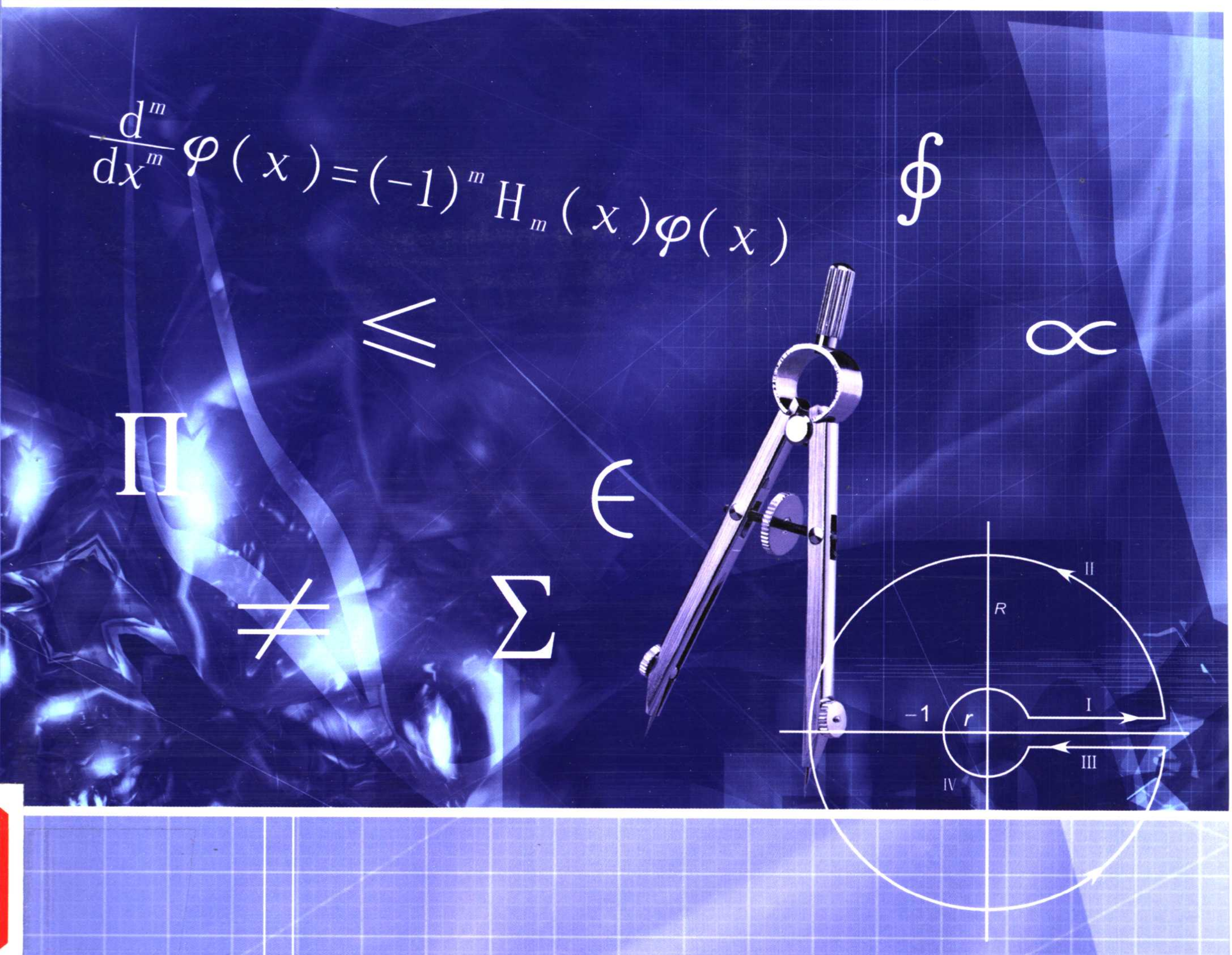
计量常用数学基础

刘智敏　编著



中国计量出版社
CHINA METROLOGY PUBLISHING HOUSE

计量常用数学基础

（Common Mathematical Foundation in Metrology）

刘智敏（LIU Zhimin） 编著

中国计量出版社

图书在版编目(CIP)数据

计量常用数学基础/刘智敏编著 .—北京:中国计量出版社,2003.8
ISBN 7-5026-1816-3

Ⅰ.计… Ⅱ.刘… Ⅲ.计量—数学 Ⅳ.TB9

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 060237 号

内 容 提 要

本书介绍计量中的各种常用数学,内容有计量基本计算、分析数学、复变与特殊函数、变换、矩阵、概率统计、数据计算处理、测量不确定度等,并给出大量实用计量算例。

本书适用于计量研究、检定、测试、管理人员,并可供质量监督检验检疫人员和科学技术人员、大专院校师生使用。

中国计量出版社出版
北京和平里西街甲 2 号
邮政编码 100013
电话 (010)64275360
E-mail jlfxb@263.net.cn
北京市迪鑫印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行

*
787 mm×1092 mm 16 开本 印张 47.5 字数 1162 千字
2003 年 10 月第 1 版 2003 年 10 月第 1 次印刷
*
印数 1—2 000 **定价:95.00 元**

前　　言

为了认识自然和改造自然，在科学技术、生产、商业、贸易、医疗、环保、质量监督、检验检疫中进行着大量测量。计量是关于测量的科学。

研究数量及其相互关系的数学，是科学的基础。计量与数学密切相连。计量所要给出的被测量的数，正是数学的研究对象，为数学提供了研究源泉，计量所得数据的分析、处理、表示，由已得量值导出新的量值，根据测得值算出准确的被测量结果，就需要数学。计量中常用的数学组成计量常用数学基础内容。新中国的计量事业已开展半个世纪。总结计量数学内容，推动计量事业发展，促进数学和科学技术的进步，就是本书目的。

笔者从事计量数学研究 40 多年，在国内外发表论文 100 多篇，著书 20 余部。举办各类相关讲座数百次。这些均为本书的撰写奠定了充分的理论和实践基础。

本书参阅国内外有关文献，反映了近代数学的研究内容，融汇了作者在概率统计、不确定度、组合数学、分析数学、矩阵等方面的研究成果，内容先进。书中介绍的计量中常用数学内容，从简单到深入，涉及概念、意义、性质、方法、定理、常用公式，内容全面，系统完整，便于查找，极为适用。书中有实例 200 多个，理论联系实际，涉及各类计量，生动说明了计量数学的应用。这是本书的显著特色。

本书为计量数学的一本系统著作，相信本书的出版对计量事业会起到促进作用，并有助于质量监督检验检疫与科学技术的发展。

刘智敏

2003 年 5 月

于中国计量科学研究院

目　　录

第1章 概 论

1.1 计量常用数学意义及其基础内容

1.1.1 计量常用数学意义

计量是实现单位统一、量值可靠的活动。计量是保证测量实现统一和准确的一门科学。

测量是以确定量值为目的的一组操作。计量学是关于测量的科学。为了保证量值的准确一致、正确可靠,在计量基准、标准建立和量值传递中,通过测量得到各种量值。

现在,在科学技术、生产、商业、贸易,出入境检验检疫、医疗、环保等工作中,进行着大量的计量、测量工作、用以认识事物及其相互联系,用以认识各种自然现象和它们的联系,通过测量,人们对量得出一个数字,这样就对事物和自然现象具备了定量的认识,从而为定性的认识建立了基础。

数学是研究数量及其相互关系和空间形式的科学。它和测量有着不可分割的联系。

测量是数学的源泉。测量给出被测量的数,为数学提供了研究对象;测量对数认识、处理的要求,促进了数学研究;数学的研究成果,进一步由测量得到验证。

比如,通过谷神星运转轨道的一系列测量数据,用最小二乘法处理得出了该星最佳运行轨道,找到了该星的出没地点,后由天文学家果然按计算结果找到了该彗星,使数学计算结果的正确性得以验证。

很多有名的学者,他们既是测量学家,又是数学家。他们的测量实践为他们的数学成就打下了良好基础,如高斯(Gauss)既是数学家,又是测量学家、物理学家,贝塞尔(Bessel)既是数学家,又是测量学家、仪器学家。

计量就是要由测量给出表示被测量大小的准确的数,计量和数学更是紧密相连。

计量所依据的物理、化学等领域的定理定律都以数学公式表出,数学的推导使我们深化了对计量结果和计量对象的认识。

计量以数字表示其成果,对计量所得的数,数学使我们对数的认识解释、表示、分析、运算得以实现,使我们根据已知量值导出新的量值得以实现,使我们根据测得数据计算处理得出准确结果得以实现,数学对计量意义重大。

数学对以数字作为其成果的计量极为重要。数学是计量的基础科学,数学知识是计量工作者必须具备的知识。

计量常用数学是计量中经常用到的数学。

因此,计量常用数学有着极为重要的意义。

1.1.2 计量常用数学基础内容

同计量有关的数学内容很多,计量常用数学是计量中经常用到的数学。

本书根据近代数学,介绍的计量常用数学基础内容有:计量基本计算、分析数学、复变函数与特殊函数、数学变换、矩阵、概率统计、数据处理、不确定度等。

本书首先介绍数学内容,接着用200多个实例说明它们在计量中的应用,每章每节每段都举出了计量数学实例。

第1章概论,介绍本书意义、内容,常用数学符号,常用数学常数。

第2章和第3章计量基本计算。

计量中有大量数字,需要对它们计算,以得出所需结果。

先介绍代数计算:比例、指数对数、数列、等式不等式、行列式与方程解法。举出了它们在长度、石英振荡器、分贝误差、放射衰变等方面的应用。

数论是数学之王,第2章后接着介绍数论计算:整除、取整函数、连分数、同余式。谈到它们在齿轮、抽样、转速、测距等方面的应用。

在第3章中,首先介绍组合数学、集合代数、布尔代数。组合数学是一门新发展的学科,本章在组合数学中介绍了排列组合、斯特林(Stirling)数、母函数、多项阶乘,并有砝码配套、多面棱体测角等例。

其次介绍三角、双曲函数。有基线尺悬链线、维氏硬度等例。

接着介绍几何、立体几何、解析几何、立体解析几何、矢量代数,有金属罐容积、布氏硬度、发光强度与光通量、直角立体棱镜等例。

第4章为一元分析数学。

计量中要进行大量的解析运算,为此需要分析数学。

本章先介绍一元函数导数与微分,有温度膨胀系数、照度、广义平均等例。

再介绍一元函数不定积分、定积分、广义积分。有电流峰值平均值有效值、液体压力、冷却定律等例。

级数对分析与应用至关重要,渐近级数在现代科技中应用迅速增加,本章接着介绍常数项级数、函数项级数、无穷乘积与渐近级数,举出了阿贝(Able)原则、天平不等臂影响、无线电信号失真度、正态分布与 t 分布临界点关系等例。

第5章为多元分析数学。

介绍了多元函数微积分。有微分法算误差、最小二乘法直线、力的功等例。

再谈到矢量分析、微分方程。有超导方程、电路电流、振动、声波波动方程等例。

接着介绍变分法与斯蒂尔吉斯(Stieltjes)积分。斯蒂尔吉斯积分将离散量与连续量联系起来。有悬链线、正态分布、质量矩等例。

第6章为复变函数与特殊函数。

先介绍复数、复变函数。有它们在无线电和电学中应用,在随机变量特征函数应用和在光学菲涅尔(Fresnel)应用等例。

再介绍 Γ 函数 B 函数及有关函数,Γ 函数 B 函数是近代数学中常用函数,是测量值分析的基础,本章除介绍基本内容外,还有商品计量允差中阶乘计算、次序量特征等例。

然后介绍贝塞尔(Bessel)函数与埃尔米特(Hermite)、勒让德(Legendre)、拉盖尔(Laguerre)正

交多项式,有测频偏的贝塞尔函数零值法、随机变量分布密度展开等例。

第 7 章为计量中的数学变换。

数学变换可使我们从多方面研究计量中的问题。

本章先述及傅里叶(Fourier)变换,有光学传递函数、力传感器传递函数等例。

再述及拉普拉斯(Laplace)变换,有电路电源、系统传递函数与稳定性等例。

然后述及差分方程与 Z 变换,有检验中的斐波那契 - 卢卡斯(Fibonacci-Lucas)序列、离散随机变量阶乘矩、离散定常线性系统等例。

第 8 章为矩阵。

计量涉及多个量。表示多个量要用矩阵。

本章先述及矩阵概念与运算。它的特征数与特殊阵,有电阻器温度系数计算、矩阵最小二乘法应用等例。

再述及广义逆矩阵、摄动与特殊计算,有广义逆计算、活塞有效面积、称量设计等例。

第 9 章为概率论。

计量中的测量值为随机变量,概率论研究的对象正是随机变量。

本章先介绍概率、随机变量及其特征,例有期望、标准差、相关系数的测量意义等。

然后谈及概率重要性质与概率分布,有检定周期、不确定度综合、抽样等例。

第 10 章为数理统计。

计量中有大量的统计,数理统计十分有用。

本章先介绍样本、标准差估计、假设与分布检验、方差分析、相关回归分析,标准差估计中有多种新方法。有计算不确定度等例。

再介绍稳健统计、贝叶斯统计、随机过程统计这些计量中新的统计,有测量稳健统计、接收机信号偏差等例。

第 11 章为测量数值计算与数据处理。

测量中有大量的数要计算处理,以得出我们需要的数。

本章先介绍近似计算、插值、方程数值解、数值积分及应用广泛的蒙特卡洛(Monte Carlo)法,有量具合理支承、最大残差蒙特卡洛计算等例。

再介绍数据修约、平均、最小二乘法、经验公式、样条拟合、正交回归与动态数据处理,例有压力计检定、米尺比较、温度计校准、辐射功率等数据处理。

第 12 章为测量不确定度。

测量结果的质量以不确定度表示,测量结果必须给出不确定度。

本章先介绍测量不确定度基础和原理,阐述了离群值及精细剔除法、重要的投影分布、自由度和相关系数等内容,有长度偏向不确定度、自由度的增加等例。

再介绍测量不确定度评定与表示方法及实践,有端度规校准、游泳道测量、容器温度测量、化学标准溶液测量、辐射发射测量例。

1.2 常用数学符号

1.2.1 基本符号

基本符号见表 1 - 1 至 1 - 13。

表 1-1 几何符号

符号	意义或读法	备注及示例
$\overline{AB}$, AB	[直][①]线段 AB the line segment AB	用 $\|AB\|$, AB 或小写的拉丁字母表示该直线段的长
$\angle$	[平面]角 plane angle	
$\widehat{AB}$	弧 AB the arc AB	当 $\widehat{AB}$ 为圆弧时,可用 $\widehat{AB}^{\circ}$ 表示圆弧 AB [对应]的度数
π	圆周率 ratio of the circumference of a circle to its diameter	圆周长与直径的比,$\pi = 3.141\ 592\ 6\cdots$
$\perp$	垂直 is perpendicular to	
$/\!/$, $\parallel$	平行 is parallel to	$\perp\!\!\!\perp$ 用于表示平行且相等

① 行文中方括号内的文字表示可以略去或不读,下同。

表 1-2 集合论符号

符号	应用	意义或读法	备注及示例
$\in$	$x \in A$	x 属于 A;x 是集合 A 的一个元[素] x belongs to A; x is an element of the set A	集合 A 可简称为集 A
$\notin$	$y \notin A$	y 不属于 A;y 不是集合 A 的一个元[素] y does not belong to A; y is not an element of the set A	也可用 $\overline{\in}$ 或 $\bar{\in}$
$\ni$	$A \ni x$	集 A 包含[元]x the set A contains x (as element)	
$\not\ni$	$A \not\ni y$	集 A 不包含[元]y the set A does not contain y(as element)	也可用 $\overline{\ni}$ 或 $\bar{\ni}$
$\{,\cdots,\}$	$\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$	诸元素 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 构成的集 set with elements $x_1, x_2, \cdots, x_n$	也可用 $\{x_i, i \in I\}$,这里的 I 表示指标集
$\mathbb{N}$, $\mathbf{N}$		非负整数集;自然数集 the set of positive integers and zero; the set of natural numbers	$\mathbb{N} = \{0,1,2,3,\cdots\}$ 自本集及下面四个集内排除 0 的集,应上标星号或下标 + 号,例如 $\mathbb{N}^*$ 或 $\mathbb{N}_+$; $\mathbb{N}_k = \{0,1,\cdots,k-1\}$
$\mathbb{Z}$, $\mathbf{Z}$		整数集 the set of integers	$\mathbb{Z} = \{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}$

符号	应用	意义或读法	备注及示例
$\mathbb{Q}$,**Q**		有理数集 the set of rational numbers	
$\mathbb{R}$,**R**		实数集 the set of real numbers	
$\mathbb{C}$,**C**		复数集 the set of complex numbers	
[,]	$[a,b]$	$\mathbb{R}$中由 a 到 b 的闭区间 closed interval in $\mathbb{R}$ from a (included) to b (included)	$[a,b]=\{x\in\mathbb{R}\mid a\leqslant x\leqslant b\}$
(,)],[	(a,b) $]a,b[$	$\mathbb{R}$中由 a 到 b 的开区间 open interval in $\mathbb{R}$ from a (excluded) to b (excluded)	$(a,b)=\{x\in\mathbb{R}\mid a<x<b\}$
$\subset$	$B\subset A$	B 含于 A；B 是 A 的子集 B is included in A; B is a subset of A	B 的每一元均属于 A，也可以用 $\subseteq$
$\supset$	$A\supset B$	A 包含 B[作为子集] A includes B (as subset)	A 包含了 B 的每一元，也可用 $\supseteq$。 $A\supseteq B$ 与 $B\subseteq A$ 的含义相同
$\cup$	$A\cup B$	A 与 B 的并集 union of A and B	属于 A 或属于 B 或属于两者的所有元的集。 $A\cup B=\{x\mid x\in A\vee x\in B\}$
$\cap$	$A\cap B$	A 与 B 的交集 intersection of A and B	所有既属于 A 又属于 B 的元的集。 $A\cap B=\{x\mid x\in A\wedge x\in B)$

表 1-3 数理逻辑符号

符号	应用	符号名称	意义、读法及备注
$\wedge$	$p\wedge q$	合取符号 conjunction sign	p 和 q
$\vee$	$p\vee q$	析取符号 disjunction sign	p 或 q
$\neg$	$\neg p$	否定符号 negation sign	p 的否定；不是 p；非 p
$\Rightarrow$	$p\Rightarrow q$	推断符号 implication sign	若 p 则 q；p 蕴含 q，也可写为 $q\Leftarrow p$，有时也用 $\rightarrow$
$\Leftrightarrow$	$p\Leftrightarrow q$	等价符号 equivalence sign	$p\Rightarrow q$ 且 $q\Rightarrow p$；p 等价于 q，有时也用 $\leftrightarrow$
$\forall$	$\forall x\in A\quad p(x)$ $(\forall x\in A)\quad p(x)$	全称量词 universal quantifier	命题 $p(x)$ 对于每一个属于 A 的 x 为真。 当考虑的集合 A 从上下文看很明白时，可用记号 $\forall x\quad p(x)$
$\exists$	$\exists x\in A\quad p(x)$ $(\exists x\in A)\quad p(x)$	存在量词 existential quantifier	存在 A 中的元 x 使 $p(x)$ 为真。 当考虑的集合 A 从上下文看很明白时，可用记号 $\exists x\quad p(x)$。 $\exists!$ 或 $\overset{1}{\exists}$ 用来表示存在一个且只有一个元素使 $p(x)$ 为真

表 1-4 杂类符号

符号	应用	意义或读法	备注及示例
$=$	$a=b$	a 等于 b a is equal to b	$\equiv$用来强调这一等式是数学上的恒等[式]
$\neq$	$a\neq b$	a 不等于 b a is not equal to b	
$\overset{\text{def}}{=\!=}$ $\overset{\text{d}}{=\!=}$	$a\overset{\text{def}}{=\!=}b$	按定义 a 等于 b 或 a 以 b 为定义 a is definition equal to b	例：$p\overset{\text{def}}{=\!=}mv$ 式中 p 为动量，m 为质量，v 为速度
$\approx$	$a\approx b$	a 约等于 b a is approximately equal to b	符号$\simeq$被用于“渐近等于”
$\propto$	$a\propto b$	a 与 b 成正比 a is proportional to b	
$:$	$a:b$	a 比 b ratio of a to b	
$<$	$a<b$	a 小于 b a is less than b	
$>$	$b>a$	b 大于 a b is greater than a	
$\leqslant$	$a\leqslant b$	a 小于或等于 b a is less than or equal to b	不用$\leqq$
$\geqslant$	$b\geqslant a$	b 大于或等于 a b is greater than or equal to a	不用$\geqq$
$\ll$	$a\ll b$	a 远小于 b a is much less than b	
$\gg$	$b\gg a$	b 远大于 a b is much greater than a	
∞		无穷[大]或无限[大] infinity	
~	$a\sim b$	数字范围 the range of numbers	这里的 a 和 b 为不同的实数，例如 5 ~ 10 表示由 5 至 10
.	13.59	小数点 decimal point	整数和小数之间用处于下方位置的小数点“.”分开
$\dot{}\ \dot{}$	$3.1\dot{2}3\,8\dot{2}$	循环小数 circulator	即：3.123 823 82…
%	5% ~ 10%	百分率 percent	~前的%不应省略
( )		圆括号 parentheses	
[ ]		方括号 square brackets	
{ }		花括号 braces	
$\pm$		正或负 positive or negative	

续表

符号	应用	意义或读法	备注及示例
$\mp$		负或正 negative or positive	
max		最大 maximum	
min		最小 minimum	

表 1－5　运算符号

符号,应用	意义或读法	备注及示例
$a+b$	a 加 b a plus b	
$a-b$	a 减 b a minus b	
$a \pm b$	a 加或减 b a plus or minus b	
$a \mp b$	a 减或加 b a minus or plus b	$-(a \pm b) = -a \mp b$
$ab, a \cdot b, a \times b$	a 乘以 b a multiplied by b	数的乘号用叉(×)或上下居中的圆点(·)。如出现小数点符号时,数的相乘只能用叉
$\frac{a}{b}, a/b, ab^{-1}$	a 除以 b 或 a 被 b 除 a divided by b	
$\sum_{i=1}^{n} a_i$	$a_1 + a_2 + \cdots + a_n$	也可记为 $\sum_{i=1}^{n} a_i, \sum_{i} a_i, \sum_{i} a_i, \sum a_i$ $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$
$\prod_{i=1}^{n} a_i$	$a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n$	也可记为 $\prod_{i=1}^{n} a_i, \prod_{i} a_i, \prod_{i} a_i, \prod a_i$ $\prod_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n \cdot \cdots$
a^p	a 的 p 次方或 a 的 p 次幂 a to the power p	
$a^{1/2}, a^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt{a}, \surd a$	a 的二分之一次方;a 的平方根 a to the power 1/2;square root of a	
$a^{1/n}, a^{\frac{1}{n}}$, $\sqrt[n]{a}, \sqrt[n]{}a$	a 的 n 分之一次方;a 的 n 次方根 a to the power $1/n$;nth root of a	在使用符号$\surd$或$\sqrt[n]{}$时,为了避免混淆,应采用括号把被开方的复杂表示式括起来

符号,应用	意义或读法	备注及示例
$\|a\|$	a 的绝对值;a 的模 absolute value of a;modules of a	也可用 abs a
sgn a	a 的符号函数 signum a	对于实数 a: $\operatorname{sgn} a=\begin{cases}1 & 当\ a>0\\0 & 当\ a=0\\-1 & 当\ a<0\end{cases}$
$\bar{a}$,$\langle a\rangle$	a 的平均值 mean value of a	如果平均值的求法在文中不明了,则应指出其形成的方法。若 $\bar{a}$ 容易与 a 的复共轭混淆时,就用$\langle a\rangle$
$n!$	n 的阶乘 factorial n	$n\geqslant 1$ 时, $n!=\prod_{k=1}^{n}k=1\times 2\times 3\times\cdots\times n$ $n=0$ 时,$n!=1$
$\binom{n}{p}$,C_n^p	二项式系数;组合数 binomial coefficient n,p	$\binom{n}{p}=\frac{n!}{p!\,(n-p)!}$
$[a]$,ent a,$E(a)$	小于或等于 a 的最大整数;示性 a the greatest integer less than or equal to a;characteristic of a	例:ent $2.4=2$ ent$(-2.4)=-3$

表 1-6 函数符号

符号,应用	意义或读法	备注及示例
f	函数 f function f	也可以表示为 $x\rightarrow f(x)$
$f(x)$ $f(x,y,\cdots)$	函数 f 在 x 或在$(x,y,\cdots)$的值 value of the function f at x or at $(x,y,\cdots)$ respectively	也表示以 $x,y,\cdots$为自变量的函数 f
$f(x)\|_a^b$ $[f(x)]_a^b$	$f(b)-f(a)$	这种表示法主要用于定积分计算
$g\circ f$	f 与 g 的合成函数或复合函数 the composite function of f and g	$(g\circ f)(x)=g(f(x))$
$x\rightarrow a$	x 趋于 a x tends to a	用 $x_n\rightarrow a$ 表示序列$\{x_n\}$的极限为 a
$\lim\limits_{x\rightarrow a}f(x)$ $\lim_{x\rightarrow a}f(x)$	x 趋于 a 时$f(x)$的极限 limit of $f(x)$ as x tends to a	$\lim_{x\rightarrow a}f(x)=b$ 可以写为: $f(x)\rightarrow b$ 当 $x\rightarrow a$ 右极限及左极限可分别表示为: $\lim_{x\rightarrow a^+}f(x)$和$\lim_{x\rightarrow a^-}f(x)$
$\overline{\lim}$	上极限 superior limit	

符号,应用	意义或读法	备注及示例
$\underline{\lim}$	下极限 inferior limit	
sup	上确界 supremum	
inf	下确界 infimum	
$\simeq$	渐近等于 is asymptotically equal to	例: $\frac{1}{\sin(x-a)} \simeq \frac{1}{x-a}$ 当 $x \to a$
$O(g(x))$	$f(x)=O(g(x))$的含义为$\lvert f(x)/g(x) \rvert$在行文所述的极限中有上界 $\lvert f(x)/g(x) \rvert$ is bounded above in the limit implied by the context	当 f/g 与 g/f 都有界时,称 f 与 g 是同阶的
$o(g(x))$	$f(x)=o(g(x))$表示在行文所述的极限中 $f(x)/g(x) \to 0$ $f(x)/g(x) \to 0$ in the limit implied by the context	
Δx	x 的[有限]增量 (finite) increment of x	
$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ $\mathrm{d}f/\mathrm{d}x$ f'	单变量函数 f 的导[函]数或微商 derivative of the function f of one variable	也可用 $\mathrm{D}f$。 即:$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$,$\mathrm{d}f(x)/\mathrm{d}x$,$f'(x)$,$\mathrm{D}f(x)$。 如自变量为时间 t,也可用 $\dot{f}$表示 $\mathrm{d}f/\mathrm{d}t$
$\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)_{x=a}$ $(\mathrm{d}f/\mathrm{d}x)_{x=a}$ $f'(a)$	函数 f 的导[函]数在 a 的值 value at a of the derivative of the function f	也可用$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right\rvert_{x=a}$或 $\mathrm{D}f(a)$
$\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}$ $\mathrm{d}^n f/\mathrm{d}x^n$ $f^{(n)}$	单变量函数 f 的 n 阶导函数 nth derivative of the function f of one variable	也可用 $\mathrm{D}^n f$。 当 $n=2,3$ 时,也可用 f'',f'''来代替$f^{(n)}$。 如自变量是时间 t,可用 $\ddot{f}$来代替$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}t^2}$
$\frac{\partial f}{\partial x}$ $\partial f/\partial x$ $\partial_x f$	多变量 $x,y,\cdots$的函数 f 对于 x 的偏微商或偏导数 partial derivative of the function f of several variables $x,y,\cdots$ with respect to x	即:$\frac{\partial f(x,y,\cdots)}{\partial x}$, $\partial f(x,y,\cdots)/\partial x$,$\partial_x f(x,y,\cdots)$。 也可用 f_x 或$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y\cdots}$ $\mathrm{D}_x=\frac{1}{\mathrm{i}}\partial_x$ 等常用于 Fourier 变换
$\frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^n \partial y^m}$	函数 f 先对 y 求 m 次偏微商,再对 x 求 n 次偏微商;混合偏导数 nth partial derivative of the function $\partial^m f/\partial y^m$ of several variables $x,y,\cdots$ with respect to x; mixed partial derivative	