數學科技叢書 14 ㊦

微積分4500題正解 ㊦

編輯顧問：朱建正 張海潮

水牛出版社

數學科技叢書14 ㊦

微積分4500題正解 ㊦

編輯顧問：朱建正
張海潮

水牛出版社 印 行

微積分4500題正解

數學科技叢書14㊦

編輯顧問：	朱建正　張海潮
發行人：	彭誠晃
出版者：	水牛圖書出版事業有限公司
地址：	台北市金山南路一段135號2樓
電話：	3410275・3215644
	郵政劃撥0013932-1號
初版：	中華民國76年3月31日

登記證 局版台業字第0628號

◀版權所有・不許翻印▶

編者的話

"數學分析 4500 題"（凡異出版社印）一書，自出版以來，即受到各大專院校師生所採用。尤其以數學分析教學的師生，常以試解該書中的習題，視為掌握數學分析基本知識和基本技能的一項重要方法。

該書有 4462 道習題，內容包括：函數與極限、單變量函數的微分學、不定積分、定積分、級數，多變量函數的微分學、帶參變量積分以及重積分與曲線積分等等。概括了數學分析的全部主題。

"微積分 4500 題正解"下册是將"數學分析 4500 "六、七、八章中的部分習題正解整理出來，提供給讀者。目的在使理工科學生能透過有系統編排的習題去了解學習的成果及微積分的精義。本書最大的優點就在於每章節之前都有精簡扼要的重點整理，可使讀者節省許多查書的時間。並且留下部分習題，穿插於正解之間，使讀者研讀了多少，就能學會多少，透過不斷地演習，很快地就完全了解了。所以本書是一本很理想的微積分自修書。

習題數量繁多，內容豐富，深入淺出。其中部分習題難度極大，如果認真習作的話，可以深刻地了解基本概念，而且又可有效地提高運算能力；特別是有些難題還可以加強我們綜合分析的思維方法，正因如此，我們殷切地盼望讀者千萬不要輕易抄本書的解答，因為任何削弱獨立思考的作法，都是違背我們出版本書的原意，更何況解答並非一定標準，只適作為參考而已。

本書承蒙來建正、張海潮老師細心指導，才能使本書的編輯工作倍加順利，特此感謝。此外，由於陳志崇、王立中同學協助整理，才能使本書順利完成，在此一併致謝。

編輯部

民國七十六年三月

目　　次

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第六章 多變量函數的微分法

§ 1. 多變量函數的極限．連續性

1° 多變量函數的極限 設函數 $f(P)=f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 在以 P_0 爲聚點的集合 E 上有定義．若對於任何的 $\varepsilon>0$ 存在有 $\delta=\delta(\varepsilon, P_0)>0$，使得只要 $P\in E$ 及 $0<\rho(P, P_0)<\delta$ 〔其中 $\rho(P, P_0)$ 爲 P 和 P_0 二點間的距離〕，則

$$|f(P)-A|<\varepsilon,$$

我們就說

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=A.$$

2° 連續性 若 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=f(P_0)$，

則稱函數 $f(P)$ 於 P_0 點是連續的．

若函數 $f(P)$ 於已知域內的每一點連續，則稱函數 $f(P)$ 於此域內是連續的．

3° 一致連續性 若對於每一個 $\varepsilon>0$ 都存在有僅與 ε 有關的 $\delta>0$，使得對於域 G 中的任何點 P'，P''，只要是

$$\rho(P', P'')<\delta,$$

便有不等式

$$|f(P')-f(P'')|<\varepsilon$$

成立，則稱函數 $f(P)$ 於域 G 內是一致連續的．

於有界閉域內的連續函數於此域內是一致連續的．

確定並繪出下列函數存在的域：繪

3136. $u=x+\sqrt{y}$．

解 存在域爲半平面，$y\geqslant 0$，

如圖 6-1 陰影部分所示，包括整個 Ox 軸在內．

3137. $u=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{y^2-1}$．

解 存在域爲滿足不等式 $|x|\leqslant 1, |y|\geqslant 1$

的點集，如圖6·2 陰影部分所示，包括邊界(粗實線) 在內.

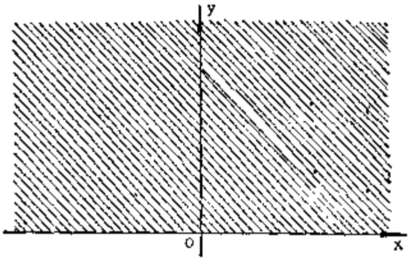

圖 6·1 (3136)

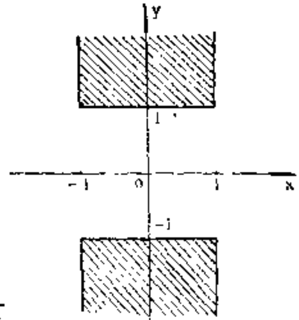

圖 6.2 (3137)

3138. $u=\sqrt{1-x^2-y^2}$.

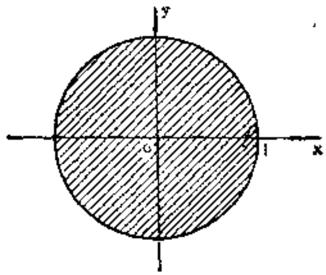

圖 6.3 (3138)

3139. $u=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$.

解 存在域爲滿足不等式

$$x^2+y^2>1$$

的點集，即圓 $x^2+y^2=1$ 的外面，如圖 6•4 所示，不包括圓周(虛線)在內.

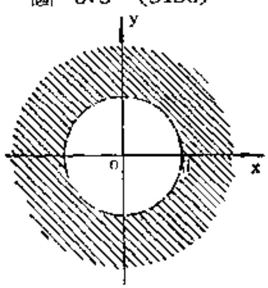

圖 6.4 (3139)

3140. $u=\sqrt{(x^2+y^2-1)(4-x^2-y^2)}$.

解 存在域爲滿足不等式

$$1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$$

的點集，如圖 6.5 所示的環，包括邊界在內.

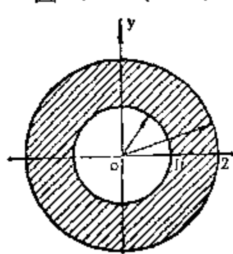

圖 6.5 (3140)

3141. $u=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2-x}{2x-x^2-y^2}}$.

解 存在域爲滿足不等式

$$x\leqslant x^2+y^2<2x$$

的點集. 由 $x^2+y^2\geqslant x$ 得出

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2\geqslant\left(\frac{1}{2}\right)^2,$$

由 $x^2+y^2<2x$ 得出

$$(x-1)^2+y^2<1,$$

兩者組成一月形，如圖 6.6 陰影部分所示.

3142. $u=\sqrt{1-(x^2+y)^2}$.

解 存在域爲滿足不等式

$$-1\leqslant x^2+y\leqslant 1$$

的點集，如圖 6.7 陰影部分所示示，包括邊界在內．

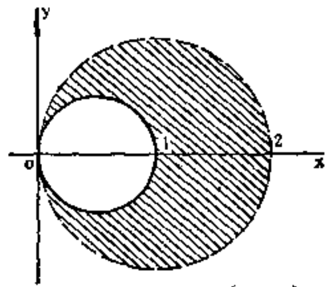

圖 6.6 (3141)

3143. $u=\ln(-x-y)$.

3144. $u=\arcsin\dfrac{y}{x}$.

3145. $u=\arccos\dfrac{x}{x+y}$.

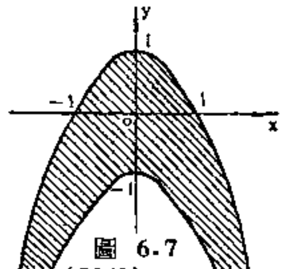

圖 6.7 (3142)

解 存在域爲滿足不等式

$$\left|\frac{x}{x+y}\right|\leqslant 1$$

的點集．由 $\left|\dfrac{x}{x+y}\right|\leqslant 1$

得 $|x|\leqslant|x+y|$ $(x\neq -y)$,

即 $x^2\leqslant x^2+2xy+y^2$

或 $y(y+2x)\geqslant 0$，也即

$$\begin{cases} y\geqslant 0, \\ y\geqslant -2x, \end{cases} \text{或} \begin{cases} y\leqslant 0, \\ y\leqslant -2x. \end{cases}$$

但 x, y 不能同時爲零．這是由直綫： $y=0$ 和 $y=-2x$ 所圍成的一對對頂的角，如圖 6.10 陰影部分所示，包括邊界在內，但不包括公共頂點 $O(0,0)$ 在內，

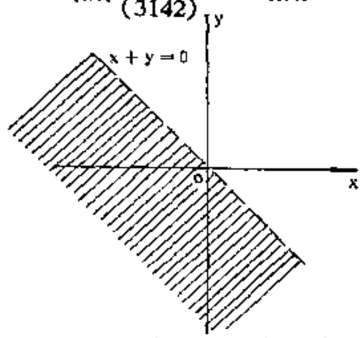

圖 6.8 (3143)

3146. $u=\arcsin\dfrac{x}{y^2}+\arcsin(1-y)$.

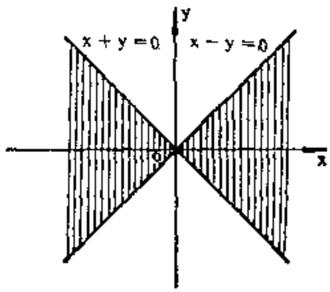

圖 6.9 (3144)

3147. $u=\sqrt{\sin(x^2+y^2)}$.

解 存在域爲滿足不等式 $\sin(x^2+y^2)\geqslant 0$ 或 $2k\pi\leqslant x^2+y^2\leqslant(2k+1)\pi$ $(k=0,1,2,\cdots)$ 的點集，如圖 6.12 所示的同心環族．

3148. $u=\arccos\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

解 存在域爲滿足不等式 $\left|\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leqslant 1$

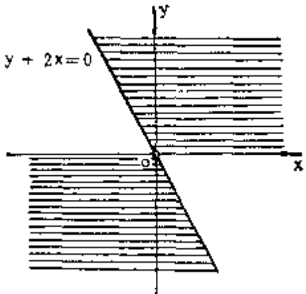

圖 6.10 (3145)

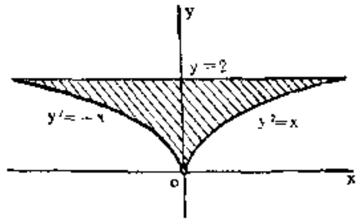

圖 6.11 (3146)

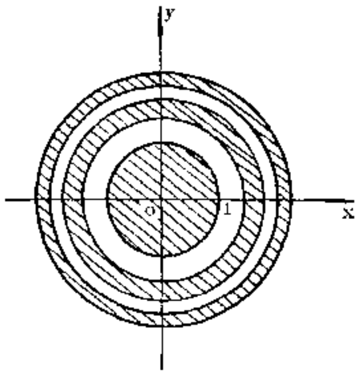

圖 6.12 (3147)

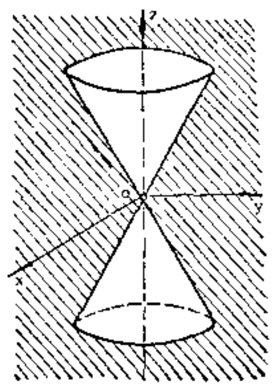

圖 6.13 (3148)

(x, y不同時為零)或 $x^2+y^2-z^2\geqslant 0$ (x, y不同時為零)
的點集，這是圓錐 $x^2+y^2-z^2=0$ 的外面，如圖 6.13 陰影部分所示所示，包括邊界在內，但要除去圓錐的頂點.

3149. $u=\ln(xyz)$.

3150. $u=\ln(-1-x^2-y^2+z^2)$.

解 存在域為滿足不等式

$$-x^2-y^2+z^2>1$$

的點集. 這是雙葉雙曲面

$$x^2+y^2-z^2=-1$$

的內部，如圖 6.14 陰影部分所示，不包括界面在內.

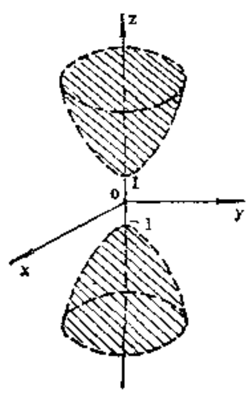

圖 6.14 (3150)

作出下列函數的等位綫:

3151. $z=x+y$.

3152. $z=x^2+y^2$.

3153. $z=x^2-y^2$.

解　等位綫爲曲綫族

$$x^2-y^2=k.$$

當 $k=0$ 時爲兩條互相垂直的直綫：$y=x, y=-x$。

當 $k\neq 0$ 時爲以 $y=\pm x$ 爲公共漸近綫的等邊雙曲綫族，其中當 $k>0$ 時頂點爲 $(-\sqrt{k}, 0)$, $(\sqrt{k}, 0)$，當 $k<0$ 時頂點爲 $(0, -\sqrt{-k})$, $(0, \sqrt{-k})$.

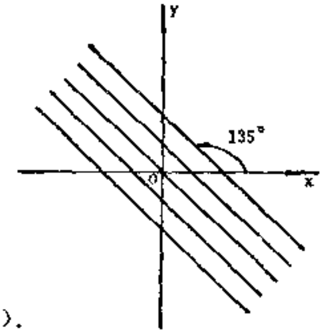

圖 6.15 (3151)

3154. $z=(x+y)^2$.　　3155. $z=\frac{y}{x}$.

3156. $z=\frac{1}{x^2+2y^2}$.

解　等位綫爲橢圓族 $x^2+2y^2=a^2$ $(a>0)$.

長半軸爲 a，短半軸爲 $\frac{a}{\sqrt{2}}$，焦點爲 $\left(-a\sqrt{\frac{3}{2}},0\right)$ 及 $\left(a\sqrt{\frac{3}{2}},0\right)$.

3157. $z=\sqrt{xy}$.

3158. $z=|x|+y$.

解　等位綫爲曲綫族

$$|x|+y=k,$$

其中 k 爲一切實數．當 $x\geqslant 0$ 時爲 $x+y=k$; 當 $x<0$ 時爲 $-x+y=k$. 這是頂點在 Oy 軸上兩支互相垂直的射綫所構成的折綫族，如圖 6.16 所示．

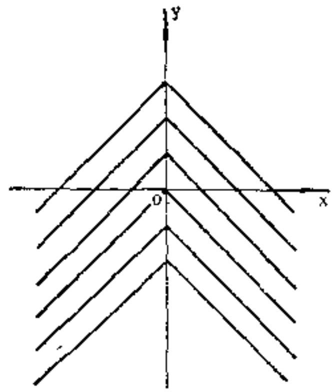

圖 6.16 (3158)

3159. $z=|x|+|y|-|x+y|$.

解　等位綫爲曲綫族

$$|x|+|y|-|x+y|=a.$$

因爲恒有 $|x|+|y|\geqslant|x+y|$，所以 $a\geqslant 0$.

當 $a=0$ 時，由 $|x|+|y|=|x+y|$ 兩邊平方即得 $xy\geqslant 0$ ，即爲整個第一、第三象限，包括兩坐標軸在內.

當 $a>0$ 時，$xy<0$，分下面四組求解：

(1) $x>0, y<0, x+y\geqslant 0, |x|+|y|-|x+y|=a$，解之得 $y=-\frac{a}{2}$;

(2) $x>0, y<0, x+y\leqslant 0, |x|+|y|-|x+y|=a$，解之得 $x=\frac{a}{2}$;

(3) $x<0, y>0, x+y\geqslant 0, |x|+|y|-|x+y|=a$，解之得 $x=-\frac{a}{2}$;

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

(4) $x<0, y>0, x+y\leqslant 0$,

$$|x|+|y|-|x+y|=a,$$

解之得 $y=\frac{a}{2}$.

這是頂點位於直綫 $x+y=0$ 上的兩支互相垂直的折綫族，它的各射綫平行於坐標軸，如圖 6.17 所示，

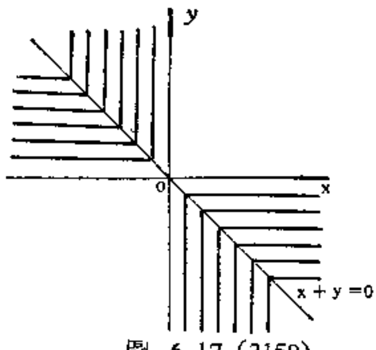

圖 6.17 (3159)

3160. $z=e^{-\frac{2x}{x^2+y^2}}$.

解 等位綫爲曲綫族

$$\frac{2x}{x^2+y^2}=k$$

(x, y 不同時爲零)，

其中 k 爲異於零的一切實數．上式可變形爲

$$\left(x-\frac{1}{k}\right)^2+y^2=\left(\frac{1}{k}\right)^2 (k\neq 0).$$

當 $k=0$ 時，即得 $e^{\frac{2x}{x^2+y^2}}=1$，從而等位綫爲 $x=0$ 即 Oy 軸，但不包括原點．

當 $k\neq 0$ 時爲中心在 Ox 軸上且經過坐標原點（不但包括原點在內）的圓束，圓心在 $\left(\frac{1}{k},0\right)$，半徑爲 $\left|\frac{1}{k}\right|$，如圖 6.18 所示．

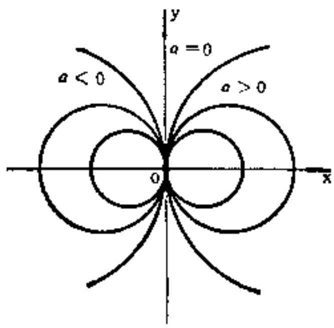

圖 6.18 (3160)

3161. $z=x^y$ $(x>0)$.　　　　3162. $z=x^ye^{-x}$ $(x>0)$.

3163. $z=\ln\sqrt{\frac{(x-a)^2+y^2}{(x+a)^2+y^2}}$ $(a>0)$.

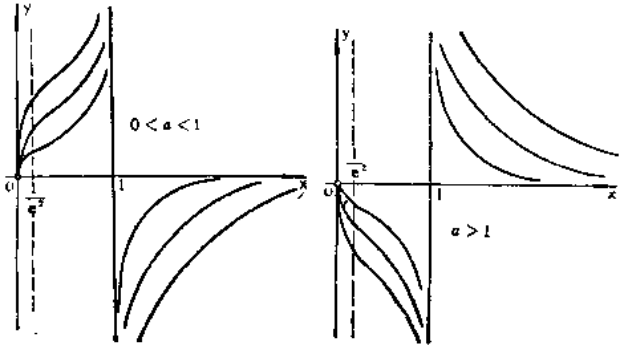

圖 6.19 (3161)

解 等位綫爲曲綫族

$$\frac{(x-a)^2+y^2}{(x+a)^2+y^2}=k^2 \quad (k>0).$$

整理得

$$(1-k^2)x^2-2a(1+k^2)x+(1-k^2)a^2+(1-k^2)y^2=0.$$

當 $k=1$ 時得 $x=0$，即 Oy 軸，

當 $k\neq 1$ 時，上述方程可變形爲

$$\left[x-\frac{a(1+k^2)}{1-k^2}\right]^2+y^2=\left(\frac{2ak}{1-k^2}\right)^2,$$

這是以點 $\left(\frac{a(1+k^2)}{1-k^2},\ 0\right)$ 爲圓心，半徑爲 $\left|\frac{2ak}{1-k^2}\right|$ 的圓族．當 $0<k<1$ 時，圓分布在右半平面；當 $k>1$ 時，圓分布在左半平面．

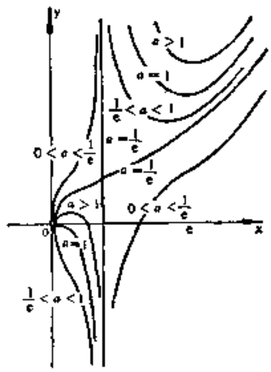

圖 6.20（3162）

如果注意到圓心與原點距離的平方爲

$$\left[\frac{a(1+k^2)}{1-k^2}\right]^2=\frac{a^2[(1-k^2)^2+4k^2]}{(1-k^2)^2}$$

$$=a^2+\left(\frac{2ak}{1-k^2}\right)^2,$$

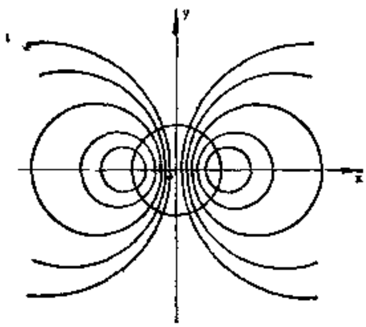

圖 6.21（3163）

即等位綫圓族與圓 $x^2+y^2=a^2$ 在交點處的半徑互相垂直（或圓心距與兩圓的半徑構成直角三角形），便知等位綫圓族與圓 $x^2+y^2=a^2$ 成正交．如圖 6.21 所示．

3164. $z=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{2ay}{x^2+y^2-a^2}$ $(a>0)$.

3165. $z=\operatorname{sgn}(\sin x\sin y)$.

解 若 $z=0$，則 $\sin x\cdot\sin y=0$，此即直綫族

$$x=m\pi \text{ 和 } y=n\pi$$

$(m,n=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots)$；

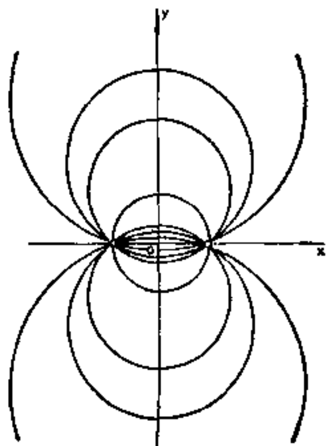

圖 6.22（3164）

若 $z=-1$ 或 $z=1$，則 $\sin x\sin y<0$

或 $\sin x\sin y>0$， 此即正方形系

$m\pi<x<(m+1)\pi$, $n\pi<y<(n+1)\pi$,

其中$z=(-1)^{m+n}$.如圖6.23所示，
$z=0$時爲圖中網格直綫；$z=1$爲圖中帶斜綫的正方形；$z=-1$爲圖中空白正方形，但後兩者都不包括邊界.

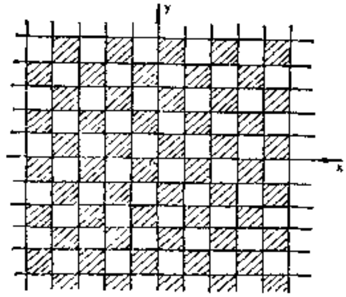

圖 6.23 (3165)

求下列函數的等位面:

3166. $u=x+y+z$.

3167. $u=x^2+y^2+z^2$.

解 等位面爲中心在原點的同心球族 $x^2+y^2+z^2=a^2$ $(a\geq 0)$，其中當 $a=0$時即爲原點.

3168. $u=x^2+y^2-z^2$.

3169. $u=(x+y)^2+z^2$.

解 等位面爲曲面族 $(x+y)^2+z^2=a^2$ $(a\geq 0)$,
當 $a=0$時爲 $x+y=0$ 和 $z=0$，當 $a>0$時作坐標變換

$$\begin{cases} x'=x\cos\frac{\pi}{4}+y\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y), \\ y'=-x\sin\frac{\pi}{4}+y\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(-x+y), \\ z'=z, \end{cases}$$

這是旋轉變換. 在新址標系中原等位面方程轉化爲

$$2x'^2+z'^2=a^2,$$

即

$$\frac{x'^2}{\frac{a^2}{2}}+\frac{z'^2}{a^2}=1,$$

這是以y'軸爲公共軸的橢圓柱面，母綫的方向平行於y'軸，准綫爲$y'=0$平面上的橢圓

$$\frac{x'^2}{\frac{a^2}{2}}+\frac{z'^2}{a^2}=1,$$

長半軸爲a (z'軸方向)，短半軸爲$\frac{a}{\sqrt{2}}$ (x'軸方向).

y'軸在新系 $O-x'y'z'$ 中的方程爲 $\begin{cases} x'=0, \\ z'=0, \end{cases}$

而在舊系 $O-xyz$ 中的方程爲 $\begin{cases} x+y=0, \\ z=0, \end{cases}$

即爲所求的橢圓柱面族的公共對稱軸.

3170. $u=sgn\,\sin(x^2+y^2+z^2)$.

解 當 $u=0$ 時等位面爲球心在原點的同心球族

$$x^2+y^2+z^2=n\pi \quad (n=0,1,2,\cdots)$$

當 $u=-1$ 或 $u=1$ 時等位面爲球層族

$$n\pi<x^2+y^2+z^2<(n+1)\pi \qquad (n=0,1,2,\cdots),$$

其中 $u=(-1)^n$.

根據曲面的已知方程研究其性質：

3171. $z=f(y-ax)$.

解 引人參數 t，s，將曲面方程 $z=f(y-ax)$ 表成參數方程

$$\begin{cases}x=t,\\y=at+s,\\z=f(s).\end{cases}$$

今固定 s，得到以 t 爲參數的直綫方程，其方向數爲 $1,a,0$. 因此，曲面爲以 $1,a,0$ 爲母綫方向的一個柱面．令 $t=0$，可得

$$\begin{cases}x=0,\\y=s,\\z=f(s),\end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases}x=0,\\z=f(y),\end{cases}$$

這是 $x=0$ 平面上的一條曲綫，也是柱面 $z=f(y-ax)$ 的一條准綫.

3172. $z=f(\sqrt{x^2+y^2})$.

解 這是綫 Oz 軸旋轉的旋轉曲面的標准形式．令 $y=0$，得曲綫

$$\begin{cases}y=0,\\z=f(x) \quad (x\geqslant 0),\end{cases}$$

它是旋轉曲面的一條母綫.

3173. $z=xf\left(\frac{y}{x}\right)$.

3174.[+] $z=f\left(\frac{y}{x}\right)$.

解 引入參數 t，s，將曲面方程 $z=f\left(\frac{y}{x}\right)$ 表成參數方程

$$\begin{cases}x=t,\\y=st,\\z=f(s).\end{cases}$$

*題號右上角"＋"號表示題解答與原習題集所附答案不一致，以後不再說明.

今固定 s，這是一條過點 $(0,0,f(s))$ 的直綫，方向數爲 $1,s,0$. 因此，它與 Oz 軸垂直，與 Oxy 平面平行，且其方向與 s 有關. 從而得知，曲面 $z=f\left(\frac{y}{x}\right)$ 表示一個直紋面. 一般說來，它既不是柱面，又不是錐面. 令 $t=1$，得到直紋面的一條準綫.

$$\begin{cases} x=1, \\ z=f(y). \end{cases}$$

從此曲綫上每一點引一條與 Oz 軸垂直且相交的直綫. 這樣的直綫的全體，便構成由 $z=f\left(\frac{y}{x}\right)$ 所表示的直紋面.

3175. 作出函數 $F(t)=f(\cos t, \sin t)$ 的圖形，式中

$$f(x,y)=\begin{cases} 1, & \text{若 } y\geqslant x, \\ 0, & \text{若 } y<x. \end{cases}$$

解 按題設，當 $\sin t\geqslant \cos t$，即 $\frac{\pi}{4}+2k\pi\leqslant t\leqslant\frac{5\pi}{4}+2k\pi$

$(k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 時，$F(t)=1$；而當 $\sin t<\cos t$ 即 $-\frac{3}{4}\pi+2k\pi$

$<t<\frac{\pi}{4}+2k\pi$ 時 $F(t)=0$，如圖 6.24 所示.

3176. 若 $f(x, y)=\frac{2xy}{x^2+y^2}$，求 $f\left(1, \frac{y}{x}\right)$.

3177. 若 $f\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}$ $(x>0)$，求 $f(x)$.

解 由 $f\left(\frac{y}{x}\right)=\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$ 知 $f(x)=\sqrt{1+x^2}$.

3178. 設 $z=\sqrt{y}+f(\sqrt{x}-1)$.

若當 $y=1$ 時 $z=x$，求函數 f 和 z.

解 因爲當 $y=1$ 時 $z=x$， 所以

$f(\sqrt{x}-1)=x-1=(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)=(\sqrt{x}-1)[(\sqrt{x}-1)+2]$,

從而得 $f(t)=t(t+2)=t^2+2t$,

且 $z=\sqrt{y}+x-1$ $(x>0)$.

3179. 設 $z=x+y+f(x-y)$.

若當 $y=0$ 時 $z=x^2$，求函數 f 及 z.

解 因爲當 $y=0$ 時 $z=x^2$， 所以 $x^2=x+f(x)$,

即 $f(x)=x^2-x$,

且 $z=x+y+(x-y)^2-(x-y)=2y+(x-y)^2$.

3180. 若 $f\left(x+y,\frac{y}{x}\right)=x^2-y^2$，求 $f(x,y)$.

3181. 證明：對於函數 $f(x,y)=\frac{x-y}{x+y}$

有 $\lim\limits_{x\to0}\left\{\lim\limits_{y\to0}f(x,y)\right\}=1$; $\lim\limits_{y\to0}\left\{\lim\limits_{x\to0}f(x,y)\right\}=-1$,

從而$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} f(x,y)$不存在.

解 $\lim\limits_{x\to0}\left\{\lim\limits_{y\to0}f(x,y)\right\}=\lim\limits_{x\to0}\left\{\lim\limits_{y\to0}\frac{x-y}{x+y}\right\}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{x}=1,$

$\lim\limits_{y\to0}\left\{\lim\limits_{x\to0}f(x,y)\right\}=\lim\limits_{y\to0}\left\{\lim\limits_{x\to0}\frac{x-y}{x+y}\right\}=\lim\limits_{y\to0}\frac{-y}{y}=-1.$

由於兩個單極都存在，而累次極限不等，故 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)$不存在.

3182. 證明：對於函數 $f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$

有 $\lim\limits_{x\to0}\left\{\lim\limits_{y\to0}f(x,y)\right\}=\lim\limits_{y\to0}\left\{\lim\limits_{x\to0}f(x,y)\right\}=0,$

然而 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)$ 不存在.

3183. 證明：對於函數 $f(x,y)=(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$

累次極限$\lim\limits_{x\to0}\left\{\lim\limits_{y\to0}f(x,y)\right\}$和$\lim\limits_{y\to0}\left\{\lim\limits_{x\to0}f(x,\ y)\right\}$不存在，然而

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=0.$

證 由不等式 $0\leqslant\left|(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}\right|\leqslant|x+y|\leqslant|x|+|y|$

知$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} f(x,y)=0.$

但當 $x\neq\frac{1}{k\pi}$，$y\to0$ 時，$(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$ 的極限不存在，因此累次極限 $\lim\limits_{x\to0}\left\{\lim\limits_{y\to0}f(x,\ y)\right\}$也不存在.

同法可證累次極限$\lim\limits_{y\to0}\left\{\lim\limits_{x\to0}f(x,y)\right\}$也不存在

3184. 求 $\lim\limits_{x\to a}\left\{\lim\limits_{y\to b}f(x,y)\right\}$ 及 $\lim\limits_{y\to b}\left\{\lim\limits_{x\to a}f(x,y)\right\}$，設：

(a) $f(x,y)=\frac{x^2+y^2}{x^2+y^4}$，$a=\infty$，$b=\infty$；

(b) $f(x,y)=\frac{x^y}{1+x^y}$，$a=+\infty$，$b=+0$；

(c) $f(x,y)=\sin\frac{\pi x}{2x+y}$，$a=\infty$，$b=\infty$；

(d) $f(x,y)=\frac{1}{xy}\operatorname{tg}\frac{xy}{1+xy}$，$a=0$，$b=\infty$；

(e) $f(x,y)=\log_x(x+y)$，$a=1$，$b=0$.

解 (a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left\{\lim\limits_{y\to\infty}f(x,y)\right\}=\lim\limits_{x\to\infty}\left\{\lim\limits_{y\to\infty}\frac{x^2+y^2}{x^2+y^4}\right\}=\lim\limits_{x\to\infty}0=0,$

$\lim\limits_{y\to\infty}\left\{\lim\limits_{x\to\infty}f(x,y)\right\}=\lim\limits_{y\to\infty}\left\{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+y^2}{x^2+y^4}\right\}=\lim\limits_{y\to\infty}1=1;$

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left\{\lim\limits_{y\to+0}f(x,y)\right\}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left\{\lim\limits_{y\to+0}\frac{x^y}{1+x^y}\right\}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2}=\frac{1}{2},$

$\lim\limits_{y\to+0}\left\{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x,y)\right\}=\lim\limits_{y\to+0}\left\{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^y}{1+x^y}\right\}=\lim\limits_{y\to+0}1=1;$

(d) $\lim\limits_{x\to0}\left\{\lim\limits_{y\to\infty}f(x,y)\right\}=\lim\limits_{x\to0}\left\{\lim\limits_{y\to\infty}\frac{1}{xy}\operatorname{tg}\frac{xy}{1+xy}\right\}$

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com