

College Mathematics Guidance Series
大学数学学习辅导丛书

工程数学

积分变换 习题全解指南

东南大学数学系 张元林 编



高等教育出版社

内容简介

本书是高等教育出版社出版的《工程数学—积分变换》(第四版)教材的配套参考书,不仅对教材中所有习题作了详尽解答,而且在每章开始列出了“内容要点”,给出了“例题分析”。书中各章节习题的题号均与教材相一致,书后附有与教材相同的 Fourier 变换简表和 Laplace 变换简表,以方便查用。因此,本书具有相对独立性。

本书可作为“积分变换”课程的教学参考书,除可供高等院校非数学专业的师生参考使用外,也可供广大工程技术人员及自学积分变换的读者参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

工程数学.积分变换习题全解指南/张元林主编;东南大学数学系编.—北京:高等教育出版社,2004.1

ISBN 7-04-012956-6

I. 工... II. ①张...②东... III. 工程数学—高等学校—教学参考资料 IV. TB11

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 126066 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-82028899		http://www.hep.com.cn
经 销	新华书店北京发行所		
印 刷	河北省财政厅印刷厂		
开 本	850×1168 1/32	版 次	2004 年 1 月第 1 版
印 张	6.75	印 次	2004 年 1 月第 1 次印刷
字 数	160 000	定 价	9.80 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

前 言

本书是高等教育出版社出版的《工程数学—积分变换》(第四版,东南大学数学系 张元林编)教材的配套参考书。为了方便读者使用,对教材中所有习题作了详尽的解答。

本书也具有相对的独立性,每章开始列出“内容要点”,简述本章的基本概念、主要定理、性质及计算公式,使读者能尽快地掌握其主要内容,也可起到复习、小结的效果;在习题解答前,选出一些有代表性的题目给出“例题分析”,不仅给出其详细的解答过程,更着重于解题思路的分析,并尽可能地提供解题的多种方法,从而提高读者的分析问题和解决问题的能力;最后,对该教材的所有习题作出“习题全解”,这里,将按习题所在的章节,提供与教材内容的次序相适应的一种解题方法,并给出解答的全过程,对于有些习题可能遇到的难点或一题多解的情形,尽可能地加以注明,以期读者达到解题方法的多样性与灵活性。另外,教材中带有星号*内容的习题也同样作出了解答,以供需要此内容的读者及学有余力的学生参考。书中各章节习题的题号均与教材相一致。书后附有与教材相同的 Fourier 变换简表与 Laplace 变换简表,以方便查用。

必须指出,学好数学离不开自己做习题。如果用“阅读题解”代替“自己做题”,必将会影响自己解题能力的提高。但若是自己做了,再参考本书并作一些分析和比较,那将会收到触类旁通、举一反三的效果。这也是编者所期望的。

本书的编写力求层次分明,步骤清楚,书写格式规范化,使读者通过本书的学习,能对《积分变换》的理论与方法有更加深入的理解。

由于编者水平所限,本书给出的解题方法未必都是最好的,难免有误、不妥之处,敬请指正。

编 者

2003 年 8 月于南京

目 录

第一章 Fourier 变换	1
一 内容要点	1
二 例题分析	10
三 习题全解	25
习题一解答	25
习题二解答	31
习题三解答	47
习题四解答	56
习题五解答	67
第二章 Laplace 变换	85
一 内容要点	85
二 例题分析	92
三 习题全解	107
习题一解答	107
习题二解答	115
习题三解答	133
习题四解答	145
习题五解答	152
附录 I Fourier 变换简表	193
附录 II Laplace 变换简表	201

第一章 Fourier 变换

一 内容要点

本章从讨论周期函数的 Fourier 级数的展开式出发,进而讨论非周期函数的 Fourier 积分公式及其收敛定理,并在此基础上引出 Fourier 变换的定义、性质、一些计算公式及某些应用.

本章的重点是求函数的 Fourier 变换及 Fourier 变换的某些应用.函数的 Fourier 变换也是本章的一个难点,要解决好这个难点,必须掌握好 Fourier 变换的基本性质及一些常用函数(如单位脉冲函数,单位阶跃函数,正、余弦函数等)的 Fourier 变换及其逆变换的求法.从而才能较好地运用 Fourier 变换进行频谱分析,解某些微分、积分方程和偏微分方程的定解问题.

1. Fourier 积分

(1) Fourier 级数的展开式

设 $f_T(t)$ 以 T 为周期且在 $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ 上满足 Dirichlet 条件(即在 $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ 上满足:1°连续或只有有限个第一类间断点;2°只有有限个极值点).则 $f_T(t)$ 在 $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ 上可以展成 Fourier 级数.在 $f_T(t)$ 的连续点处,有

$$f_T(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) \quad (\text{三角形式})$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{j\omega_n t}, \quad (\text{复数形式或称复指数形式})$$

其中

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \omega_n = n\omega, c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) e^{-jn\omega t} dt \quad (n=0, \pm 1, \dots),$$

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, c_n = \frac{a_n - jb_n}{2}, c_{-n} = \frac{a_n + jb_n}{2} \quad (n=1, 2, \dots). \text{ 在 } f_T(t) \text{ 的间}$$

断点 t 处, 上面的展开式左边 $f_T(t)$ 应以 $\frac{1}{2} [f_T(t+0) + f_T(t-0)]$ 代替.

(2) Fourier 积分定理

对于 $(-\infty, +\infty)$ 上的任何一个非周期函数 $f(t)$ 都可以看成是由某个周期函数 $f_T(t)$ 当 $T \rightarrow +\infty$ 时转化而来的. 由此, 从 $f_T(t)$ 的 Fourier 级数的复数形式出发, 能够得到一个非周期函数 $f(t)$ 的 Fourier 积分公式, 其条件为:

若 $f(t)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上满足下列条件:

1° $f(t)$ 在任一有限区间上满足 Dirichlet 条件;

2° $f(t)$ 在无限区间 $(-\infty, +\infty)$ 上绝对可积 (即积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt$ 收敛), 则在 $f(t)$ 的连续点处有如下的 Fourier 积分公式

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right] e^{j\omega t} d\omega.$$

在 $f(t)$ 的间断点 t 处, 上面展开式左端的 $f(t)$ 应以 $\frac{1}{2} [f(t+0) + f(t-0)]$ 代替. 这个公式也称为 Fourier 积分公式的复数形式.

这个定理在教材中虽然未加证明, 但应当看到它是 Fourier 变换的理论基础, 必须深刻理解其含义, 掌握它成立的条件, 以便为学习 Fourier 变换奠定理论基础.

(3) Fourier 积分公式的其他形式

1) Fourier 积分公式的三角形式

利用 Euler 公式, 由 Fourier 积分公式的复数形式可推出它的三角形式:

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cos \omega(t - \tau) d\tau \right] d\omega$$

2) Fourier 正弦积分公式

当 $f(t)$ 为奇函数时, 利用三角函数的和差公式, 由 Fourier 积分公式的三角形式可推出其 Fourier 正弦积分公式

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} f(\tau) \sin \omega \tau d\tau \right] \sin \omega t d\omega$$

3) Fourier 余弦积分公式

当 $f(t)$ 为偶函数时, 同理可得

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} f(\tau) \cos \omega \tau d\tau \right] \cos \omega t d\omega$$

若 $f(t)$ 仅在 $(0, +\infty)$ 上有定义, 且满足 Fourier 积分收敛定理的条件, 通过奇式(偶式)延拓, 便可得到 $f(t)$ 的 Fourier 正弦(余弦)积分展开式.

2. Fourier 变换

(1) Fourier 变换的概念

Fourier 变换对的一般形式:

$$\begin{cases} \mathcal{F}[f(t)] = F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \\ f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega; \end{cases}$$

Fourier 正弦变换对: 当 $f(t)$ 为奇函数时, 有

$$\begin{cases} \mathcal{F}_s[f(t)] = F_s(\omega) = \int_0^{+\infty} f(t) \sin \omega t dt \\ f(t) = \mathcal{F}_s^{-1}[F_s(\omega)] = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} F_s(\omega) \sin \omega t d\omega; \end{cases}$$

Fourier 余弦变换对: 当 $f(t)$ 为偶函数时, 有

$$\begin{cases} \mathcal{F}_c[f(t)] = F_c(\omega) = \int_0^{+\infty} f(t) \cos \omega t dt \\ f(t) = \mathcal{F}_c^{-1}[F_c(\omega)] = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} F_c(\omega) \cos \omega t d\omega, \end{cases}$$

它们可分别简记为 $f(t) \Leftrightarrow F(\omega)$, $f(t) \Leftrightarrow F_s(\omega)$ 及 $f(t) \Leftrightarrow F_c(\omega)$. 显然, 当 $f(t)$ 为奇函数时, $F(\omega) = -2jF_s(\omega)$, 当 $f(t)$ 为偶函数时, $F(\omega) = 2F_c(\omega)$.

(2) 单位脉冲函数及其 Fourier 变换

δ -函数的重要性质—筛选性质: 若 $f(t)$ 为无穷次可微的函数, 则有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) f(t) dt = f(0).$$

一般地, 有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) f(t) dt = f(t_0).$$

由这一性质, 可得 $\mathcal{F}[\delta(t)] = 1$, $\mathcal{F}^{-1}[1] = \delta(t)$, 表明 $\delta(t)$ 和 1 构成一个 Fourier 变换对, 记为 $\delta(t) \Leftrightarrow 1$. 同理, 有 $\delta(t - t_0) \Leftrightarrow e^{-j\omega t_0}$.

需要指出的是 $\delta(t)$ 是一个广义函数, 它的 Fourier 变换是一种广义 Fourier 变换. 在物理学和工程技术中有许多重要函数 (如常数, 符号函数, 单位阶跃函数及正、余弦函数等) 不满足 Fourier 积分定理中的绝对可积条件 (即不满足 $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < \infty$), 然而其广义 Fourier 变换是存在的. 利用单位脉冲函数及其 Fourier 变换就可以求出它们的 Fourier 变换. 例如

$$\mathcal{F}[1] = 2\pi\delta(\omega), \mathcal{F}[e^{j\omega_0 t}] = 2\pi\delta(\omega - \omega_0),$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[u(t)] &= \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega), \quad \mathcal{F}[\operatorname{sgn} t] = \frac{2}{j\omega}, \\ \mathcal{F}[\sin \omega_0 t] &= j\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)], \\ \mathcal{F}[\cos \omega_0 t] &= \pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)].\end{aligned}$$

3. Fourier 变换的物理意义—频谱

(1) 非正弦的周期函数 $f_T(t)$ 的频谱

在 $f_T(t)$ 的 Fourier 级数展开式中, 称

$$a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t = A_n \sin(\omega_n t + \varphi_n)$$

为第 n 次谐波, 其中 $\omega_n = n\omega = \frac{2n\pi}{T}$. $A_0 = \frac{|a_0|}{2}$, $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$

称为频率为 ω_n 的第 n 次谐波的振幅, 在 $f_T(t)$ 的 Fourier 级数的复数形式中, 第 n 次谐波为 $c_n e^{j\omega_n t} + c_{-n} e^{-j\omega_n t}$, 并且 $|c_n| = |c_{-n}| =$

$\frac{1}{2}\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, 从而 $f_T(t)$ 的第 n 次谐波的振幅为

$$A_n = 2|c_n| \quad (n=0, 1, 2, \dots),$$

它描述了各次谐波的振幅随频率变化的分布情况. 所谓频谱图, 通常是指频率 ω_n 与振幅 A_n 的关系图. A_n 也称为 $f_T(t)$ 的振幅频谱 (简称为频谱). 由于 $n=0, 1, 2, \dots$, 所以频谱 A_n 的图形是不连续的, 称之为离散频谱, 其频谱图清楚地表明了一个非正弦的周期函数 $f_T(t)$ 包含了哪些频率分量及各分量所占的比重 (如振幅的大小).

(2) 非周期函数 $f(t)$ 的频谱

非周期函数 $f(t)$ 的 Fourier 变换 $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$, 在频谱分析中又称为 $f(t)$ 的频谱函数, 它的模 $|F(\omega)|$ 称为 $f(t)$ 的振幅频谱 (简称频谱). 由于 ω 是连续变化的, 这种频谱称为连续频谱, 频谱图为连续曲线. 振幅频谱 $|F(\omega)|$ 是频率 ω 的偶函数; 相角频谱

$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \omega t dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega t dt}$$

是频率 ω 的奇函数. 对一个时间

函数作 Fourier 变换,就是求这个时间函数的频谱函数.

频谱图能清楚地表明时间函数的各频谱分量的相对大小,因此,频谱图在工程技术中有着广泛的应用.作出一个非周期函数 $f(t)$ 的频谱图,其步骤如下:

- 1) 先求出非周期函数 $f(t)$ 的 Fourier 变换 $F(\omega)$;
- 2) 选定频率 ω 的一些值,算出相应的振幅频谱 $|F(\omega)|$ 的值;
- 3) 将上述各组数据所对应的点填入直角坐标系中,用连续曲线连接这些离散的点,就得到了该函数 $f(t)$ 的频谱图.

4. Fourier 变换的基本性质

为叙述方便,在下述性质中,凡是需要求 Fourier 变换的函数,假定都满足 Fourier 积分定理中的条件.

(1) 线性性质 设 $\mathcal{F}[f_1(t)] = F_1(\omega)$, $\mathcal{F}[f_2(t)] = F_2(\omega)$, α, β 为常数,则

$$\mathcal{F}[\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)] = \alpha F_1(\omega) + \beta F_2(\omega);$$

$$\mathcal{F}^{-1}[\alpha F_1(\omega) + \beta F_2(\omega)] = \alpha f_1(t) + \beta f_2(t).$$

(2) 位移性质 设 $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$, 则

$$\mathcal{F}[f(t \pm t_0)] = e^{\pm j\omega t_0} F(\omega);$$

$$\mathcal{F}^{-1}[F(\omega \mp \omega_0)] = f(t) e^{\pm j\omega_0 t}, (\text{象函数的位移性质}).$$

(3) 微分性质 设 $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$, 如果 $f^{(k)}(t)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续或只有有限个可去间断点, 且 $\lim_{|t| \rightarrow +\infty} f^{(k)}(t) = 0, k = 0, 1, 2, \dots, n-1$, 则有

$$\mathcal{F}[f^{(n)}(t)] = (j\omega)^n F(\omega);$$

$$F^{(n)}(\omega) = (-j)^n \mathcal{F}[t^n f(t)], (\text{象函数的微分性质}).$$

特别, 当 $n=1$ 有

$$\mathcal{F}[f'(t)] = j\omega F(\omega);$$

$$F'(\omega) = -j\mathcal{F}[tf(t)].$$

(4) 积分性质 设 $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$, 如果当 $t \rightarrow +\infty$ 时,

$g(t) = \int_{-\infty}^t f(t) dt \rightarrow 0$, 则

$$\mathcal{F} \left[\int_{-\infty}^t f(t) dt \right] = \frac{1}{j\omega} F(\omega);$$

当 $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) \neq 0$ 时, 有

$$\mathcal{F} \left[\int_{-\infty}^t f(t) dt \right] = \frac{1}{j\omega} F(\omega) + \pi F(0) \delta(\omega).$$

(5*) 乘积定理 设 $\mathcal{F}[f_1(t)] = F_1(\omega)$, $\mathcal{F}[f_2(t)] = F_2(\omega)$, 则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f_1(t)} f_2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{F_1(\omega)} F_2(\omega) d\omega$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) \overline{f_2(t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\omega) \overline{F_2(\omega)} d\omega,$$

其中 $\overline{f_1(t)}$, $\overline{f_2(t)}$, $\overline{F_1(\omega)}$ 及 $\overline{F_2(\omega)}$ 分别为 $f_1(t)$, $f_2(t)$, $F_1(\omega)$ 及 $F_2(\omega)$ 的共轭函数. 特别, 当 $f_1(t)$, $f_2(t)$ 为实函数时,

$$\text{有 } \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) f_2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{F_1(\omega)} F_2(\omega) d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\omega) \overline{F_2(\omega)} d\omega.$$

(6*) 能量积分 设 $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$, 则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [f(t)]^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

这一等式又称为 Parseval 等式. 函数 $S(\omega) = |F(\omega)|^2$ 称为能量密度函数(或称能量谱密度). 它可以决定函数 $f(t)$ 的能量分布规律. 将它对所有频率积分就得到 $f(t)$ 的总能量, 因此, Parseval 等式又称为能量积分. 它表明非周期函数 $f(t)$ 在时间域内的能量与在频率域内的能量不因 $f(t)$ 取 Fourier 变换后而改变. 由于能量密度函数 $S(\omega)$ 是 ω 的偶函数, 则能量积分可进一步写为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [f(t)]^2 dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} S(\omega) d\omega.$$

5. 卷积与相关函数

(1) 卷积的概念

$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau$, 且其运算满足

$$f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t) \quad (\text{交换律});$$

$$f_1(t) * [f_2(t) * f_3(t)] = [f_1(t) * f_2(t)] * f_3(t) \quad (\text{结合律});$$

$$f_1(t) * [f_2(t) + f_3(t)] = f_1(t) * f_2(t) + f_1(t) * f_3(t) \quad (\text{分配律});$$

$$|f_1(t) * f_2(t)| \leq |f_1(t)| * |f_2(t)| \quad (\text{卷积不等式}).$$

(2) 卷积定理 设 $f_k(t) (k=1, 2, \dots, n)$ 满足 Fourier 积分定理中的条件, 且 $\mathcal{F}[f_k(t)] = F_k(\omega) (k=1, 2, \dots, n)$, 则

$$\mathcal{F}[f_1(t) * f_2(t) * \dots * f_n(t)] = F_1(\omega) \cdot F_2(\omega) \cdot \dots \cdot F_n(\omega);$$

$$\mathcal{F}[f_1(t) \cdot f_2(t) \cdot \dots \cdot f_n(t)] = \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} F_1(\omega) * F_2(\omega) * \dots * F_n(\omega) \quad (\text{象函数卷积定理}).$$

特别,

$$\mathcal{F}[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(\omega) \cdot F_2(\omega);$$

$$\mathcal{F}[f_1(t) \cdot f_2(t)] = \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega).$$

(3*) 相关函数的概念

相关函数的概念和卷积的概念一样, 也是频谱分析中的一个重要概念. 记函数 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的互相关函数为

$$R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) f_2(t + \tau) dt.$$

记函数 $f(t)$ 的自相关函数(简称为相关函数)为

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) f(t + \tau) dt.$$

显然, $R(\tau) = R(-\tau); R_{21}(\tau) = R_{12}(-\tau)$.

(4*) 相关函数和能量谱密度的关系

1) 自相关函数和能量谱密度构成一个 Fourier 变换对: $R(\tau) \Leftrightarrow S(\omega)$, 即

$$\begin{cases} R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega; \\ S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \end{cases}$$

利用 $R(\tau)$ 和 $S(\omega)$ 的偶函数性质, 可进一步写为

$$\begin{aligned} R(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) \cos \omega\tau d\omega; \\ S(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau) \cos \omega\tau d\tau \end{aligned}$$

$R(\tau)$ 在 $\tau=0$ 时, 可得 Parseval 等式, 即

$$R(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} [f(t)]^2 dt.$$

2) 互相关函数和互能量谱密度构成一个 Fourier 变换对. 由乘积定理(当 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 为实函数时)知

$$\begin{aligned} R_{12}(\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) f_2(t+\tau) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{F_1(\omega)} F_2(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \end{aligned}$$

记互能量谱密度为 $S_{12}(\omega) = \overline{F_1(\omega)} F_2(\omega)$ (而 $S_{21}(\omega) = \overline{F_2(\omega)} F_1(\omega)$), 则

$$\begin{cases} R_{12}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{12}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega; \\ S_{12}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{12}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \end{cases}$$

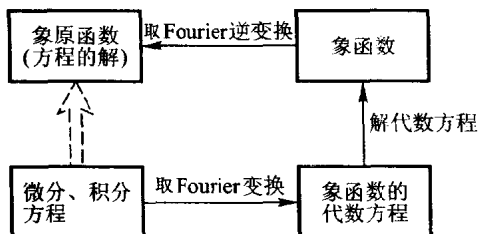
显然, 互能量谱密度有 $S_{21}(\omega) = \overline{S_{12}(\omega)}$.

6. Fourier 变换的应用

Fourier 变换是分析非周期函数频谱的理论基础. 它在频谱分析中有着重要的应用, 前面已列出其内容要点. 这里的应用主要是用来求解某些微分、积分方程和偏微分方程(其未知函数为二元函数的情形)的定解问题.

(1) 微分、积分方程的 Fourier 变换解法

运用 Fourier 变换的线性性质、微分性质和积分性质,对欲求解的方程两端取 Fourier 变换,将其转化为象函数的代数方程,通过解代数方程与求 Fourier 逆变换就可得到原方程的解.这种解法如下图所示:



(2*) 偏微分方程的 Fourier 变换解法

运用 Fourier 变换求解偏微分方程的定解问题类似于上述示意图中的三个步骤,即先将定解问题中的未知函数看作某一自变量的函数,对方程及定解条件关于该自变量取 Fourier 变换,把偏微分方程和定解条件化为象函数的常微分方程的定解问题;再根据这个常微分方程和相应的定解条件,求出象函数;然后再取 Fourier 逆变换,得到原定解问题的解.这里,要求变换的自变量在 $(-\infty, +\infty)$ 内变化;如要求变换的自变量在 $(0, +\infty)$ 内变化,则根据定解条件的情形可运用 Fourier 正弦变换或 Fourier 余弦变换来求解该偏微分方程的定解问题.

二 例题分析

例 1-1 试求函数 $f(t) = \begin{cases} t, & |t| \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ 的 Fourier 积分表达式.

解 在 Fourier 积分定理的条件下,函数 $f(t)$ 的 Fourier 积分表达式,可以用复数形式,也可以用三角形式来表达;由于函数

$f(t)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的奇函数, 还可以用 Fourier 正弦积分公式来表达; 如果读者已经掌握 Fourier 变换的性质, 则可根据教材第一章 § 1.1 中的例 1, 利用象函数的微分性质求得结果.

方法 1 利用 Fourier 积分公式的复数形式, 在 $f(t)$ 的连续点处, 有

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right] e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-1}^1 \tau (\cos \omega\tau - j \sin \omega\tau) d\tau \right] e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{-j}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_0^1 \tau \sin \omega\tau d\tau \right] e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{-j}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin \omega}{\omega^2} - \frac{\cos \omega}{\omega} \right) (\cos \omega t + j \sin \omega t) d\omega \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin \omega}{\omega^2} - \frac{\cos \omega}{\omega} \right) \sin \omega t d\omega, (t \neq \pm 1) \end{aligned}$$

当 $t = \pm 1$ 时, $f(t)$ 应以 $\frac{1}{2} [f(\pm 1+0) + f(\pm 1-0)] = \pm \frac{1}{2}$ 代替.

方法 2 利用 Fourier 积分公式的三角形式, 在 $f(t)$ 的连续点处, 有

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cos \omega(t - \tau) d\tau \right] d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\int_{-1}^1 \tau \cos \omega(t - \tau) d\tau \right] d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\int_{-1}^1 \tau (\cos \omega t \cos \omega\tau + \sin \omega t \sin \omega\tau) d\tau \right] d\omega \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \sin \omega t \left[\int_0^1 \tau \sin \omega\tau d\tau \right] d\omega \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin \omega}{\omega^3} - \frac{\cos \omega}{\omega} \right) \sin \omega t d\omega, (t \neq \pm 1) \end{aligned}$$

同样, 当 $t = \pm 1$ 时, $f(t)$ 应以 $\pm \frac{1}{2}$ 代替

方法 3 由于 $f(t)$ 为 $(-\infty, +\infty)$ 上的奇函数, 也可以利用

Fourier 正弦积分公式, 在 $f(t)$ 的连续点处, 有

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} f(\tau) \sin \omega \tau d\tau \right] \sin \omega t d\omega \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\int_0^1 \tau \sin \omega \tau d\tau \right] \sin \omega t d\omega \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin \omega}{\omega^2} - \frac{\cos \omega}{\omega} \right) \sin \omega t d\omega, (t \neq \pm 1) \end{aligned}$$

当 $t = \pm 1$ 时, $f(t)$ 也应应以 $\pm \frac{1}{2}$ 代替.

方法 4 利用象函数的微分性质, 如记教材第一章 § 1.1 例 1

中的函数为 $g(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq 1 \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$ 令

$$\mathcal{F}[g(t)] = G(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt = 2 \int_0^1 \cos \omega t dt = \frac{2 \sin \omega}{\omega}$$

显然, 本例中的函数 $f(t) = tg(t)$. 根据象函数的微分性质 (也称为象函数的导数公式): $G'(\omega) = -j\mathcal{F}[tg(t)]$, 即

$$\mathcal{F}[f(t)] = \mathcal{F}[tg(t)] = -\frac{1}{j} G'(\omega) = -2j \left(\frac{\sin \omega}{\omega^2} - \frac{\cos \omega}{\omega} \right).$$

从而, 由 Fourier 积分公式的复数形式, 在 $f(t)$ 的连续点处有

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[-2j \left(\frac{\sin \omega}{\omega^2} - \frac{\cos \omega}{\omega} \right) \right] e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{-j}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin \omega}{\omega^2} - \frac{\cos \omega}{\omega} \right) (\cos \omega t + j \sin \omega t) d\omega \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin \omega}{\omega^2} - \frac{\cos \omega}{\omega} \right) \sin \omega t d\omega \end{aligned}$$

当 $t = \pm 1$ 时, $f(t)$ 应以 $\pm \frac{1}{2}$ 代替.

根据上述结果, 我们可以得到

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin \omega}{\omega^2} - \frac{\cos \omega}{\omega} \right) \sin \omega t d\omega = \begin{cases} \frac{\pi}{2} t, & |t| < 1, \\ \frac{\pi}{4}, & t = 1, \\ -\frac{\pi}{4}, & t = -1. \end{cases}$$