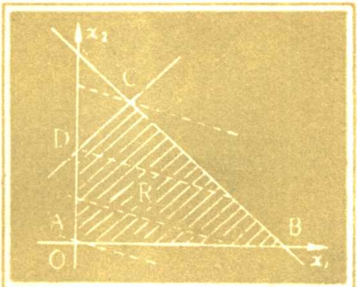
线性规划及其在建筑工程中的应用

XIANXING-GUIHUA JIQIZAI JIANZHU GONGCHENG ZHONG DE YING YONG

张允新 编著



吉林科学技术出版社

线性规划及其在建筑工程中的应用
张允新　编著
*
吉林科学技术出版社出版　吉林省新华书店发行
长春市红领巾印刷厂印刷
*
787×1092毫米32开本　5.5印张　116,000字
1985年5月第1版　1985年5月第1次印刷
印数：1—15,140册
统一书号：15376·9　定价：0.81元

代　序

二十世纪五十年代之后，世界经济进入了一个高速发展时期，科学技术飞速前进。企业要求得到更大的经营效果，决策能力已经成为经营管理的核心，运用现代科学成果和最新技术手段进行企业管理的理论和方法，得到迅速的发展和应用，这就使一些比较发达的国家开始进入了现代管理阶段。

随着我国“四化”建设的迅速发展，建筑战线不但需要加快科学技术的进步，而且要抓紧掌握和运用现代化的管理方法。企业管理现代化是科学技术和生产发展的必然趋势。特别是建筑业，目前管理落后，潜力很大，如何应用现代管理技术，将企业的潜力充分发挥出来，走出一条我们自己发展的路子，不再重复资本主义国家在摸索过程中走过的弯路，是非常必要的，也是完全可能的。

学习《线性规划及其在建筑工程中的应用》一书的目的是为各级行政技术管理人员决策时提供科学的依据。线性规划是实现管理现代化的有力工具之一。它在设计方案的技术经济评价，承包工程的选择，确定最优运输方案，生产计划组织安排等方面都有广泛的应用。

应用线性规划处理问题时，有两个重要特点：一是给定任务后，如何以最少的人力、物力、财力去完成它；二是对现有的人力、物力、财力，如何进行合理的安排，才能完成

最大的任务，从而取得最好的经济效益。

本书取材丰富，深入浅出，通俗易懂，引用的例子密切结合专业，提供的方法着重于思路和几何的直观解释。在第七章中还写进了建筑工程中线性规划应用方面的实例。这对促进我们基本建设战线应用线性规划的理论和方法是很有意义的。

刘树林

编者的话

本书介绍线性规划的基础知识及其在建筑工程中的应用。该书是在为吉林省城乡建设环境保护厅主办的线性规划学习研究班所用讲稿基础上，经加工、整理、改写而成的。吉林省副省长刘树林同志特为本书撰写了代序。吉林省城乡建设环境保护厅科技处李景芳、常凤梧、陈波升同志对本书作了认真审读并提出不少有益的意见，参加该研究班的总工程师、工程师对本书的出版给予鼓励和帮助。对这些同志谨表示衷心的感谢。

本书可供从事建筑技术经济管理的工程技术人员学习，也可供高等院校有关专业作为教学参考书使用。对于某些不必掌握线性代数的读者，按照本书所提供的方法与实例也能收到应用的效果。

本书力图把线性规划的基本内容与建筑工程中的具体问题结合在一起，但限于笔者水平和经验，书中一定存在不少问题，敬请读者提出批评指正。

张允新

于吉林建筑工程学院

目　　录

第一章　线性规划的基本概念……………………………… 1
第一节　线性规划问题…………………………………… 1
第二节　线性规划的数学模型…………………………… 7
第三节　线性规划问题的解 …………………………… 12
习题一…………………………………………………… 15
第二章　两个变量的线性规划问题的图解法……………… 20
习题二 ………………………………………………… 25
第三章　单纯形法 …………………………………………… 27
第一节　单纯形表 ……………………………………… 27
第二节　最优解判别定理 ……………………………… 33
第三节　单纯形法的计算过程 ………………………… 38
第四节　确定初始可行基的方法 ……………………… 44
习题三…………………………………………………… 49
第四章　改进的单纯形法 ………………………………… 53
习题四…………………………………………………… 61
第五章　线性规划对偶理论 ……………………………… 63
第一节　建筑经济中的对偶问题 ……………………… 63
第二节　对偶线性规划 ………………………………… 67
第三节　对偶问题的几个基本性质 …………………… 71
第四节　对偶单纯形法 ………………………………… 75
习题五…………………………………………………… 80
第六章　运输问题………………………………………… 82
第一节　表上作业法 …………………………………… 82
第二节　改进的表上作业法 …………………………… 89
第三节　图上作业法 …………………………………… 91

习题六………………………………………………………………… 106
第七章　线性规划的应用 ……………………………………… 109
第一节　设计方案的技术经济评价 ………………………… 109
第二节　承包工程的选择 ……………………………………… 113
第三节　生产规划 ……………………………………………… 116
第四节　下料问题 ……………………………………………… 120
第五节　最优运输方案的确定 ……………………………… 123
第六节　年度生产计划按月分配 …………………………… 124
第七节　连续投资问题 ………………………………………… 127
第八节　配料问题 ……………………………………………… 130
第九节　工厂合理布局 ………………………………………… 135
第八章　灵敏度分析举例 ……………………………………… 138
附　录
参考书目

第一章　线性规划的基本概念

线性规划（Linear Programming）是运筹学（Operation Research）的一个重要分支。运筹学包括规划论、排队论、决策论等。线性规划属于规划论的范畴。自一九四七年，戴塞（G. B. Dantzig）提出了求解一般线性规划问题的方法——单纯形法之后，才系统地总结出线性规划模型的计算方法。六十年代以来，由于计算技术的发展，线性规划在军事、工农业生产、建筑和经济管理等部门的应用更加广泛，成为当前运筹学中最有用的方法之一。

线性规划所考虑的问题，是在各种相互关联的多变量线性约束条件下，去解决或规划一个对象的目标函数最优的问题。

第一节　线性规划问题

在建筑技术经济评价中经常提出的一个问题是：对现有一定数量的人力、物力和财力，如何合理安排才能发挥最大的效用，以便获得最好的经济效果。

例1　某预制厂生产甲、乙两种预制构件。生产甲、乙两种构件各一单位时分别消耗煤 9 吨、4 吨，电 4 千瓦、5 千瓦，劳动日 3 个、10个。已知生产一个单位甲种构件可得利润700元，生产一个单位乙种构件可得利润 1200 元。由于

受条件限制，这个预制厂只能提供360吨煤，200千瓦电力，300个劳动日。问甲、乙两种构件各生产多少单位时，既不超过该预制厂的能力，又可获得利润最大？

为了用数学语言来描述这一问题，我们先将问题中的资源利用数据列成表1—1。

表1—1

资源＼需量＼产品	甲产品（单位）	乙产品（单位）	各种资源利用限度
煤（吨）	9	4	360
电（千瓦）	4	5	200
劳动日（个）	3	10	300
利润（百元）	7	12	

假设x_1、x_2分别表示生产甲、乙两种构件的产量。由于煤的提供量是360吨，这是一个限制产量的条件。所以在确定构件甲、乙的产量时。要考虑不能超出可供煤的利用限度，即可用不等式表示为

$$9x_1+4x_2\leqslant 360$$

类似地，对电、劳动日得不等式

$$4x_1+5x_2\leqslant 200$$

$$3x_1+10x_2\leqslant 300$$

该预制厂的目标是：在不超过所有资源利用限度利条件下，如何确定产量x_1，x_2，以取得最大的利润。若以Z表示利润。即有

$$Z=7x_1+12x_2 \text{（单位：百元）}$$

于是这个资源利用问题可归纳为：

满足约束条件

$$\begin{cases} 9x_1+4x_2\leqslant 360 \\ 4x_1+5x_2\leqslant 200 \\ 3x_1+10x_2\leqslant 300 \\ x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0 \end{cases}$$

下，使得该预制厂的目标(利润)$Z=7x_1+12x_2$为最大。

例2 某建筑公司在计划期内准备安排施工A、B两类不同建筑体系的民用住宅，各类体系的民用住宅分别需经Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ四道工序。经调查，A、B两类住宅在每道工序上所需工日如表1—2。该公司由于条件限制，在计划期内投入每道工序的工日分别为12000、8000、16000、12000个。已知完成A、B类住宅施工任务每幢可得利润分别为20000元、30000元，问怎样安排生产计划，才能获得利润最多？

假设x_1、x_2分别表示在计划期内民用住宅A、B类竣工的幢数。

表1—2

住宅 \ 工序	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ
A（千个工日）	2	1	4	0
B（千个工日）	2	2	0	4

由于条件限制，投入第Ⅰ道工序的工日数不能超过12000，所以在确定A、B类体系的幢数时可用不等式表示

$$2x_1+2x_2\leqslant 12$$

类似地讨论第Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ道工序有不等式

$$x_1+2x_2\leqslant 8$$

$$4x_1\qquad\leqslant 16$$

$$4x_2\leqslant 12$$

该公司的目标是：在不超过各道工序的限制工日条件下，如何确定幢数x_1、x_2，以便获得最大的利润。若以Z表示利润。这时

$$Z=2x_1+3x_2\text{（单位：万元）}$$

于是这个计划问题可归纳为

满足约束条件

$$\begin{cases}2x_1+2x_2\leqslant 12\\ x_1+2x_2\leqslant 8\\ 4x_1\qquad\leqslant 16\\ \qquad 4x_2\leqslant 12\\ x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0\end{cases}$$

下，使得该公司的目标（利润）$Z=2x_1+3x_2$最大。

建筑技术经济评价中经常提出的另一个问题是：确定了任务后，如何以最少的人力、物力、财力去完成它。

例3　某公司承担B_1、B_2、B_3三种生产任务，分别分配给两个施工处A_1、A_2去完成。经调查完成B_1、B_2、B_3任务分别需要250、170、180个工日。由于条件限制，A_1只能提供400个工日，A_2只能提供200个工日。已知A_1、A_2完成B_1、B_2、B_3三种任务的工日成本如表1—3。问怎样分配工日，才能以最低成本去完成这三种任务？

假设A_1分配给B_1、B_2、B_3三种任务的工日分别为x_{11}、x_{12}、x_{13}，A_2分配给B_1、B_2、B_3三种任务的工日为x_{21}、x_{22}、x_{23}。

表1—3

任务 / 施工处	B_1（工日成本）	B_2（工日成本）	B_3（工日成本）	能力工日
A_1	4	5	6	400
A_2	5	7	9	200
任务工日	250	170	180	600

表中工日成本以元为单位。

由于A_1只能提供400个工日，所以有等式

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}=400$$

类似地得出等式

$$x_{21}+x_{22}+x_{23}=200$$

由于任务B_1的完成必需250个工日，所以有等式

$$x_{11}+x_{21}=250$$

类似地得等式

$$x_{12}+x_{22}=170$$

$$x_{13}+x_{23}=180$$

该公司的目标是：在不超过能力工日的条件下，完成这三种任务的最低成本。以Z表示成本。即

$$Z=4x_{11}+5x_{12}+6x_{13}+5x_{21}+7x_{22}+9x_{23}(\text{单位：元})$$

于是这个发挥生产力问题可归纳为：

满足约束条件

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}=400 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}=200 \\ x_{11}+x_{21}=250 \\ x_{12}+x_{22}=170 \\ x_{13}+x_{23}=180 \\ x_{ij}\geqslant 0 \quad i=1,\ 2;\ j=1,\ 2,\ 3. \end{cases}$$

下，使得该公司的目标（成本）

$$Z = 4x_{11} + 5x_{12} + 6x_{13} + 5x_{21} + 7x_{22} + 9x_{23}$$

为最小。

例4　设有两个砖厂A_1、A_2。产量分别为23万块与27万块。它们联合供应着B_1、B_2、B_3三个工地。其需要量分别为17万块，18万块和15万块。根据调查知道自产地至各工地的运价如表1—4。

表1—4

运价（元/万块） 工地 / 砖厂	B_1	B_2	B_3	供应量
A_1	50	60	70	23
A_2	60	110	160	27
需　要　量	17	18	15	50

问怎样调拨，使总运费最省？

假设x_{ij}（$i=1$，2；$j=1$，2，3）表示自砖厂A_i运往工地B_j砖的数量（单位：万块）。由于砖厂A_1运往B_1、B_2、B_3三个工地砖的总数应是A_1的产量23万块，即有等式

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 23$$

类似地有等式

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 27$$

另一方面，两个砖厂供给B_1工地的砖的数量应等于B_1的需要量17万块，即有等式

$$x_{11} + x_{21} = 17$$

类似地有等式

$$x_{12} + x_{22} = 18$$

$$x_{13} + x_{23} = 15$$

安排这个调拨方案的目标是：在供需平衡的条件限制

下，如何确定调拨数量x_{ij}（$i=1$，2；$j=1$，2，3），以便使总运费最省。若以Z表示总运费。即

$$Z=50x_{11}+60x_{12}+70x_{13}+60x_{21}+110x_{22}+160x_{23}$$

（单位：元）

于是这个运输问题可归纳为：

满足约束条件

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}=23 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}=27 \\ x_{11}+x_{21}=17 \\ x_{12}+x_{22}=18 \\ x_{13}+x_{23}=15 \\ x_{ij}\geqslant 0 \quad (i=1,\ 2;\ j=1,\ 2,\ 3) \end{cases}$$

使得该运输问题的目标（总运费）

$$Z=50x_{11}+60x_{12}+70x_{13}+60x_{21}+110x_{22}+160x_{23}$$

为最小。

此外，在建筑业中如建设项目的确定，总平面布置，设计方案的择优，施工过程中施工顺序的安排，土方平衡，运输线路的规划，承包工程的选择，合理下料，仓库、管网等合理布置方面均可用线性规划来解决。因此它是现代管理科学的重要基础和手段之一。

第二节　线性规划的数学模型

前面提到，线性规划的应用是很广的，应用的实际问题各式各样。但所研究的问题从数学上进行量的分析，就是所谓最大最小值问题。数学模型是描述实际问题共性的抽象的数学形式。对数学模型的研究，有助于我们认识这类问题的

性质和寻求它的一般解法。

从数学上说，第一节中所举例子有如下共同特征：

（1）每一个问题都用一组未知量x_j（$j=1, 2, \cdots, n$）表示某一方案，这组未知量的一组定值就代表一个具体方案。通常要求这些未知量取值是非负的。

（2）存在一定的限制条件（即约束条件），且可用一组线性等式或线性等不式来表达。

（3）都有一个目标要求，且这个目标可表示为一组未知量的线性函数（称为目标函数）。按研究的问题不同，要求目标函数达最大值或最小值。

一般地，这类问题用数学语言描述如下：

求一组变量x_j（$j=1, 2, \cdots, n$）的值，它使目标函数

$$Z=\sum_{j=1}^{n} C_j x_j$$

达最大值（或最小值），并满足约束条件：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n \ (\leqslant, \ =, \ \geqslant) \ b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n \ (\leqslant, \ =, \ \geqslant) \ b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n \ (\leqslant, \ =, \ \geqslant) \ b_m \\ x_j \geqslant 0 \ (j=1, 2, \cdots, n) \end{cases}$$

其中a_{ij}，b_i和c_j均为已知的实常数，x_j是待定的未知量。

这就是线性规划的数学模型。它具有n个结构变量和m个约束条件。

线性规划模型可等价地转化为如下的标准形式

（L）Max $Z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$

$$
\text{s.t.}^{*}\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\\x_j\geqslant 0\qquad(j=1,2,\cdots,n)\end{cases}
$$

或者利用向量和矩阵的符号（见本书附录二），标准形式可写成

$$
(L)\quad \text{Max}\ Z=CX
$$

$$
\text{s.t.}\begin{cases}AX=b\\X\geqslant 0\end{cases}
$$

通常采用以下几种常用的方法，将一般的线性规划问题化成标准形式。

1．增加松弛变量

若约束条件中有“小于等于”的不等式约束时，可以通过增加松弛变量，将不等式约束转化为等式约束。

如遇

$$
a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n\leqslant b_i
$$

时，可增加一个变量 s，使得

$$
a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n+s=b_i
$$

这里 s ($\geqslant 0$)称为松弛变量。这时线性规划问题的未知量增加了一个。

2．增加剩余变量

若约束条件中有“大于等于”的不等式约束时，可以通

* s.t.是“Subject to”的缩写，为“约束条件”或“受约束于”下同。

过增加一个变量 y，将不等式约束转化为等式约束。

如遇

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geqslant b_i$$

时，可增加一个变量y，便得

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n - y = b_i$$

这里 y ($\geqslant 0$)称为剩余变量。这时线性规划问题的未知量增加了一个。

3. 进行变量变换

在线性规划的标准形式里要求未知量取非负值，但如果已知的线性规划里，有一个或几个未知量不要求取非负值时，那么，我们可用下面的变量变换法，将此变量化为具有非负要求的形式：

如设变量x_i并没有要求非负（这个变量亦称为自由变量）时，可令

$$x_i = u_i - v_i，\text{且} u_i \geqslant 0，v_i \geqslant 0$$

当然变量要比原规划中多了一个。

4. 目标函数的标准化

如果已知线性规划的目标函数是求最小值，即

$$\text{Min} \quad Z^* = CX$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} AX = b \\ X \geqslant 0 \end{cases}$$

则可令 $Z = -Z^*$，$\text{Min} \quad Z^* = -\text{Max} \quad Z$，而将其化成标准形式

$$\text{Max} \quad Z = -CX$$