 点的坐标为 $(a, 0)$

过 B 点作 $BM \perp Ox$, M 为垂足, 在直角 $\triangle OBM$ 中, $OB =$

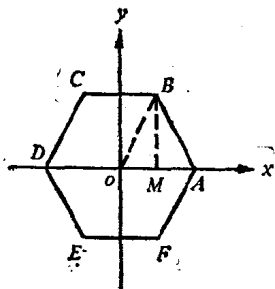


图 5-1-3