大規模三角鎖的直接平差法

周江文著

測繪出版社

大規模三角鎖的
直接平差法

[illegible]

[illegible]

大規模三角鎖的直接平差法

周 江 文 著

測 繪 出 版 社

1956·北 京

本書是周江文同志在研究測量平差中所提出的三篇論文。这三篇論文的主要內容是在測量平差理論方面提出了一些意見。本書可作大專測量專業在教学和研究中的参考資料，同时也可作大地測量工程技術人員的参考資料。

大規模三角鎖的直接平差法

著　者　周　江　文

出版者　測　繪　出　版　社
北京宣武門外永光寺西街3号
北京市書刊出版業營業許可証出字第081号

發行者　新　華　書　店

印刷者　地　質　印　刷　厂
北京廣安門內教子胡同甲32号

編輯：何炎文　技術編輯：張華元　校对：白权询

印数（京）1—7700册　1956年12月北京第1版

开本　31"×43"1/25　1956年12月第1次印刷

字数　30,000字　印張　1⁹/₂₅

定价（10）0.22元

說　　明

这里收集了三篇关于测量平差的文章。前兩篇曾經非正式發表，这次作了部分修改。

周　江　文

一九五六年六月　　南京

目　錄

大規模三角鎖的直接平差法

§1. 小　引

大規模的三角鎖平差，必須分段独立進行，然后把独立平差时所未考慮到的条件作一次高級平差。各國实际所采用的方法几乎全是近似的方法，就是在作高級平差的时候，不能同时照顧或者不能嚴格照顧分段平差的条件。这是由于条件总数太大，而且高級条件太复雜。在已經提出的嚴格平差法中，Eggert（注一）的方法是由分段平差就大地綫找出等价观測，用等价观測作高級平差；又如Lehmann 的方法（注二）也用等价观測，但求法是用“函数条件法”，在分段平差时直接得出。这兩个方法都經过等价观測，因而脫离了原來計算的軌道，成为实用上很大的障碍。

本文提出的方法也以函数条件法为基礎，但分段平差和高級平差是一个整体，形式上不經过等价观測，計算始終循着普通約化步驟進行；而由于函数条件法的运用和适当的排列順序，高級条件簡化，分段平差和高級平差实际是分开進行的，因此也避免了条件过多解算不可靠的困难。

§2. 直接平差法的理論

我們用很小的例子來說明这个方法。

假設第一段有条件方程式:

$$\left.\begin{aligned} a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots\cdots\cdots\cdots + \omega_1 = o \\ b_1 v_1 + b_2 v_2 + \cdots\cdots\cdots\cdots + \omega_2 = o \\ c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots\cdots\cdots\cdots + \omega_3 = o \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

或簡寫为

$$\left.\begin{aligned} av+\omega_1=o \\ bv+\omega_2=o \\ cv+\omega_3=o \end{aligned}\right\} \qquad (1)'$$

式中 v 是观测值 L 的改正数，ω 是常数項（閉合差），L之权为 p。

第二段条件方程式:

$$\left.\begin{aligned} dv'+\omega_4=o \\ ev'+\omega_5=o \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

观测值 L'，改正数 v'，权 p'。这里假設 L' 和 L 无相同者。

在兩段之間存在着高級条件，

$$\left.\begin{aligned} f_\alpha dF+g_\alpha dG+h_\alpha dH+\omega_\alpha=o \\ f_\beta dF+g_\beta dG+h_\beta dH+\omega_\beta=o \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

这里面dF，dG是第一段的函数的改正数，dH 是第二段的函数的改正数，

$$\left.\begin{aligned} dF=fv \\ dG=gv \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

$$dH=hv' \qquad (5)$$

这里 f，g，h 通常要由偏微分得到。

（1），（2），（3），（4），（5）都可看做条件方程式，不过其中含有未知数（函数）dF，dG，dH。按照有未知数之条件观測直接解法（注三），这个問題可以完全解出。

不过在整体平差以前，实际工作中总是進行了分段平差的，即第一段按（1）作了平差，第二段按（2）平差，用这个初步平差的数值來進行整体平差，条件方程式的常数項消失或者縮小，大多数的計算数字也减小了。关于这个問題，請参閱作者的另外一篇文章（注四）。这里只把有关的結論寫出來：就部分条件平差所得的平差值可以看作新观測值，其权不变，由此重新就全部条件列出条件方程式進行平差，对于巳經平差的系数及改正数，应取兩次系数及改正数之和作为最后的結果。〔pvv〕=兩次相应值之和。至于函数之权因第二次平差所有係数不变，故即由第二次平差中求之。

所以我們可以根据分段初步平差的結果作出条件方程式，这时参

加分段平差的条件（1）、（2）其常数项均为零，同时高級条件（3）的常数項 ω_α，ω_β 应了解为由初步平差值算得之閉合差。下面的表把条件直寫，分别冠以系数 k；在 v 之左側寫出相应之权 p，这样作，在構成法方程式时及計算 v、v' 都是很便利的。

	k_a	k_b	k_c	k_f	k_g	k_d	k_e	k_h	k_α	k_β	(φ)
$p\ v$	a	b	c	f	g						φ
$p'\ v'$						d	e	h			φ'
dF				-1					f_α	f_β	0
dG					-1				g_α	g_β	0
dH								-1	h_α	h_β	0
常数項	0	0	0	0	0	0	0	0	ω_α	ω_β	

(6)

由（6）按函数条件法作法方程式，得到（7）。*

注意作 k_a，k_b，k_c…的法方程式时，（6）式虛綫以下的部分照寫，就象寫常数項一样；而 dF，dG，dH 相应的法方程式就是（6）式虛綫以下的对应各列。同时注意表中把 dF，dG 緊排在 k_f，k_g 之后，把 dH 排在 k_h 之后，而 k_α，k_β 放在最后。又 (i,j) 代表 $\left[\frac{i,j}{p}\right]$。

（7）式約化的結果寫成（8）。**

从（8）可以看出，約化实际是分段進行的，在第 I 段的初步計算中要附加 k_f，k_g，dF，dG 四行，而 dF，dG 兩行的計算是很簡單的；另外附算 k_α，k_β 的有关項，計算也很簡單。同样在第 II 段中加入 k_h，dH 和 k_α，k_β 的有关項。

然后把第 I 段 dF，dG 和 k_α，k_β 的部分摘出來，和第 II 段的 dH 和 k_α，k_β 部分联合作高級平差

---

* (7)式在第 8 頁。

** (8)式在第 9 頁。

k_a	k_b	k_c	k_f	k_g	dF	dG	k_d	k_e	k_h	dH	k_α	k_β	常数項	(φ)	
(aa)	(ab)	(ac)	(af)	(ag)									0	$(a\varphi)$	
(ab)	(bb)	(bc)	(bf)	(bg)									0	$(b\varphi)$	
(ac)	(bc)	(cc)	(cf)	(cg)									0	$(c\varphi)$	
(af)	(bf)	(cf)	(ff)	(fg)	-1								0	$(f\varphi)$	
(ag)	(bg)	(cg)	(fg)	(gg)		-1							0	$(g\varphi)$	
			-1								f_α	f_β	0	0	
	I			-1							g_α	g_β	0	0	(7)
							(dd)	(de)	(dh)				0	$(d\varphi')$	
						II	(de)	(ee)	(eh)				0	$(e\varphi')$	
							(dh)	(eh)	(hh)	-1			0	$(h\varphi')$	
									-1		h_α	h_β	0	0	
					f_α	g_α				h_α			ω_α	0	
					f_β	g_β				h_β			ω_β	0	

k_a	k_b	k_c	k_f	k_g	dF	dG	k_d	k_e	k_h	dH	k_α	k_β	常数項 (φ)
(aa)	(ab)	(ac)	(af)	(ag)									0
	$(bb.1)$	$(bc.1)$	$(bf.1)$	$(bg.1)$									0
		$(cc.2)$	$(cf.2)$	$(cg.2)$									0
			$(ff.3)$	$(fg.3)$	-1								0
				$(gg.4)$	$(gF.4)$	-1							0
					$(FF.5)$	$(FG.5)$					f_α	f_β	0
						$(GG.6)$				1	$g_{\alpha}.6$	$g_{\beta}.6$	0
							(dd)	(de)	(dh)				0
								$(ee.1)$	$(eh.1)$				0
									$(hh.2)$	-1			0
										$(HH.3)$	h_α	h_β	0
											$(\alpha\alpha.10)$	$(\alpha\beta.10)$	ω_α
												$(\beta\beta.11)$	$\omega_\beta.11$

I

II

II

(8)

$$
\begin{array}{cccccc}
dF & dG & dH & k_\alpha & k_\beta & \text{常数项} \\
(FF.5) & (FG.5) & & f_\alpha & f_\beta & o \\
 & (GG.6) & & g\alpha.6 & g\beta.6 & o \\
 & & (HH.3) & h_\alpha & h_\beta & o \\
 & & & (\alpha\alpha.10) & (\alpha\beta.10) & \omega_\alpha \\
 & & & & (\beta\beta.11) & \omega_\beta.11
\end{array}
\qquad (9)
$$

$(\alpha\alpha.10)\cdots\cdots(\beta\beta.11)$ 代表 k_α，k_β 的約化係数，由（9）中按尋常約化法算出。

这样我們馬上算出 k_α，k_β，由（7）很容易算出 k_f，k_g 和 k_h。有了 k_f 和 k_g 在（8）的Ⅰ中前三式求 k_a，k_b，k_c；同样由 k_h 在Ⅱ中求 k_e，k_d。

然后在（6）中虛綫以上求 v 及 v'，即

$$
\begin{aligned}
pv &= ak_a + bk_b + ck_c + fk_f + gk_g \\
p'v' &= dk_d + ek_e + hk_h
\end{aligned}
\qquad (10)
$$

把求得的 v 和 v' 分别加到各段初步平差值上，就得到最后的平差值。

上面的計算无需經过 dF，dG，dH，如果要計算它們，可由（6）中求之，也可逕用（4）（5）式來計算。

关于（7）中排列的順序以及高級平差的組成，可以从理論上加說明。（7）的第Ⅰ部分經四次約化以后，得出 dF，dG 自有的約化法方程式（反符号）（暫时不管高級条件）

$$
\begin{array}{ccc}
dF & dG & \text{常数项} \\
(FF.5) & (FG.5) & o \\
(FG.5) & (GG.5) & o
\end{array}
$$

同样Ⅱ中經过兩次約化以后得到 dH 自有的約化法方程式（反符号）

$$
\begin{array}{cc}
dH & \text{常数项} \\
(HH.3) & o
\end{array}
$$

但是 dF，dG，dH 之間不是独立的，而存在着高級条件，因此按照“未知数間有条件的間接观測平差”（注三）完全的法方程式应为，

$$
\begin{array}{cccccc}
dF & dG & dH & k_\alpha & k_\beta & \text{常数项} \\
(FF.5) & (FG.5) & o & f_\alpha & f_\beta & o \\
(FG.5) & (GG.5) & o & g_\alpha & g_\beta & o \\
o & o & (HH.3) & h_\alpha & h_\beta & o \\
f_\alpha & g_\alpha & h_\alpha & o & o & \omega_\alpha \\
f_\beta & g_\beta & h_\beta & o & o & \omega_\beta
\end{array}
\qquad (11)
$$

由此進行約化即为（9）。

約化法方程式就它所含有的未知数有部分等价的性質，因此看出，直接解法实在是最自然的等价方法，无需另立等价观測。也可看出，（7），（8）所用的排列順序是很重要的。讀者应注意（$FF.5$），（$GG.6$），（$HH.3$）均为負值，例如（$GG.6$）

$$=-\frac{1}{(gg.3)},\ (HH.3)=-\frac{1}{(hh.2)}。$$

其次說明〔pvv〕的計算，当然可从上面所說的 v 的最后值直接計算。也可从各段初步平差的〔pvv〕$_{\mathrm{I}}$ 和〔pvv〕$_{\mathrm{II}}$ 和表（6）的〔pvv〕相加得之（注四），但后者等于 $-\omega_\alpha k_\alpha-\omega_\beta k_\beta$ 所以

$$[pvv]=[pvv]_{\mathrm{I}}+[pvv]_{\mathrm{II}}-\omega_\alpha k_\alpha-\omega_\beta k_\beta \qquad (12)$$

这个式子可供校驗。

至于單位权的中方誤差，可由各段初步平差分別求之，也可由次式

$$m^2=\frac{[pvv]}{r+R}$$

算之，式中 r 为各段初步平差条件总数（如上例为 3＋2＝5），R 为高級条件数（上例为 2）。比較不同計算所得的 m，对于鎖中誤差分布的情形，往往可以作出有意义的結論。

关于平差值函数之权的計算，完全照“有未知数之条件观測直接解法”（注三）。通常函数中不含 dF，dG，dH，例如为

$$\Phi(L+v,\ L'+v')$$

令 $\frac{\partial\Phi}{\partial L}=\varphi$，$\frac{\partial\Phi}{\partial L'}=\varphi'$，于是为了計算 Φ 的权倒数 Q_Φ，可在（6）

中附加一行（φ），相应地（7）有一附加行，在（8）中应進行相应的約化計算（未寫出），可以看出約化时Ⅰ，Ⅱ仍旧是分开的，僅有最后兩項（和高級条件相当）牽涉到Ⅰ和Ⅱ，这样在（8）中得（φ）行后，將行內各值自乘，分別以同列第一个系数〔如（aa），（$bb.1$），……（$FF.5$）……（$\beta\beta.11$）〕除之，然后相加，以（φ）（φ）記之（注四），則得

$$Q^{\Phi}=(\varphi\varphi)+(\varphi'\varphi')-(\varphi)(\varphi)$$

如果，象通常的情形，φ 只涉及某一段的观測，例如Ⅰ，則 φ' 均为 O，而（φ）（φ）中只涉及第Ⅰ段和高級条件，与Ⅱ无关，計算就較簡單。

上面的叙述很容易推广到多数段和多数高級条件的情形。

§3．一等三角鎖环的总平差方案

我們試提一个一等三角鎖环的总平差方案。

这个方案首先假定整个三角網的观測已經投影到适当选定的參考橢圓面上，这就是Красовский所提出的投影法。这一方法把三角網的平差和橢圓体的决定分开，三角網的平差不因橢圓体改換而須重作，同时投影法可以考慮大地水准面的起伏，因而結果也較嚴密。

因此我們只需考慮三角網的平差問題。現在先說明平差的步驟：

1.樞紐圖形平差：在三角鎖交叉处設置樞紐圖形，圖形內包含尋常的基綫網和Laplace方位角，但比尋常的基綫網稍加擴大，使它与各段三角鎖都以一边——接合边——相接。樞紐圖形單独观測，一若尋常的基綫網，自基綫擴大边至接合边，观測也較尋常一等三角測量加強，整个樞紐圖形独立進行平差，平差以后其圖形不再变动。

2.鎖段初步平差：兩接合边間的三角鎖为一鎖段。鎖段的初步平差僅用几何圖形条件及基綫条件。此外要附算函数——經緯差（或坐标差）及方位角差的改正式，以三角測量方向誤差 v 表示之（參看4）——及函数的系数以及高級条件的有关項。

3.全網近似平差：平差的目的在求出各樞紐圖形的近似經緯度，供組成高級条件时用，其誤差須达0″.5以內。为此可采用近似的平差

方法，例如 Bowie 的方法，其中包括 Laplace 方位角的采用。

4.高級平差：每一个小的鎖环有經緯度条件各一，每一鎖段有 Laplace 方程式一。經緯度条件可按 Лаури 的建議在投影平面上組成。（注五）。經緯差（或坐标差）的改正式已在鎖段初步平差中作为函数附帶計算，条件閉合差則由环的一个樞紐圖形出發，循一定方向經过平差后的樞紐圖形及初步平差后的鎖段連續傳算再回到出發点計算之。出發点的經緯度用平差（3）的数值，方位角由天文方位角加 Laplace改正后得之，它們的誤差很小，对經緯度閉合差几无影响（注六）。

Laplace条件的組成，除方位角差的改正式已附在各鎖段平差中作为函数計算，另外含有兩端Laplace 点的天文观測誤差μ（天文方位角及天文經度的合併誤差）。条件中出發經緯度的誤差影响可以不計，因为所用出發經緯度已經近似平差（3），其誤差本身已达 $0''.5$ 以下，由此所生影响远較观測誤差为小。此外三角測量的誤差所生的間接影响更微，完全可以省略。

高級平差的進行和 §2 所述稍有不同，这是由于 Laplace 条件中除函数外尙有天文观測誤差μ。由于μ不包含在鎖段初步平差中，所以这一問題的处理幷不困难。我們只需把 §2（6）（7）（8）各格式稍加改变，列在下面，不难看出直接解法仍然是合用的。

		k_a	k_b	k_c	k_f	k_g	k_d	k_e	k_h	k_α	k_β	
p	v	a	b	c	f	g						
p'	v'						d	e	h			
q_1	μ_1									α_1	β_1	
q_2	μ_2									α_2	β_2	
	dF				-1					f_α	f_β	(6),
	dG					-1				g_α	g_β	
	dH								-1	h_α	h_β	
常数項		o	o	o	o	o	o	o	o	ω_α	ω_β	

k_a	k_b	k_c	k_f	k_g	dF	dG	k_d	k_e	k_h	aH	k_α	k_β	常数項
(aa)	(ab)	(ac)	(af)	(ag)									o
(ab)	(bb)	(bc)	(bf)	(bg)									o
(ac)	(bc)	(cc)	(cf)	(cg)									o
(af)	(bf)	(cf)	(ff)	(fg)	-1								o
(ag)	(bg)	(cg)	(fg)	(gg)		-1							o
			-1								f_α	f_β	o
				-1							g_α	g_β	o
							(dd)	(de)	(dh)				o
							(de)	(ee)	(eh)				o
							(dH)	(eh)	(hh)	-1			o
									-1		h_α	h_β	o
					f_α	g_α				h_α	$(\alpha\alpha)$	$(\alpha\beta)$	ω_α
					f_β	g_β				h_β	$(\alpha\beta)$	$(\beta\beta)$	ω_β

(7)

$$
\begin{array}{llllllllllllll}
(aa) & (ab) & (ac) & (af) & (ag) & & & & & & & & 0 & \\
 & (bb.1) & (bc.1) & (bf.1) & (bg.1) & & & & & & & & 0 & \\
 & & (cc.2) & (cf.2) & (cg.2) & & & & & & & & 0 & \\
 & & & (ff.3) & (fg.3) & -1 & & & & & & & 0 & \\
 & & & & (gg.4) & (gf.4) & -1 & & & & & & 0 & (8)' \\
 & & & & & (FF.5) & (FG.5) & & & & f_\alpha & f_\beta & 0 & \\
 & & & & & & (GG.6) & & & & g_\alpha.6 & g_\beta.6 & 0 & \\
 & & & & & & & (dd) & (de) & (dh) & & & 0 & \\
 & & & & & & & & (ee.1) & (eh.1) & & & 0 & \\
 & & & & & & & & & (hh.2) & -1 & & 0 & \\
 & & & & & & & & & & (HH.3) & h_\alpha \quad h_\beta & 0 & \\
 & & & & & & & & & & & (\alpha\alpha.10) & (\alpha\beta.10) & \omega_\alpha \\
 & & & & & & & & & & & & (\beta\beta.11) & \omega_\beta.11
\end{array}
$$