新课程标准

北京市特级高级教师联合编写组 编写

MATHEMATICS

高中典型应用题精选

yingyongti

宋川利 主编

MATHEMATICS

jingxuan

开明出版社
Kaiming Press

dianxing
yingyong
ti
jingxuan

新课程标准

MATHEMATICS

高中典型应用题精选

宋川利 主编

北京市特级高级教师联合编写组 编写

MATHEMATICS

jingxuan

开明出版社
Kaiming Press

图书在版编目(CIP)数据

高中典型应用题精选/宋川利主编.—北京:开明出版社,2004.1
(数学应用丛书)
ISBN 7-80133-906-1

Ⅰ.数... Ⅱ.宋... Ⅲ.数学课—高中—解题 Ⅳ.G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 094818 号

主编 宋川利

编者 杨振强 郭 璋 黄绪立
李建杰 李大永 管慰慈

数学应用丛书
高中典型应用题精选
开明出版社出版
(北京海淀区西三环北路 19 号 邮编 100089)
新华书店北京发行所经销
秦皇岛市晨欣彩印有限公司印刷
大 32 开 8 印张 237 千字
北京 2004 年 1 月第 1 版 2004 年 1 月第 1 次印刷
1~20000 册

书号/ISBN 7-80133-906-1/G・820
定价/9.80 元

前言

"数学应用"丛书是由数学一线特级、高级教师和北京部分区教科研中心的教研员共同讨论、设计、编写而成的。该丛书包括《小学典型应用题精选》《初中典型应用题精选》及《高中典型应用题精选》三册。本册《高中典型应用题精选》,具有以下特点:

一、以本为序,纵横开拓

根据现行教材体系的编排顺序,结合学生生活经验,总体设计问题情景。筛选的例题具有典型性、示范性、迁移性,或体现某种建模策略,或渗透某种数学方法,或提供某些重要结论。全书利用典型例题本身蕴含的实用价值,纵向挖掘、横向延伸,达到开阔学生视野,优化应用结构,活跃思维、培养能力的目的。

二、重视过程,立足转化

解题紧扣"实际问题——处理信息——建立模型——解决问题"的全过程,凸现提取信息、分析信息、加工信息的思路、方法及策略,从整体上把握实际问题的结构和特征,转化或归化成某种数学知识的结构和特征,以确定相应的数学模型。重过程、启迪思维,可达到以少胜多、事半功倍的效果。

三、以法带题、用题诠法

要做到"言之有理、落笔有据",就必须讲究方法,本书既注意到函数观点、问题转化、数形结合及反面思考等大法运用,又注意到观察比较、消元换元、逻辑推理及分类讨论等小法活用。全书以法带题、用题诠法、法理兼顾、极富启发性。

四、与时俱进、导向鲜明

从中考、高考曾考过的应用性解答题来看,如人口土地、污水处理、冷轧机工作原理、西红柿种植、环保与旅游、城市汽车保有量等,都具有鲜明的时代特征,直书社会热点,充分体现数学的教学功能、社会功能及选拔功能,代表了数学应用的命题方向。

本书可供高三学生备考之用,也可供高中一、二年级学生选用。

编者

2003.11.26

目 录

目 录

第 1 章

数学模型的概念及特征

数学应用题是全国高考数学必考的一种重要题型. 它强调题目的实际应用背景，是考查学生阅读理解、信息迁移和数学思想方法等实际应用能力的重要形式. 而如何将一个用语言文字叙述的应用题，根据其实际意义抽象概括为一个纯粹的数学问题，同时抓住命题中所蕴含的数学信息，恰当而准确地转变为一个数学模型，已成为学生能否成功解答应用题的一个"瓶颈".

一、数学模型的概念

众所周知，应用相关的数学知识去解决有关的实际问题时，关键是建立相关的数学模型，而什么是相关的数学模型呢？请先看下面几个实际问题.

例 1 某商店以每件 8 元的价格购进一批货物，卖价为 10 元，可卖出 200 件；超过 10 元时，则 1 件也卖不出去. 若从 10 元起每次降价 0.1 元，则可以多卖出 20 件. 问零售价定为多少时，能获得最大利润？并求出最大利润.

解 设零售价为每件 x 元(且 $8\leqslant x\leqslant 10$)，则卖出件数为

$$200+\frac{10-x}{0.1}\times 20=2200-200x,$$

成本 $C(x)=8\times(2200-200x)$,

收入 $R(x)=x(2200-200x)$,

利润 $L(x)=R(x)-C(x)$

$$=-200x^2+3800x-17600$$

$$=-200(x-\frac{19}{2})^2+450.$$

且 $8\leqslant 9.5\leqslant 10$,

即当 $x=\frac{19}{2}=9.5$ 元时，利润最大，为 450 元.

例 2 一汽船拖载重物相等的小船若干只，在两港之间来回运送货物，已知每次拖 4 只小船一天能来回 16 次；每次拖 7 只小船则一天能来回 10

次．如果小船增多的只数与来回减少的次数成正比．问每天来回多少次，每次拖多少只小船能使运货总量达到最大？

解 设汽船来回次数为 n，每次拖小船 x 只，运货总量为 y，则

$$y=nx, \qquad ①$$

依据题意，可知当 $n=16$ 时，$x=4$；当 $n=10$ 时，$x=7$，即每次小船增加 3 只时，来回次数减少 6 次．又知小船增多的只数与来回减少的次数成正比，

$\therefore \quad \dfrac{16-n}{x-4}=\dfrac{6}{3}$,

$\therefore \quad n=24-2x. \qquad ②$

②代入①，得 $\quad y=-2x^2+24x$.

$\because \quad a=-2<0$,

$\therefore \quad y$ 有最大值.

$\therefore \quad$ 当 $x=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{24}{2\times(-2)}=6$(只)时，有

$$n=24-2\times6=12(\text{次}).$$

即汽船每天来回 12 次，每次拖小船 6 只，可使运货总量最大．

从例 1、例 2 看出，例 1 是商业问题，例 2 是运输问题，两者风马牛不相及，属于不同领域的实际问题．但深入到具体解决的过程，又可以归结为二次函数问题，并可用二次函数的知识求出各自的最大值．

舍去实际问题的实际意义，从中抽象出数量之间的关系，转化成所学过的数学问题，这种转化过程一般称之为"建立数学模型"．依据抽象出来的不同数学形式或结构，可建立相应的数学模型，一般转化成什么数学问题，便可称为建立了这种类型的数学模型．例 1、例 2 就属于同一个数学模型——二次函数模型．

例 3 某人有现金 1 万元，存入银行的 1 年期定期储蓄，到期自动转存．假定存期内利率不变，存储若干年后再结算．

(1)若银行 1 年定期储蓄利率为 2.25%，问存入 5 年后本利和是多少；

(2)若经过每年自动转存 5 年后本利和为 1.117667 万元，问存入 1 年期储蓄的年利率；

(3)若1年期储蓄年利率为2.25%，到期自动转存，经过若干年后得本利和1.117667万元，问存入了几年?

解 (1)设存款年限为x年，到期本利和为y，则1年,2年,3年,……，x年后，本利和变化情况依次为

$$y_1=1+1\times 2.25\%=1.0225,$$

$$y_2=1.0225+1.0225\times 2.25\%=1.0225^2,$$

$$y_3=1.0225^2+1.0225^2\times 2.25\%=1.0225^3,$$

……

$$y_x=1.0225^x. \quad ①$$

当$x=5$时，$y=1.0225^5\approx 1.117667$(万元).

(2)设5年后本利和为x，存入时1年期储蓄年利率为r，令$y=1+r$，因为某人有现金1万元仿照(1)可知

$$x=(1+r)^5,\text{ 即 } x=y^5,$$

$$\therefore\quad y=x^{\frac{1}{5}}. \quad ②$$

当$x=1.117667$时，$y=1.0225$，则

$$r=y-1=1.0225-1=2.25\%.$$

(3)设本利和为x，存款年限为y年，再仿照(I)知

$$x=1.0225^y,$$

$$\therefore\quad y=\log_{1.0225}x. \quad ③$$

当$x=1.117667$时，有

$$y=\log_{1.0225}1.117667=\frac{\lg 1.117667}{\lg 1.0225}\approx 5(\text{年}).$$

即(1)存入5年后本利和为1.117667万元;(2)存入1年期储蓄的年利率为2.25%;(3)存入了5年.

本题中，①是指数函数，②是幂函数，③是对数函数. 由此可知，对同一个复利问题，由于研究的目的不同，即利率、本利及存款年限不同，建立的数学模型也随之不同，解答的数学方法也随之而异.

从以上各例看出，数学模型是依据实际问题的特征或数量关系，采用形式化的数学语言，抽象概括出的一种数学结构. 它作为实际问题的模型，应

反映出实际问题的数量关系特征;而作为一种数学结构,又具有数学概念、符号、公式及方法等特征. 因此,实际问题只要建立起恰当的数学模型,就可以利用相应的数学知识和数学方法,求出或证明实际问题的答案或结论. 由此可见,恰当地建立数学模型是解答应用题的关键.

在我们解答应用题时,关键是分析问题的特性,寻找数量之间的依存关系,一旦列出的数学式子与已学习过的某类型的数学知识的特征和数量关系相吻合,那么该应用题的数学模型也就建立起来了. 应该注意,在解应用题之初我们是很难判断它属于哪种数学模型的,只有列出了数学式子,在解这个数学问题时才能明确. 因此,要把分析、确定数量关系放在解应用题的首位.

二、数学模型的特征

现实世界的任何实际情形,无论是天然的、技术的或人为干预的,只要它可以用定量或定性的术语来描述,就可以通过建立数学模型来使它服从于某个解析规律. 也就是说,一切可以运用数学符号表示和数学方法探讨其规律的问题,都可以建立其相应的数学模型.

培根说,"数学是通向科学大门的钥匙";伽利略讲,"自然界最伟大的书是用数学语言写成的";爱因斯坦认为,"我们生活在受精确的数学定律制约的宇宙之中";以及人们常说的,"有文明就必然有数学"、"缺少了数学就不可能有科学的文明"等,实际上,都是对数学语言及数学模型特征和作用的体会性描述.

数学模型具有以下几个基本特征:

1. 实践性

数学来源于实践,无论哪种数学模型,都是以客观事物的现实原型为基础的. 即使是通过对数学模型的研究,得到新的成果,即建立更为抽象的数学模型,仍然有指导实践、应用于实践的重要作用.

利用数学模型解决实际问题可以追溯到我国古代. 公元前一世纪,《九章算术》一书,就是当时社会生活各个领域内利用数学所提供的较系统的一些数学模型. 尤其是"勾股""盈不足""方程"等章节,本身就是利用直角三角

形、盈不足术、线性方程组为数学模型解决各种实际问题的实例和方法.

例 4 在公共电话亭打市内电话，每 3 分钟资费 0.4 元，不足 3 分钟按 3 分钟计费，问电话资费 S(单位:元)与用时 t(单位:分钟)有何关系?

解 这是一个来自生活的实际问题，如果在数学中请学生来回答这样一个问题:电话资费 S 在用时间 $t=3k$ 和 $t\neq 3k(k=1,2,3\cdots)$ 的情况下，能否用一个解析式来表示? 经过思考，学生自然引出"分段函数"的概念，为了表达方便，引入取整函数的记号:$y=[x]$，最后可得到如下的函数关系:

$$S=\begin{cases}0.4([\frac{t}{3}+1]) & t\neq 3k,\\ 0.4\times\frac{t}{3} & t=3k.\end{cases}\qquad (k=1,2,3\cdots)$$

引入这样的实例，可使学生明白"分段函数"并不是人为杜撰的，而是从实际问题中抽象出来的. 这样一来，既弄清了分段函数的实质，又增强了学生应用数学的意识.

2. 抽象性

数学模型是从现实世界中抽象出来的，这种抽象本身，已舍去了许多现象的非本质属性，而保留了现象的某些本质属性. 再经过合理的简化，用数学符号或公式表示出来，这种抽象的形式，即数学模型. 它是人们认识外部世界、预测各种现象、控制各和过程的强有力的武器.

研究数学的人，正是在各种抽象的数学模型中思索着、追求着，寻找它们之间的内在联系和规律. 把数学的研究成果运用于实际问题中之所以有效，甚至获得惊人的成功，正是反映了实际事物的规律性.

例如 如果我们对例 3 中的问题作进一步的探讨，不难发现，尽管每个小问题的实际内容相去甚远，但是每个小问题又都与平均增长率联系密切，因此可以建立以下统一的增长率数学模型.

设基准数为 a，经过 x 期后终值达到 y，平均每期的增长率为 r，则有函数关系式:

$$y=a(1+r)^x,$$

这是一个应用十分广泛的数学模型.

例5 某顾客向银行存入本金 p 元，n 年后他在银行的存款额是本金与利息之和. 设银行规定年复利率为 r，试根据下述不同的结算方式计算顾客 n 年后的最终存款额.

(1)每年结算一次；

(2)每月结算一次，每月复利率为 $\frac{r}{12}$；

(3)每年结算 m 次，每个结算周期的复利率为 $\frac{r}{m}$. 试证明最终存款额随 m 的增加而增加.

解 (1)每年结算一次，第一年后顾客存款额为

$$p_1=p+pr=p(1+r),$$

第二年后的存款额为

$$p_2=p_1(1+r)=p(1+r)^2,$$

以此递推关系可知，第 n 年后顾客的存款额变为

$$p_n=p(1+r)^n. \tag{①}$$

(2)每月结算一次时，复利率为 $\frac{r}{12}$，共结算 $12n$ 次，因此 n 年后顾客的存款额为

$$p_n=p\left(1+\frac{r}{12}\right)^{12n}.$$

(3)每年结算 m 次时，复利率为 $\frac{r}{m}$，共结算 mn 次，将 n 年后顾客的存款额记为 p_n^m，则

$$p_n^m=p\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mn}.$$

令 $y_m=(1+\frac{r}{m})^m$，应用二项式展开，得

$$y_m=\left(1+\frac{r}{m}\right)^m=1+m\cdot\frac{r}{m}+\frac{m(m-1)}{2!}\left(\frac{r}{m}\right)^2$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\left(\frac{r}{m}\right)^3+\cdots+\frac{m(m-1)\cdot\cdots\cdot3\cdot2\cdot1}{m!}\left(\frac{r}{m}\right)^m$$

$$=1+r+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{m}\right)r^2+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)r^3$$

$$+\cdots+\frac{1}{m!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{m}\right)r^m,$$

$$y_{m+1}=\left(1+\frac{r}{m+1}\right)^{m+1}=1+r+\frac{r}{2!}\left(1-\frac{1}{m+1}\right)r^2$$

$$+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{m+1}\right)\left(1-\frac{2}{m+1}\right)r^3+\cdots$$

$$+\frac{1}{m!}\left(1-\frac{1}{m+1}\right)\left(1-\frac{2}{m+1}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1-\frac{m-1}{m+1}\right)r^m$$

$$+\frac{1}{(m+1)!}\left(1-\frac{1}{m+1}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1-\frac{m}{m+1}\right)r^{m+1}.$$

比较 y_{m+1} 与 y_m 的每一项，即

$$\left(1-\frac{1}{m}\right)<\left(1-\frac{1}{m+1}\right),$$

$$\left(1-\frac{2}{m}\right)<\left(1-\frac{2}{m+1}\right),$$

$$\cdots$$

$$\left(1-\frac{m-1}{m}\right)<\left(1-\frac{m-1}{m+1}\right).$$

由此可知，y_{m+1}的每一项都大于 y_m 中的相应项，并且 y_{m+1} 比 y_m 还多出最后一项，显然最后一项大于零，因此有 $y_{m+1}>y_m$. 再注意到 $p_n^m=p(y_m)^n$，$p_n^{m+1}=p(y_{m+1})^n$，可知 $p_n^m<p_n^{m+1}$，即结算的次数越多，顾客的最终存款额也就越多.

如果把该问题再深入一步，即考虑在连续复利的情况下，顾客的最终存款应为

$$p_n=\lim_{m\to\infty}p_n^m=\lim_{m\to\infty}p\left(1+\frac{r}{m}\right)^{nm}=pe^{nr}.$$

将此式改写成 $p_n=p[1+(e^r-1)]^n$，再与①式作比较可知，连续复利相当于以年复利率 e^r-1 进行按年计息结算. 当 r 较小时，$e^r-1\approx r$. 在高等数学(微分)中，容易证明 $e^r-1>r$ $(r>0)$.

如果把 $p_n = pe^{rx}$ 改写成 $y = A_0 e^{kx}$ 的形式，这就是人们常说的生长函数模型. 在现实世界中，有不少事物的生长规律都服从这个数学模型. 例如，杂草增生、疾病传播、人口增长及放射性元素裂变等.

例 6 人口增长服从生长函数的规律 $y = y_0 e^{kt}$. 其中 y_0 为现有人口，k 为人口的平均增长率，t 为经过的年限. 现某地提出目标：把人口的平均增长率控制在 1.82%以内，使 10 年后本地区人口不超过 1200 万，试求当地现有人口数.

解 设当地现有人口 y_0 万，将已知数据 $k=1.82\%$，$t=10$，$y=1200$ 代入给定的生长函数模型中，可得到

$$1200 = y_0 \cdot e^{0.0182\times 10},$$

$$\therefore \quad y_0 = \frac{1200}{e^{0.182}} \approx 1000(\text{万}).$$

即当地现有人口为 1000 万.

一般地，凡是与年份有关的经济活动，或与次数顺序有关的操作活动，都可以通过生长函数模型来解决.

数学在自然科学和社会科学中的作用在于它为研究现实世界提供了非同一般的足够精确的数学模型. 一个学科的发展只有当它提供了一个简单化的数学模型时，才标明这个学科已发展到了可以进行严密的和抽象的数学研究阶段，并有可能建立新的数学模型.

3. 广泛性

数学模型化应用十分广泛，不但在自然科学领域有广泛的应用，如物理、化学、生物、地理等，而且在社会科学中也有着广泛的应用，如社会学、经济学、思维学、语言学及教育学等. 应当看到，对现实世界中的所有现象、所有侧面、所有瞬间在思维中所反映的粗略化的、简单化的、形式化的基本思想都是模型化的思想.

按照不同的标准，从各个不同的角度分类，数学模型有许多类型. 按数学研究的目的，可分为理论研究模型、预期结果模型及优化模型；按数学变量之间的关系，可分为代数模型、几何模型及微积分模型；按数学结构可分为分析模型、非分析模型及图论模型；按数学研究对象的特征，可分为现实

模型和理论模型、确定模型和随机模型、静态模型和动态模型、连续模型和离散模型、线性模型和非线性模型等；按数学所研究对象的实际领域，可分为经济模型、社会模型、工程系统模型、生态模型、生物模型、人口模型及交通模型等；按数学所用方法可分为初等数学模型、微分方程模型、优化论模型、控制论模型、逻辑模型及扩散模型等．正是由于模型的多样化，在我们思考问题的时候，由于看问题的角度不同，或运用到的知识不同，或处理问题的方法不同，对同一个问题，就有可能出现以多个模型进行解答的情形．

例 7 在某沙漠地带进行科学考察，考察车每天行驶 200 千米，每辆考察车可以装载供行驶 14 天的汽油．现有 5 辆考察车，同时从驻地 A 出发，计划完成任务后，再沿原路返回驻地．为了让其中 3 辆车尽可能向更远的地方去考察(然后再一起返回)，甲、乙两车行至 B 处后，仅留足自己返回驻地所必需的汽油，将多余的汽油供给另外 3 辆使用．问其他 3 辆车可行进的最远路程是多少千米？

分析 这是一个来自外出科学考察中的实际问题，如何使考察路程最远，从不同的角度去探讨，可以建立不同的数学模型求解．

解法 1 方程组模型

如图 1-1 所示，假设 5 辆车同时考察，则可以行进 7 天(往返路程)．再设甲、乙两车少行进 x 天，其余 3 辆车多行进 y 天，

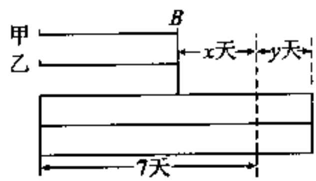

图 1-1

则由题意，可得

$$\begin{cases} 2x=3y, \\ 14-(7-x)=2(x+y), \end{cases}$$

解之 $x=3$，$y=2$，

$\therefore$ $(7+y)\times 200=(7+2)\times 200=1800$(千米)．